Quatrième / Volumes : pyramide et cône — corrigé

benprof particulier.fr

1. Rappels de 5e : aires des bases, prisme droit et cylindre

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : aires des bases**

(a) On prend la hauteur relative au côté [AB] : $A = AB \times CH \div 2 = 10 \times 4{,}8 \div 2 = 24$ cm². Attention, [AC] n'est pas la hauteur relative à [AB].

(b) $A = (a + b) \times h \div 2 = (9 + 5) \times 3{,}5 \div 2 = 14 \times 3{,}5 \div 2 = 24{,}5$ cm².

(c) Le rayon vaut $r = 14 \div 2 = 7$ cm, donc $A = \pi \times r^2 = \pi \times 7^2 = 49\pi$ cm² $\approx 153{,}9$ cm².

(d) $A = b \times h = 7{,}5 \times 4 = 30$ cm².

(e) Non : $2 \times \pi \times 6 = 12\pi$ cm est la longueur du cercle (le périmètre), pas une aire. On calcule $A = \pi \times r^2 = \pi \times 6^2 = 36\pi$ cm² $\approx 113{,}1$ cm².

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : volumes du pavé, du prisme et du cylindre**

(a) On convertit d'abord : 0,8 dm = 8 cm. $V = L \times \ell \times h = 12 \times 5 \times 8 = 480$ cm³.

(b) $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 7 = \pi \times 9 \times 7 = 63\pi$ cm³ $\approx 197{,}9$ cm³.

(c) Le rayon vaut $r = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm. $V = \pi \times 2{,}5^2 \times 4 = \pi \times 6{,}25 \times 4 = 25\pi$ cm³ $\approx 78{,}5$ cm³.

(d) $V = B \times h = 13{,}5 \times 6 = 81$ cm³.

Ex. 3 ★★☆ **Un prisme couché**

(a) Les deux bases superposables sont les triangles ABC et DEF (elles sont « debout »). La hauteur du prisme est la longueur d'une arête latérale : $h = AD = 6{,}5$ cm.

(b) ABC est rectangle en A, donc [AC] est la hauteur relative à [AB] : $B = AB \times AC \div 2 = 12 \times 9 \div 2 = 54$ cm².

(c) $V = B \times h = 54 \times 6{,}5 = 351$ cm³.

(d) 1 cm³ = 1 mL, donc $V = 351$ mL. 1 dm³ = 1 000 cm³, donc $V = 351 \div 1\,000 = 0{,}351$ dm³.

Ex. 4 ★★☆ **Les bougies d'Ambre**

(a) $r = 7 \div 2 = 3{,}5$ cm et $h = 0{,}9$ dm $= 9$ cm.

(b) $2 \times \pi \times r \times h$ est l'aire latérale (en cm²), pas un volume. Pour le volume, on multiplie l'aire de la base $\pi \times r^2$ par la hauteur : $V = \pi \times r^2 \times h$.

Ex. 4 (suite)

(c) $V = \pi \times 3{,}5^2 \times 9 = \pi \times 12{,}25 \times 9 = 110{,}25\pi$ cm³ $\approx 346{,}4$ cm³.

(d) 2 L = 2 000 cm³. $2\,000 \div 346{,}4 \approx 5{,}8$: elle peut fabriquer 5 bougies entières.

Ex. 5 ★★★ **L'abreuvoir de Clémence**

(a) Les deux bases sont les trapèzes superposables et parallèles des extrémités. La hauteur du prisme est la longueur des arêtes latérales : $h = 2{,}5$ m $= 250$ cm. Les 30 cm sont la hauteur du trapèze, pas celle du prisme.

(b) $B = (a + b) \times h \div 2 = (40 + 60) \times 30 \div 2 = 1\,500$ cm².

(c) $V = B \times h = 1\,500 \times 250 = 375\,000$ cm³. Or 1 000 cm³ = 1 dm³ = 1 L, donc la contenance est $375\,000 \div 1\,000 = 375$ L.

(d) Malo a oublié le $\div 2$ de la formule du trapèze, $(a + b) \times h \div 2$. Il trouverait $(40 + 60) \times 30 = 3\,000$ cm², le double de la bonne aire $B = 1\,500$ cm².

(e) $375 \div 30 = 12{,}5$ min, soit 12 min 30 s.

Ex. 6 ★★★ **Les boîtes de thé d'Hugo**

(a) Lisa a élevé le diamètre au carré : il faut le rayon $r = 8 \div 2 = 4$ cm (son résultat, 768π cm³, est 4 fois trop grand). Tom a bien pris le rayon, mais il a mélangé les unités (4 cm et 1,2 dm) : il faut d'abord convertir $h = 1{,}2$ dm $= 12$ cm. Son résultat, $19{,}2\pi$, n'est dans aucune unité.

(b) $r = 4$ cm et $h = 1{,}2$ dm $= 12$ cm. $V_1 = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 4^2 \times 12 = 192\pi$ cm³ (valeur exacte) $\approx 603{,}2$ cm³.

(c) $V_2 = c \times c \times h = 7 \times 7 \times 10 = 490$ cm³.

(d) C'est la boîte 1 qui contient le plus. $603{,}2 - 490 \approx 113{,}2$ cm³. Comme 1 cL = 10 cm³, la différence est d'environ 11,3 cL.

(e) $V = \pi \times r^2 \times h$, avec 0,5 L = 500 cm³ : $500 = \pi \times 4^2 \times h = 16\pi \times h$, donc $h = 500 \div (16\pi) \approx 9{,}9$ cm.

Ex. 7 ★★★ **La tente de Yanis**

(a) Jade a pris le côté $[AC]$, qui n'est pas perpendiculaire à $[AB]$. Il faut la hauteur relative à $[AB]$, c'est-à-dire CH : $B = b \times h \div 2 = 1{,}6 \times 0{,}6 \div 2 = 0{,}48$ m².

