1. Rappels : volumes des solides usuels

Ex. 1 ★☆☆ **Droit ou pointu ?**

(a) $V = L \times \ell \times h = 8 \times 5 \times 3{,}5 = 140$ cm³. Le volume du pavé droit est 140 cm³.

(b) La hauteur est SH = 9 cm. L'arête latérale n'est pas la hauteur. $\mathcal{B} = 4 \times 4 = 16$ cm², donc $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{16 \times 9}{3} = 48$ cm³. Le volume de la pyramide est 48 cm³.

(c) Le rayon vaut $r = 8 \div 2 = 4$ cm. $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 4^2 \times 5 = 80\pi$ cm³ $\approx 251{,}3$ cm³. Le volume de la boîte est 80π cm³, soit environ 251,3 cm³.

(d) $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 8}{3} = 24\pi$ cm³ $\approx 75{,}4$ cm³. Le volume du cône est 24π cm³, soit environ 75,4 cm³.

Ex. 2 ★☆☆ **Volumes et contenances**

(a) 1 m³ = 1 000 L, donc 4 500 L = 4 500 ÷ 1 000 = 4,5 m³.

(b) 1 L = 1 000 mL, donc 0,05 L = 0,05 × 1 000 = 50 mL.

(c) 1 dm³ = 1 000 cm³. Il faut multiplier par 1 000, pas par 100 : 7 dm³ = 7 000 cm³.

(d) $V = 15 \times 8 \times 5 = 600$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, 600 cm³ = 600 ÷ 1 000 = 0,6 L. La contenance de la boîte est 0,6 L.

Ex. 3 ★★☆ **La cale de porte**

(a) Le triangle ABC est rectangle en A, donc $\mathcal{B} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{6 \times 4{,}5}{2} = 13{,}5$ cm².

(b) La hauteur du prisme est la distance entre ses deux bases : AD = 0,2 m = 20 cm. Ce n'est pas AC. $V = \mathcal{B} \times h = 13{,}5 \times 20 = 270$ cm³.

(c) Il a calculé $6 \times 4{,}5 \times 20 = 540$ cm³ : il a oublié de diviser par 2. L'aire d'une base triangulaire, c'est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

(d) $m = 270 \times 0{,}7 = 189$ g. La cale pèse 189 g.

Ex. 4 ★★☆ **La bougie conique**

(a) Le triangle SOA est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore, $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc SO = 12 cm. La génératrice (13 cm) n'est pas la hauteur.

(b) $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} = 100\pi$ cm³ $\approx 314{,}2$ cm³. La bougie contient environ 314,2 cm³ de cire.

Ex. 4 (suite)

(c) $\frac{\pi \times r^2 \times 12}{3} = 196\pi$, donc $4 \times r^2 = 196$, puis $r^2 = 49$ et $r = 7$ cm. Le rayon de la base est 7 cm.

Ex. 5 ★★★ **Le silo de la ferme**

(a) Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 4{,}8 \div 2 = 2{,}4$ m. $V_1 = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 2{,}4^2 \times 6{,}5 = 37{,}44\pi$ m³ $\approx 117{,}6$ m³.

(b) Le triangle SOA est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore, $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 4^2 - 2{,}4^2 = 16 - 5{,}76 = 10{,}24$, donc $SO = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2$ m. Attention : la génératrice (4 m) n'est pas la hauteur.

(c) $V_2 = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 2{,}4^2 \times 3{,}2}{3} = 6{,}144\pi$ m³ $\approx 19{,}3$ m³.

(d) $V = V_1 + V_2 = 37{,}44\pi + 6{,}144\pi = 43{,}584\pi$ m³ $\approx 136{,}9$ m³. Comme 1 m³ = 1 000 L, $V = 43\,584\pi$ L $\approx 136\,923$ L.

(e) Durée : $43\,584\pi \div 1\,500 = 29{,}056\pi$ min $\approx 91{,}28$ min, soit environ 91 min. Il faut donc environ 1 h 31 min pour vider le silo.

Ex. 6 ★★★ **La lampe de Noé**

(a) Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 12^2 = 288$. Comme $AH = AC \div 2$, on a $AH^2 = AC^2 \div 4 = 288 \div 4 = 72$.