(b) La hauteur du prisme est la longueur des arêtes latérales, 2,1 m. $V = B \times h = 0{,}48 \times 2{,}1 = 1{,}008$ m³. Comme 1 m³ = 1 000 L, $V = 1\,008$ L.

Ex. 7 **(suite)**

(c) Chaque pan est un rectangle de 1 m sur 2,1 m. Aire = $2 \times 1 \times 2{,}1 + 2 \times 0{,}48 = 4{,}2 + 0{,}96 = 5{,}16$ m².

(d) $V = B \times h$, donc $B = V \div h = 1{,}26 \div 2{,}1 = 0{,}6$ m².

2. *Volume de la pyramide*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : calculer le volume d'une pyramide**

(a) B = côté × côté = $5 \times 5 = 25$ cm² (et pas 5×4) ; V = B × h ÷ 3 = $25 \times 9 \div 3 = 25 \times 3 = 75$ cm³.

(b) B = $8 \times 4{,}5 = 36$ cm² ; V = B × h ÷ 3 = $36 \times 10 \div 3 = 12 \times 10 = 120$ cm³
(on divise d'abord 36 par 3).

(c) B = $6 \times 7 \div 2 = 21$ cm² ; V = B × h ÷ 3 = $21 \times 11 \div 3 = 7 \times 11 = 77$ cm³
(÷ 2 pour le triangle, puis ÷ 3 pour la pyramide).

(d) V = B × h ÷ 3 = $12{,}6 \times 5 \div 3 = 4{,}2 \times 5 = 21$ cm³.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : la bonne hauteur, la bonne base**

(a) La hauteur est [SH] : c'est le segment issu du sommet et perpendiculaire à la base. [SA] est une arête latérale et [SI] est la hauteur d'une face latérale ; ils sont obliques.

(b) Lina a calculé côté × 4 (cela sert pour le périmètre). Pour l'aire d'un carré, on calcule côté × côté : B = $6 \times 6 = 36$ cm².

(c) V = B × h ÷ 3 = $36 \times 7 \div 3 = 12 \times 7 = 84$ cm³
(avec SH = 7 cm, et pas SI ni SA).

(d) V(pavé) = B × h = $36 \times 7 = 252$ cm³ ; $252 \div 84 = 3$, donc le pavé est 3 fois plus grand que la pyramide.

Ex. 10 ★★☆ **Une pyramide découpée dans un prisme**

(a) B = AB × AC ÷ 2 = $9 \times 5 \div 2 = 22{,}5$ cm² ; V = B × h = $22{,}5 \times 8 = 180$ cm³.

(b) V = B × h ÷ 3 = $22{,}5 \times 8 \div 3 = 180 \div 3 = 60$ cm³ : c'est le tiers du prisme, qui a la même base et la même hauteur.

(c) [AC] est perpendiculaire à [AB] et à [AD], donc à la face DAB : la hauteur est AC = 5 cm. B = $8 \times 9 \div 2 = 36$ cm² ; V = $36 \times 5 \div 3 = 12 \times 5 = 60$ cm³. On retrouve le même volume.

(d) Noé a oublié le ÷ 2 de l'aire du triangle. Il faut écrire V = $9 \times 5 \div 2 \times 8 \div 3 = 60$ cm³ : son résultat, 120 cm³, est deux fois trop grand.

Ex. 11 ★★☆ **Les bougies de Ben**

(a) B = $7 \times 6 = 42$ cm² ; V = B × h ÷ 3 = $42 \times 10 \div 3 = 14 \times 10 = 140$ cm³.

(b) Faux. Les deux bougies ont la même aire de base (42 cm²) et la même hauteur (10 cm), donc le même volume : V = $42 \times 10 \div 3 = 140$ cm³. La forme de la pyramide ne change pas son volume.

(c) Non. Retourner la pyramide ne change pas son volume. La hauteur reste SH = 10 cm, la distance du sommet à la base ; [SA] est une arête latérale, oblique. $42 \times 11 \div 3 = 154$ cm³ est faux, le volume reste 140 cm³.

(d) Volume total : $140 + 140 = 280$ cm³ ; 0,5 L = $0{,}5 \times 1\,000 = 500$ cm³ ; $280 < 500$, donc Ben a assez de cire.

Ex. 12 ★★★ **Le toit d'une tour**

(a) B = côté × côté = $4{,}2 \times 4{,}2 = 17{,}64$ m². La hauteur est [SH], perpendiculaire à la base : $h = 2{,}5$ m (3,9 m est la longueur d'une arête latérale, oblique). $V = B \times h \div 3 = 17{,}64 \times 2{,}5 \div 3 = 5{,}88 \times 2{,}5 = 14{,}7$ m³.

(b) 1 m³ = 1 000 L, donc 14,7 m³ = $14{,}7 \times 1\,000 = 14\,700$ L.

(c) Corps : $V = B \times h = 17{,}64 \times 6 = 105{,}84$ m³. Total : $105{,}84 + 14{,}7 = 120{,}54$ m³.

(d) Le dixième du volume total vaut $120{,}54 \div 10 = 12{,}054$ m³. Or $14{,}7 > 12{,}054$, donc Ben a raison.

Ex. 13 ★★★ **Un presse-papier à base de trapèze**

(a) $B = (AB + DC) \times AD \div 2 = (7 + 4) \times 5 \div 2 = 11 \times 5 \div 2 = 27{,}5$ cm².

(b) $V = B \times h \div 3 = 27{,}5 \times 6 \div 3 = 27{,}5 \times 2 = 55$ cm³.

(c) Inès a oublié le « ÷ 3 » : $27{,}5 \times 6 = 165$ cm³, c'est le volume du prisme droit de même base et de même hauteur. Malik a calculé la base comme un rectangle : $7 \times 5 = 35$ cm², puis $35 \times 6 \div 3 = 70$ cm³. Or ABCD est un trapèze : $B = 27{,}5$ cm².

(d) Boîte : $V = 7 \times 5 \times 6 = 210$ cm³. Le quart : $210 \div 4 = 52{,}5$ cm³. Or $55 > 52{,}5$, donc oui, le presse-papier occupe un peu plus du quart de la boîte.

Ex. 14 ★★★ **Les pyramides de la maquette**

(a) $B = 7{,}5 \times 4 = 30$ cm². $V = B \times h \div 3 = 30 \times 9 \div 3 = 30 \times 3 = 90$ cm³.

(b) Oui. Avec $h = 2 \times 9 = 18$ cm : $V = B \times h \div 3 = 30 \times 18 \div 3 = 30 \times 6 = 180$ cm³, et $180 = 2 \times 90$. Le volume double.

Ex. 14 (suite)

(c) $V = B \times h \div 3$, donc $B = 3 \times V \div h = 3 \times 147 \div 9 = 441 \div 9 = 49$ cm². Le côté c vérifie $c \times c = 49$, donc $c = 7$ cm.

(d) $V = B \times h \div 3$, donc $h = 3 \times V \div B = 3 \times 125 \div 30 = 375 \div 30 = 12{,}5$ cm.

3. *Volume du cône*

Ex. 15 ★☆☆ **Calculer le volume d'un cône**

(a) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 4^2 \times 6 \div 3 = \pi \times 16 \times 2 = 32\pi$ cm³ $\approx 100{,}5$ cm³.

(b) Le rayon vaut $r = 12 \div 2 = 6$ cm. $V = \pi \times 6^2 \times 5 \div 3 = \pi \times 36 \times 5 \div 3 = 60\pi$ cm³ $\approx 188{,}5$ cm³.

(c) $V = \pi \times 1{,}5^2 \times 4 \div 3 = \pi \times 2{,}25 \times 4 \div 3 = \pi \times 9 \div 3 = 3\pi$ cm³ $\approx 9{,}4$ cm³.

(d) $V = \pi \times 7^2 \times 9 \div 3 = \pi \times 49 \times 3 = 147\pi$ cm³ $\approx 461{,}8$ cm³.

(e) $V = \pi \times 3^2 \times 2{,}5 \div 3 = \pi \times 9 \times 2{,}5 \div 3 = 7{,}5\pi$ m³ $\approx 23{,}6$ m³.

Ex. 16 ★☆☆ **Le tiers du cylindre**

(a) Le cône a pour volume le tiers de celui du cylindre : $240 \div 3 = 80$ cm³.

(b) Le cylindre a un volume trois fois plus grand que celui du cône : $45 \times 3 = 135$ cm³.

(c) $54\pi \div 3 = 18\pi$ cm³.

(d) $2{,}4 \times 3 = 7{,}2$ L.

Ex. 17 ★★☆ **La bougie conique : trois erreurs à corriger**

(a) $r = 8 \div 2 = 4$ cm. $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 4^2 \times 9 \div 3 = \pi \times 16 \times 3 = 48\pi$ cm³ $\approx 150{,}8$ cm³.

(b) Nora a élevé le diamètre au carré au lieu du rayon : $8^2 = 64$ au lieu de $4^2 = 16$. Son résultat est $192\pi \div 48\pi = 4$ fois trop grand.

(c) Hugo a oublié le « $\div 3$ ». 144π cm³ est le volume du cylindre de même base et de même hauteur, soit 3 fois le volume du cône ($144\pi \div 48\pi = 3$).

(d) Seul le rayon s'élève au carré. Yanis a mis aussi π au carré : $(\pi \times 4)^2 = 16\pi^2$ et non 16π. Il faut calculer $\pi \times 4^2 \times 9 \div 3 = 48\pi \approx 150{,}8$ cm³.

Ex. 18 ★★☆ **Le tas de sable du chantier**

(a) $OM = 8 \div 2 = 4$ m. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore $SM^2 = SO^2 + OM^2$, d'où $SO^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ et $SO = \sqrt{9} = 3$ m.

(b) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 4^2 \times 3 \div 3 = 16\pi$ m³ $\approx 50{,}3$ m³.

(c) $16\pi \div 12 \approx 4{,}2$: 4 voyages ne suffisent pas, il en faut 5.

(d) Non. Avec $\pi \approx 3$, Lucas trouve $3 \times 16 = 48$ m³ et $48 \div 12 = 4$. Mais le vrai volume vaut environ 50,3 m³, soit plus que $4 \times 12 = 48$ m³ : il faut 5 voyages. On n'arrondit pas π à 3.

Ex. 19 ★★★ **Le cornet du glacier de Sète**

(a) Le rayon est $r = OM = 10 \div 2 = 5$ cm. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore $SM^2 = SO^2 + OM^2$, d'où $SO^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ et $SO = \sqrt{144} = 12$ cm. La hauteur n'est pas la génératrice.

(b) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 5^2 \times 12 \div 3 = \pi \times 25 \times 4 = 100\pi$ cm³ $\approx 314{,}2$ cm³.

(c) 2 L = 2 dm³ = 2 000 cm³. $2\,000 \div (100\pi) \approx 6{,}4$. Le glacier peut donc remplir 6 cornets entièrement (le 7e ne sera pas plein).

(d) Non. Le nouveau rayon vaut 10 cm, donc $V = \pi \times 10^2 \times 12 \div 3 = \pi \times 100 \times 4 = 400\pi$ cm³. Or $400\pi = 4 \times 100\pi$: il y a 4 fois plus de glace, pas 2 fois plus, car le rayon est élevé au carré.