(b) Le triangle SHA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $SH^2 = SA^2 - AH^2 = 11^2 - 72 = 121 - 72 = 49$, donc $SH = 7$ cm.

(c) La hauteur est SH = 7 cm, et non l'arête latérale SA = 11 cm. Une pyramide est un solide pointu : $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{12^2 \times 7}{3} = \frac{144 \times 7}{3} = 336$ cm³. Le volume de la lampe est 336 cm³.

(d) 1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³, donc 336 cm³ = 336 ÷ 1 000 = 0,336 L. Or 0,336 < 0,35 : non, la lampe contient moins de 0,35 L d'air.

Ex. 7 ★★★ **L'abreuvoir et le seau**

(a) La base ABC est un triangle : $\mathcal{B} = \frac{BC \times AI}{2} = \frac{60 \times 40}{2} = 1\,200$ cm².

(b) La hauteur du prisme est la longueur entre les deux bases, et non AI : $h = 1{,}5$ m = 150 cm. $V = \mathcal{B} \times h = 1\,200 \times 150 = 180\,000$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, l'abreuvoir contient 180 000 ÷ 1 000 = 180 L.

Ex. 7 **(suite)**

(c) Première erreur : $2 \times \pi \times r$ est la longueur du cercle, alors que la base est une aire : $\pi \times r^2$. Deuxième erreur : 28 cm est le diamètre, le rayon vaut $28 \div 2 = 14$ cm. $V = \pi \times 14^2 \times 30 = 5\,880\pi$ cm^3 $\approx 18\,472{,}6$ cm^3, soit environ 18,5 L.

(d) $180\,000 \div (5\,880\pi) \approx 9{,}74$. Avec 9 seaux, l'abreuvoir n'est pas plein. Il faut donc au minimum 10 seaux pleins.

2. *Aire d'une sphère*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : calculer l'aire d'une sphère**

(a) $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 5^2 = 4 \times \pi \times 25 = 100\pi$ cm^2 $\approx 314{,}2$ cm^2.

(b) Le rayon vaut $R = 16 \div 2 = 8$ cm. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 8^2 = 4 \times \pi \times 64 = 256\pi$ cm^2 $\approx 804{,}2$ cm^2.

(c) $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 2{,}5^2 = 4 \times \pi \times 6{,}25 = 25\pi$ m^2 $\approx 78{,}5$ m^2.

(d) La demi-sphère est la moitié de la sphère : $\mathcal{A} = \frac{4 \times \pi \times 10^2}{2} = \frac{400\pi}{2} = 200\pi$ cm^2 $\approx 628{,}3$ cm^2.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Faux. Le nombre est juste, puisque $4 \times \pi \times 1{,}5^2 = 4 \times \pi \times 2{,}25 = 9\pi$, mais une sphère est une surface : son aire s'exprime en cm^2. L'aire vaut 9π cm^2. Le cm^3 sert pour le volume de la boule.

(b) Faux. $\pi \times 4^2$ est l'aire d'un grand disque, qui est quatre fois plus petite. L'aire de la sphère est $4 \times \pi \times 4^2 = 4 \times \pi \times 16 = 64\pi$ cm^2.

(c) Faux. $R^2 = R \times R = 7 \times 7 = 49$, et non 2×7. L'aire est $4 \times \pi \times 49 = 196\pi$ cm^2.

(d) Vrai. Le rayon vaut $R = 2{,}4 \div 2 = 1{,}2$ cm. L'aire est $4 \times \pi \times 1{,}2^2 = 4 \times \pi \times 1{,}44 = 5{,}76\pi$ cm^2. Attention : en prenant 2,4 comme rayon, on trouverait $23{,}04\pi$ cm^2, soit quatre fois trop.

Ex. 10 ★★☆ **Le cuir d'un ballon de football**

(a) Le rayon vaut $R = 22 \div 2 = 11$ cm. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 11^2 = 4 \times \pi \times 121 = 484\pi$ cm^2 $\approx 1\,520{,}5$ cm^2.