Ex. 20 ★★★ **L'entonnoir d'Inès**

(a) $r = 15 \div 2 = 7{,}5$ cm. $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 7{,}5^2 \times 12 \div 3 = \pi \times 56{,}25 \times 4 = 225\pi$ cm³ $\approx 706{,}9$ cm³.

(b) Malik a oublié le « $\div 3$ » : $\pi \times 7{,}5^2 \times 12 = 675\pi$ cm³ $\approx 2\,120{,}6$ cm³ $\approx 2{,}1$ L. Il a calculé le volume du cylindre de même base et de même hauteur, trois fois trop grand.

(c) 75 cL = 750 mL = 750 cm³. Or 706,9 cm³ < 750 cm³ : un entonnoir plein ne suffit pas pour remplir la bouteille.

(d) La casserole a la même base que l'entonnoir : $B = \pi \times 7{,}5^2 = 56{,}25\pi$ cm². Hauteur d'eau : $h = V \div B = 225\pi \div (56{,}25\pi) = 4$ cm, soit le tiers de 12 cm.

Ex. 21 ★★★ **La pointe du crayon taillé**

(a) $r = 0{,}8 \div 2 = 0{,}4$ cm. $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 0{,}4^2 \times 15 = \pi \times 0{,}16 \times 15 = 2{,}4\pi$ cm³.

(b) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 0{,}4^2 \times 2{,}4 \div 3 = \pi \times 0{,}16 \times 0{,}8 = 0{,}128\pi$ cm³.

(c) $V = 2{,}4\pi + 0{,}128\pi = 2{,}528\pi$ cm³ $\approx 7{,}9$ cm³.

(d) Première erreur : elle a remplacé π par 3, alors qu'il faut garder π (touche π de la calculatrice). Deuxième erreur : elle a élevé tout le produit $3 \times 0{,}4$ au carré, alors que seul le rayon est au carré : $\pi \times 0{,}4^2$. Son résultat : $1{,}2^2 \times 2{,}4 \div 3 = 1{,}44 \times 0{,}8 = 1{,}152$ cm³, au lieu de $0{,}128\pi \approx 0{,}4$ cm³.

(e) Volume avant taille : $\pi \times 0{,}4^2 \times 17{,}4 = 2{,}784\pi$ cm³. Volume enlevé : $2{,}784\pi - 2{,}528\pi = 0{,}256\pi$ cm³ $\approx 0{,}8$ cm³
(c'est le cylindre de 2,4 cm de long moins le cône, soit les deux tiers de ce cylindre).

4. *Unités de volume et de contenance*

Ex. 22 ★☆☆ **Convertir des volumes**

(a) 3,2 m³ = 3,2 × 1 000 dm³ = 3 200 dm³.

(b) 5 600 cm³ = 5 600 ÷ 1 000 dm³ = 5,6 dm³.

(c) 0,7 cm³ = 0,7 × 1 000 mm³ = 700 mm³.

(d) 2 m³ = 2 000 dm³ = 2 000 × 1 000 cm³ = 2 000 000 cm³ : il faut 2 000 000 petits cubes.

(e) Pour les volumes, on multiplie par 1 000 (pas par 100) : 4 m³ = 4 × 1 000 dm³ = 4 000 dm³.

(f) 0,038 m³ = 38 dm³ = 38 000 cm³.

Ex. 23 ★☆☆ **Volume et contenance**

(a) 1 L = 1 000 cm³, donc 850 cm³ = 850 ÷ 1 000 L = 0,85 L.

(b) 0,75 dm³ = 0,75 L = 0,75 × 100 cL = 75 cL.

(c) 65 cL = 65 × 10 mL = 650 mL. Comme 1 mL = 1 cm³, il faut 650 cm³.

(d) 1 m³ = 1 000 L, donc 1,6 m³ = 1,6 × 1 000 L = 1 600 L.

(e) 4,2 hL = 4,2 × 100 L = 420 L ; 0,5 m³ = 0,5 × 1 000 L = 500 L.
Donc 380 L < 4,2 hL < 0,5 m³.

Ex. 24 ★★☆ **Le verre à cocktail de Noah**

(a) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 4^2 \times 9 \div 3 = 48\pi$ cm³ $\approx 150{,}8$ cm³.

(b) Non : 1 L = 1 000 cm³, donc 150,8 cm³ = 150,8 ÷ 1 000 L ≈ 0,15 L. C'est bien moins d'un litre.

(c) 150,8 cm³ = 150,8 mL = 150,8 ÷ 10 cL ≈ 15,1 cL.

(d) Il reste 15,1 − 12 = 3,1 cL : Noah peut encore ajouter environ 3,1 cL de limonade.

Ex. 25 ★★☆ **L'aquarium de Lina**

(a) Hugo mélange les mètres et les centimètres. Il faut d'abord tout mettre dans la même unité : 0,8 m = 80 cm.

(b) 0,8 m = 8 dm ; 30 cm = 3 dm ; 45 cm = 4,5 dm. $V = L \times l \times h = 8 \times 3 \times 4{,}5 = 108$ dm³.

(c) 108 dm³ = 108 L. Comme 1 m³ = 1 000 L : 108 L = 108 ÷ 1 000 m³ = 0,108 m³.

(d) 84 L = 84 dm³. Aire du fond : 8 × 3 = 24 dm². Hauteur d'eau : $h = 84 \div 24 = 3{,}5$ dm = 35 cm.

Ex. 26 ★★★ **Les bougies de Rose**

(a) $B = AB \times BC = 8 \times 4{,}5 = 36$ cm². $V = B \times h \div 3 = 36 \times 12 \div 3 = 144$ cm³.

(b) 1 cm³ = 1 mL, donc $V = 144$ mL. Les contenances vont de 10 en 10 : 144 mL = 14,4 cL = 0,144 L.

(c) 1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³, et pas 1 cm³.
Donc 1,5 L = 1 500 cm³ : c'est largement assez pour une bougie de 144 cm³.

(d) 1 500 ÷ 144 ≈ 10,4, donc Rose peut couler 10 bougies entières. Elles utilisent 10 × 144 = 1 440 cm³. Il reste 1 500 − 1 440 = 60 cm³ = 60 mL = 6 cL.

(e) 0,24 L = 240 cm³. $V = B \times h \div 3$, donc $h = 3 \times V \div B = 3 \times 240 \div 36 = 20$ cm.

Ex. 27 ★★★ **L'abreuvoir du centre équestre**

(a) $B = (AB + DC) \times DH \div 2 = (50 + 35) \times 32 \div 2 = 1\,360$ cm².

(b) Léo a mélangé les unités : l'aire est en cm², mais la longueur est en m. Il faut tout mettre en cm : 1,2 m = 120 cm. $V = B \times h = 1\,360 \times 120 = 163\,200$ cm³.

(c) On décale de trois rangs par unité : 163 200 cm³ = 163,2 dm³ = 0,1632 m³. Comme 1 L = 1 dm³, $V = 163{,}2$ L.

Ex. 27 **(suite)**

(d) Léo trouve $1\,360 \times 1{,}2 = 1\,632$ cm³ $= 1{,}632$ dm³ $=$ 1,632 L, soit environ $1{,}632 \div 0{,}33 \approx 5$ canettes. Un abreuvoir pour chevaux contient bien plus, de l'ordre d'une baignoire : ici 163,2 L.

(e) $163{,}2 \div 12 = 13{,}6$. Avec 13 seaux (156 L), ce n'est pas assez : il faut au minimum 14 seaux (168 L).

Ex. 28 ★★★ **Le silo à grain de Jules**

(a) Le rayon vaut $r = 3 \div 2 = 1{,}5$ m. $V_1 = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 1{,}5^2 \times 4 = 9\pi$ m³.

(b) 120 cm $= 1{,}2$ m. $V_2 = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 1{,}5^2 \times 1{,}2 \div 3 = 0{,}9\pi$ m³.

(c) $V = V_1 + V_2 = 9\pi + 0{,}9\pi = 9{,}9\pi$ m³ $\approx 31{,}1$ m³. Comme 1 m³ $= 1\,000$ L, $V \approx 31\,100$ L.

(d) $3 \times 95 = 285$ hL. 1 hL $= 100$ L, donc 285 hL $= 28\,500$ L. $28\,500$ L $< 31\,100$ L : le silo suffit.

5. *Retrouver une dimension*

Ex. 29 ★☆☆ **Retrouver une hauteur ou une aire de base**

(a) $V = B \times h \div 3$, donc $B \times h = 3 \times V = 3 \times 120 = 360$ et $SH = 360 \div 40 = 9$ cm (sans le ×3, on trouverait 3 cm, une hauteur trois fois trop petite).

(b) $V = B \times h$, donc $h = V \div B = 120 \div 40 = 3$ cm (pas de ×3 pour un prisme).

(c) $B \times h = 3 \times V = 3 \times 48\pi = 144\pi$, donc $B = 144\pi \div 9 = 16\pi$ cm².

(d) $V = B \times h$, donc $B = V \div h = 55 \div 2{,}5 = 22$ cm².

Ex. 30 ★☆☆ **Du disque ou du carré à la longueur**

(a) $\pi \times r^2 = 169\pi$, donc $r^2 = 169$ et $r = \sqrt{169} = 13$ cm.

(b) côté × côté $= 121$, donc côté $= \sqrt{121} = 11$ cm (l'aire n'est pas le côté).

(c) $r^2 = 100\pi \div \pi = 100$, donc $r = \sqrt{100} = 10$ cm et le diamètre vaut $2 \times 10 = 20$ cm.

(d) Sacha a divisé par 2 au lieu de prendre la racine carrée : $r = \sqrt{144} = 12$ cm, car $12 \times 12 = 144$.

(e) $r^2 = B \div \pi = 113 \div \pi \approx 36{,}0$, donc $r \approx \sqrt{36{,}0} \approx 6{,}0$ cm.

Ex. 31 ★★☆ **La maquette de pyramide**

(a) $V = B \times h \div 3$, donc $B \times 10 = 3 \times 270 = 810$ et $B = 810 \div 10 = 81$ cm².

(b) $IJ \times IJ = 81$, donc $IJ = \sqrt{81} = 9$ cm (et pas 81 cm : 81 est une aire).

(c) $V = B \times h \div 3 = 9 \times 9 \times 10 \div 3 = 270$ cm³ : on retrouve bien le volume de l'énoncé.

Ex. 32 ★★☆ **Le pot de sirop**

(a) 1 L $= 1\,000$ cm³, donc $1{,}2$ L $= 1{,}2 \times 1\,000 = 1\,200$ cm³.

(b) $r = 11 \div 2 = 5{,}5$ cm ; $B = \pi \times r^2 = \pi \times 5{,}5^2 = 30{,}25\pi$ cm² $\approx 95{,}0$ cm².

(c) Le sirop forme un cylindre : $V = B \times h$, donc $h = V \div B = 1\,200 \div (30{,}25\pi) \approx 12{,}6$ cm (pas de ×3 pour un cylindre).

(d) Non : le sirop monterait à environ 12,6 cm, soit plus que les 12,5 cm du pot. Il déborde, il faut un pot plus haut.

Ex. 33 ★★★ **Le verre à cocktail**

(a) 1 L $= 100$ cL $= 1\,000$ cm³, donc 1 cL $= 10$ cm³ et 20 cL $= 20 \times 10 = 200$ cm³.