(b) Une pièce a pour aire $484\pi \div 32 = 15{,}125\pi$ cm^2 $\approx 47{,}5$ cm^2.

(c) Pour 50 ballons : $50 \times 484\pi = 24\,200\pi$ cm^2 $\approx 76\,026{,}5$ cm^2. Comme $76\,026{,}5 \div 10\,000 \approx 7{,}6$, il faut environ 7,6 m^2 de cuir.

Ex. 10 **(suite)**

(d) L'air remplit la boule. On calcule donc un volume : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 11^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1\,331 = \frac{5\,324}{3}\pi$ cm^3 $\approx 5\,575{,}3$ cm^3. Comme 1 L = 1 000 cm^3, cela fait environ 5,6 L.

Ex. 11 ★★☆ **Retrouver le rayon d'un globe**

(a) $4 \times \pi \times R^2 = 900\pi$, donc $R^2 = 900\pi \div (4\pi) = 225$. Le rayon est positif, donc $R = \sqrt{225} = 15$ cm.

(b) $4 \times \pi \times R^2 \approx 907{,}9$, donc $R^2 \approx 907{,}9 \div (4\pi) \approx 72{,}2$. Le rayon est positif, donc $R \approx \sqrt{72{,}2} \approx 8{,}5$ cm.

(c) Non. La nouvelle aire est $4 \times 900\pi = 3\,600\pi$ cm^2, donc $R^2 = 3\,600\pi \div (4\pi) = 900$ et $R = \sqrt{900} = 30$ cm $= 2 \times 15$ cm : le rayon est seulement doublé. Avec $R = 60$ cm, l'aire serait $4 \times \pi \times 60^2 = 14\,400\pi$ cm^2, soit 16 fois plus.

Ex. 12 ★★★ **Repeindre le dôme d'un observatoire**

(a) Le rayon est la moitié du diamètre : $R = 8{,}4 \div 2 = 4{,}2$ m. Le dôme est la moitié d'une sphère, donc son aire est $\frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times R^2 = 2 \times \pi \times 4{,}2^2 = 2 \times \pi \times 17{,}64 = 35{,}28\pi$ m^2 $\approx 110{,}8$ m^2. L'aire à peindre est d'environ 110,8 m^2.

(b) Tom a remplacé R^2 par $2 \times R$. Or $R^2 = R \times R = 4{,}2 \times 4{,}2 = 17{,}64$, et pas $2 \times 4{,}2 = 8{,}4$. Son calcul donne $16{,}8\pi$ m^2 $\approx 52{,}8$ m^2, alors que la bonne aire est $35{,}28\pi$ m^2 $\approx 110{,}8$ m^2.

(c) Avec deux couches, on peint $2 \times 35{,}28\pi = 70{,}56\pi$ m^2 $\approx 221{,}7$ m^2. Il faut donc $70{,}56\pi \div 8 \approx 27{,}7$ L de peinture.

(d) $27{,}7 \div 5 \approx 5{,}5$: 5 pots ne suffisent pas (25 L), il faut donc acheter 6 pots. Le prix est $6 \times 42{,}50 = 255$ €.

Ex. 13 ★★★ **Des lampes boules en papier**

(a) L'aire de la sphère est $4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 12{,}5^2 = 4 \times \pi \times 156{,}25 = 625\pi$ cm^2 $\approx 1\,963{,}5$ cm^2.

(b) Le rayon de la grande lampe est $2 \times 12{,}5 = 25$ cm. Son aire est $4 \times \pi \times 25^2 = 2\,500\pi$ cm^2 $\approx 7\,854{,}0$ cm^2. Or $2\,500\pi \div 625\pi = 4$: il faut quatre fois plus de papier, pas deux fois plus. Inès a tort, car quand on double le rayon, R^2 est multiplié par $2^2 = 4$.

(c) $4 \times \pi \times R^2 = 1\,444\pi$, donc $R^2 = 1\,444 \div 4 = 361$ et $R = \sqrt{361} = 19$ cm. Le diamètre est $2 \times 19 = 38$ cm.