(b) Le diamètre mesure 8 cm, donc $r = 8 \div 2 = 4$ cm. $B = \pi \times r^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$ cm².

(c) Léo a calculé $V \div B = 200 \div (16\pi) \approx 4{,}0$ cm : il a oublié le ×3. Pour un cône, $V = B \times h \div 3$, donc $h = 3 \times V \div B = 600 \div (16\pi) \approx 11{,}9$ cm.

(d) $r = 6 \div 2 = 3$ cm. $V = \pi \times 3^2 \times 14 \div 3 = 42\pi$ cm³ $\approx 131{,}9$ cm³. Or $131{,}9$ cm³ < 200 cm³ : ce verre ne contient pas 20 cL.

Ex. 34 ★★★ **La tente pyramidale**

(a) 1 m³ $= 1\,000$ L, donc $7\,200$ L $= 7\,200 \div 1\,000 = 7{,}2$ m³.

(b) $V = B \times h \div 3$, donc $B = 3 \times V \div h = 3 \times 7{,}2 \div 2{,}4 = 21{,}6 \div 2{,}4 = 9$ m².

(c) $AB \times AB = 9$, donc $AB = \sqrt{9} = 3$ m (et pas 9 m : 9 m² est une aire).

(d) Non. Pour un pavé droit, $V = B \times h$ sans diviser par 3, donc $h = V \div B = 7{,}2 \div 9 = 0{,}8$ m : l'abri est trois fois moins haut que la tente.

Ex. 35 ★★★ **Les bougies coniques**

(a) $B = \pi \times r^2$, donc $r^2 = B \div \pi = 64\pi \div \pi = 64$ et $OM = \sqrt{64} = 8$ cm (et non 64 ni 32).

Ex. 35 **(suite)**

(b) Le triangle SOM est rectangle en O : $SM^2 = OS^2 + OM^2$, donc $OS^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$ et $OS = \sqrt{225} = 15$ cm.

(c) $V = B \times h \div 3 = 64\pi \times 15 \div 3 = 320\pi$ cm³ $\approx 1\,005{,}3$ cm³.

(d) 4 L $= 4 \times 1\,000 = 4\,000$ cm³. 3 bougies : $960\pi \approx 3\,015{,}9$ cm³ $< 4\,000$ cm³ ; 4 bougies : $1\,280\pi \approx 4\,021{,}2$ cm³ $> 4\,000$ cm³. Elle peut fabriquer 3 bougies entières.

6. *Solides composés*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : ajouter ou retrancher des volumes**

(a) Cône : V $= \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 3^2 \times 4 \div 3 = 12\pi$ cm³. Solide = cylindre + cône : $36\pi + 12\pi = 48\pi$ cm³.

(b) Volume restant = pavé − trou cylindrique : V $= 96 - 6\pi$ cm³ $\approx 77{,}2$ cm³.

(c) Tente = pavé + pyramide : V $= 3{,}5 + 0{,}75 = 4{,}25$ m³.

(d) Même unité : 400 dm³ $= 0{,}4$ m³. Silo = cylindre + cône : V $= 2 + 0{,}4 = 2{,}4$ m³.

(e) Volume de céramique = cylindre plein − intérieur vide : V $= 250 - 180 = 70$ cm³.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : hauteur et rayon de chaque morceau**

(a) Deux cônes identiques : hauteur de chaque cône $= 14 \div 2 = 7$ cm.

(b) Cylindre + cône : hauteur du cylindre $= 17{,}5 - 2{,}5 = 15$ cm.

(c) Pavé + pyramide : hauteur du pavé $= 12{,}4 - 3{,}6 = 8{,}8$ m.

(d) Cylindre + cône de même base : rayon commun r $= 8 \div 2 = 4$ cm.

(e) Même unité : 1,2 m = 120 cm. Cylindre + cône : hauteur du cône $= 120 - 85 = 35$ cm.

Ex. 38 ★★☆ **La trémie à grains**

(a) Un cylindre (hauteur 6 m) et un cône de révolution (hauteur 2 m) ; rayon commun r $= 3 \div 2 = 1{,}5$ m.

(b) Cylindre : V $= \pi \times r^2 \times h = \pi \times 1{,}5^2 \times 6 = 13{,}5\pi$ m³. Cône : V $= \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 1{,}5^2 \times 2 \div 3 = 1{,}5\pi$ m³.

(c) V $= 13{,}5\pi + 1{,}5\pi = 15\pi$ m³ $\approx 47{,}1$ m³.

(d) 1 m³ $= 1\,000$ L, donc 15π m³ $= 15\,000\pi$ L $\approx 47\,123{,}9$ L.

Ex. 39 ★★☆ **Le pot de fleurs en béton**

(a) Pavé : V $= L \times l \times h = 30 \times 30 \times 25 = 22\,500$ cm³. Trou : V $= \pi \times r^2 \times h = \pi \times 12^2 \times 20 = 2\,880\pi$ cm³. Béton = pavé − trou : V $= 22\,500 - 2\,880\pi$ cm³.

(b) V $\approx 13\,452{,}2$ cm³ et 1 L $= 1\,000$ cm³, donc V $\approx 13{,}5$ L.

(c) Il a pris la hauteur du pavé (25 cm) pour la profondeur du trou : $\pi \times 12^2 \times 25 = 3\,600\pi$ cm³. Or le trou ne traverse pas le pot, sa profondeur est 20 cm. Le bon volume est $22\,500 - 2\,880\pi \approx 13\,452{,}2$ cm³.

(d) $13{,}452\,2 \div 5 \approx 2{,}7$: 2 sacs ne suffisent pas, on arrondit à l'unité supérieure, il faut 3 sacs.

Ex. 40 ★★★ **La tour au toit pyramidal**

(a) La tour est un pavé droit à base carrée surmonté d'une pyramide à base carrée. Toit : 240 cm = 2,4 m. Hauteur du pavé : $14 - 2{,}4 = 11{,}6$ m.

(b) V $= L \times l \times h = 5 \times 5 \times 11{,}6 = 290$ m³.

(c) V $= B \times h \div 3 = 5 \times 5 \times 2{,}4 \div 3 = 25 \times 2{,}4 \div 3 = 20$ m³.

(d) V $= 290 + 20 = 310$ m³. Comme 1 m³ $= 1\,000$ L, on a 310 m³ $= 310\,000$ L.

(e) Première erreur : Tom a pris la hauteur totale (14 m) pour le pavé au lieu de $14 - 2{,}4 = 11{,}6$ m. Seconde erreur : il a laissé la hauteur du toit en cm (240) au lieu de 2,4 m. Le bon volume est 310 m³.

Ex. 41 ★★★ **Le verre à cocktail en cristal**

(a) Le triangle SON est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore : $OS^2 = SN^2 - ON^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2 = 56{,}25 - 20{,}25 = 36$, donc OS = 6 cm.

(b) V $= \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 4{,}5^2 \times 6 \div 3 = 40{,}5\pi$ cm³ $\approx 127{,}2$ cm³.

(c) Le rayon du cylindre est $11 \div 2 = 5{,}5$ cm. Cylindre : $\pi \times 5{,}5^2 \times 10 = 302{,}5\pi$ cm³. Cristal : $302{,}5\pi - 40{,}5\pi = 262\pi$ cm³ $\approx 823{,}1$ cm³.

(d) Noé a mis le diamètre au carré au lieu du rayon. Il fallait écrire $\pi \times 5{,}5^2 \times 10 = 302{,}5\pi$ cm³.

(e) 1,5 L = 1 500 mL = 1 500 cm³. $1\,500 \div 40{,}5\pi \approx 11{,}8$. Onze verres contiennent $\approx 1\,399{,}6$ cm³, ce qui est moins que 1 500 cm³ : il faut donc 12 verres.

Ex. 42 ★★★ **Le crayon taillé et sa maquette géante**

(a) Le crayon est un cylindre surmonté d'un cône de révolution. Rayon commun : $8 \div 2 = 4$ mm $= 0{,}4$ cm. Hauteur du cylindre : $15 - 1{,}5 = 13{,}5$ cm.

(b) Cylindre : $\pi \times 0{,}4^2 \times 13{,}5 = 2{,}16\pi$ cm³. Cône : $\pi \times 0{,}4^2 \times 1{,}5 \div 3 = 0{,}08\pi$ cm³. Crayon : $2{,}16\pi + 0{,}08\pi = 2{,}24\pi$ cm³ $\approx 7{,}0$ cm³.

(c) Non. Elle a arrondi chaque morceau avant d'ajouter ($2{,}16\pi \approx 6{,}786$ et $0{,}08\pi \approx 0{,}251$) et les erreurs se sont cumulées. En gardant les valeurs exactes jusqu'au bout, on trouve $2{,}24\pi \approx 7{,}0$ cm³.

(d) Les volumes sont multipliés par $20^3 = 8\,000$: V $= 2{,}24\pi \times 8\,000 = 17\,920\pi$ cm³ $\approx 56\,297$ cm³ $\approx 56{,}3$ L (car 1 L $= 1\,000$ cm³). Non : le volume est multiplié par 8 000, pas par 20.

7. *Agrandissement et réduction : effet sur les volumes*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : agrandir une pyramide**

(a) Les longueurs sont multipliées par k : AB $= 3 \times 2 = 6$ cm.

(b) $B = 3 \times 3 = 9$ cm² ; les aires sont multipliées par $2^2 = 4$: $9 \times 4 = 36$ cm².

(c) Les volumes sont multipliés par $2^3 = 8$: $V = 12 \times 8 = 96$ cm³
(et non $12 \times 2 = 24$ cm³).

(d) $V = 12 \times 5^3 = 12 \times 125 = 1\,500$ cm³.

(e) $V = 12 \times 0{,}5^3 = 12 \times 0{,}125 = 1{,}5$ cm³ : c'est une réduction, donc le volume diminue.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : réduire un cône**

(a) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 6^2 \times 9 \div 3 = 108\pi$ cm³ $\approx 339{,}3$ cm³.

(b) Les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{3}$: $r = 6 \div 3 = 2$ cm et $h = 9 \div 3 = 3$ cm.

(c) Les aires sont divisées par $3^2 = 9$: $B = \pi \times 6^2 = 36\pi$ cm², donc la nouvelle aire vaut $36\pi \div 9 = 4\pi$ cm² $\approx 12{,}6$ cm².

(d) Les volumes sont divisés par $3^3 = 27$: $V = 108\pi \div 27 = 4\pi$ cm³ $\approx 12{,}6$ cm³.

(e) $V = 108\pi \times 1{,}5^3 = 108\pi \times 3{,}375 = 364{,}5\pi$ cm³ $\approx 1\,145{,}1$ cm³.

Ex. 45 ★★☆ **L'entonnoir de Malik**

(a) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 5^2 \times 15 \div 3 = 125\pi$ cm³ $\approx 392{,}7$ cm³.

(b) Pour une réduction : $k = 6 \div 15 = 0{,}4$ (la petite longueur divisée par la grande). Rayon : $5 \times 0{,}4 = 2$ cm.

(c) Tom a multiplié par k alors que les volumes sont multipliés par k^3. $0{,}4^3 = 0{,}064$, donc $V = 125\pi \times 0{,}064 = 8\pi$ cm³ $\approx 25{,}1$ cm³
(on vérifie : $\pi \times 2^2 \times 6 \div 3 = 8\pi$).

Ex. 46 ★★☆ **Vrai ou faux : agrandissements et réductions**

(a) Faux. Les volumes sont multipliés par $k^3 = 3^3 = 27$: $V = 2 \times 27 = 54$ m³. Le nombre $18 = 2 \times 3^2$ vient du coefficient des aires (k^2), pas de celui des volumes.

(b) Vrai. Le rayon et la hauteur sont multipliés par 1,2 : c'est un agrandissement de rapport $k = 1{,}2$.
$k^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$, donc $V = 5 \times 1{,}728 = 8{,}64$ m³.

(c) Faux. $V = \pi \times 3^2 \times 4 \div 3 = 12\pi$ cm³ ; $1{,}5\pi \div 12\pi = \frac{1}{8}$: c'est k^3, pas k. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, on a $k = \frac{1}{2}$
(vérification : rayon 1,5 cm, hauteur 2 cm, $\pi \times 1{,}5^2 \times 2 \div 3 = 1{,}5\pi$ cm³).

Ex. 47 ★★★ **Le verre à cocktail de Léa**

(a) Dans le triangle SOM rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2$, donc $SO^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$ et $SO = \sqrt{64} = 8$ cm.

(b) $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 6^2 \times 8 \div 3 = 96\pi$ cm³ $\approx 301{,}6$ cm³.

(c) Mi-hauteur : $8 \div 2 = 4$ cm. Le petit cône a le même sommet S et sa base est parallèle à celle du verre : c'est une réduction du verre, de rapport $k = 4 \div 8 = \frac{1}{2}$.

(d) Faux. Les volumes sont multipliés par $k^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$: $V = 96\pi \div 8 = 12\pi$ cm³ $\approx 37{,}7$ cm³ (vérification : rayon $6 \div 2 = 3$ cm, $\pi \times 3^2 \times 4 \div 3 = 12\pi$ cm³). 1 cL $= 10$ cm³, donc 37,7 cm³ $\approx 3{,}8$ cL. C'est le huitième du verre, pas la moitié.

(e) $V = 96\pi - 12\pi = 84\pi$ cm³ $\approx 263{,}9$ cm³, soit environ 26,4 cL
(les $\frac{7}{8}$ du verre).

Ex. 48 ★★★ **La maquette du toit de la tour**

(a) $B = 4 \times 4 = 16$ m². $V = B \times h \div 3 = 16 \times 3 \div 3 = 16$ m³.

Ex. 48 **(suite)**

(b) $4\text{ m} = 400\text{ cm}$ et $400 \div 50 = 8\text{ cm}$; $3\text{ m} = 300\text{ cm}$ et $300 \div 50 = 6\text{ cm}$. Côté de la maquette : 8 cm ; hauteur : 6 cm.

(c) $V = B \times h \div 3 = 8^2 \times 6 \div 3 = 64 \times 6 \div 3 = 128\text{ cm}^3$. Avec $k = \frac{1}{50}$, les volumes sont divisés par $50^3 = 125\,000$: $16\text{ m}^3 = 16\,000\,000\text{ cm}^3$ et $16\,000\,000 \div 125\,000 = 128\text{ cm}^3$.

(d) Noé a multiplié le volume par $k = \frac{1}{50}$, alors qu'il faut le multiplier par k^3, c'est-à-dire le diviser par $50^3 = 125\,000$. Son résultat, $0{,}32\text{ m}^3 = 320\,000\text{ cm}^3$, est beaucoup trop grand : le bon volume est 128 cm^3.

(e) Aire réelle : $16\text{ m}^2 = 160\,000\text{ cm}^2$; aire de la maquette : $8 \times 8 = 64\text{ cm}^2$. $160\,000 \div 64 = 2\,500 = 50^2$: l'aire est divisée par $2\,500$ (k^2), pas par 50.

Ex. 49 ★★★ **L'atelier de bougies d'Inès**

(a) $r = 6 \div 2 = 3\text{ cm}$. $V = \pi \times r^2 \times h \div 3 = \pi \times 3^2 \times 12 \div 3 = 36\pi\text{ cm}^3 \approx 113{,}1\text{ cm}^3$.

(b) D : $12 \div 6 = 2$ et $24 \div 12 = 2$. Toutes les longueurs sont multipliées par 2 : D est un agrandissement de rapport $k = 2$. B et C ne changent qu'une seule dimension : ce ne sont pas des agrandissements.

(c) Non. Le volume est multiplié par $k^3 = 2^3 = 8$: $V = 36\pi \times 8 = 288\pi\text{ cm}^3 \approx 904{,}8\text{ cm}^3$. D contient 8 fois plus de cire, pas 2 fois.

(d) B : $V = \pi \times 3^2 \times 24 \div 3 = 72\pi\text{ cm}^3$ et $72\pi \div 36\pi = 2$: doubler la hauteur multiplie le volume par 2. C : $r = 6$ cm, $V = \pi \times 6^2 \times 12 \div 3 = 144\pi\text{ cm}^3$ et $144\pi \div 36\pi = 4$: doubler le rayon multiplie le volume par $2^2 = 4$.

(e) $4 \div 6 = \frac{2}{3}$ et $8 \div 12 = \frac{2}{3}$: toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{3}$, donc E est une réduction de rapport $k = \frac{2}{3}$. Les volumes sont multipliés par $k^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$: $V = 36\pi \times \frac{8}{27} = \frac{32\pi}{3}\text{ cm}^3 \approx 33{,}5\text{ cm}^3$
(vérification : $r = 2$ cm, $\pi \times 2^2 \times 8 \div 3 = \frac{32\pi}{3}\text{ cm}^3$).