(d) Le papier forme une sphère, c'est-à-dire une surface : on calcule son aire, avec $4\pi R^2$ en cm^2. Le calcul de Sami donne le volume de la boule de rayon 12,5 cm, donc l'air contenu dans la lampe : $\frac{4}{3} \times \pi \times 1\,953{,}125 = \frac{15\,625}{6}\pi$ cm^3 $\approx 8\,181{,}2$ cm^3. C'est un volume en cm^3, pas une aire.

Ex. 14 ★★★ **Le feutre des balles de tennis**

(a) $R = 6{,}6 \div 2 = 3{,}3$ cm. L'aire de la sphère est $4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 10{,}89 = 43{,}56\pi$ cm² $\approx 136{,}8$ cm².

(b) $\pi \times 3{,}3^2 = 10{,}89\pi$ cm² $\approx 34{,}2$ cm² : c'est l'aire d'un grand disque, celui qui coupe la balle en deux. L'aire de la sphère vaut 4 fois l'aire de ce grand disque, donc le résultat de Lucas est 4 fois trop petit.

(c) Aire du rouleau : $1{,}2 \times 50 = 60$ m², soit $60 \times 10\,000 = 600\,000$ cm². Aire utile : 80 % de 600 000, soit $0{,}8 \times 600\,000 = 480\,000$ cm². Puis $480\,000 \div (43{,}56\pi) \approx 3\,507{,}5$. On peut donc recouvrir 3 507 balles entières.

(d) Hauteur du tube : $h = 3 \times 6{,}6 = 19{,}8$ cm. Aire latérale du tube : $2 \times \pi \times 3{,}3 \times 19{,}8 = 130{,}68\pi$ cm². Feutre des trois balles : $3 \times 43{,}56\pi = 130{,}68\pi$ cm². Les deux aires sont égales (environ 410,5 cm²).

3. *Volume d'une boule*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : volume d'une boule**

(a) $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 125 = \frac{500}{3}\pi$ cm³ $\approx 523{,}6$ cm³. Le volume de la boule est $\frac{500}{3}\pi$ cm³, environ 523,6 cm³.

(b) $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 1{,}2^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1{,}728 = 2{,}304\pi$ cm³ $\approx 7{,}2$ cm³. Le volume de la bille est $2{,}304\pi$ cm³, environ 7,2 cm³.

(c) Le rayon est $R = 9 \div 2 = 4{,}5$ cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 4{,}5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 91{,}125 = 121{,}5\pi$ cm³ $\approx 381{,}7$ cm³. Le volume de la boule de Noël est environ 381,7 cm³.

(d) Une demi-boule est la moitié d'une boule : $V = \frac{2}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 1\,000 = \frac{2\,000}{3}\pi$ cm³ $\approx 2\,094{,}4$ cm³.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : aire ou volume ? Repère les erreurs**

(a) Le rayon est $R = 30 \div 2 = 15$ cm. Aire $= 4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 15^2 = 4 \times \pi \times 225 = 900\pi$ cm² $\approx 2\,827{,}4$ cm².

(b) Léa a remplacé R^3 par $3 \times R$. Or $R^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$ cm³ $\approx 33{,}5$ cm³.

(c) Faux : le facteur est $\frac{4}{3}$, pas 4. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 15{,}625 = \frac{125}{6}\pi$ cm³ $\approx 65{,}4$ cm³ ; $4 \times \pi \times 2{,}5^3 = 62{,}5\pi$ cm³ est 3 fois trop grand.

(d) Nathan a calculé l'aire de la sphère : $4 \times \pi \times 20^2 = 1\,600\pi$ cm² (des cm², pas des cm³). Le volume est $\frac{4}{3} \times \pi \times 20^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 8\,000 = \frac{32\,000}{3}\pi$ cm³ $\approx 33\,510{,}3$ cm³.

Ex. 17 ★★☆ **Du volume au rayon**

(a) $36\,000\pi$ cm³ $\approx 113\,097{,}3$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³ : $113\,097{,}3 \div 1\,000 \approx 113{,}1$ L. Le ballon contient environ 113,1 L d'air.

(b) $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = 36\,000\pi$ donc $R^3 = \frac{3 \times 36\,000\pi}{4\pi} = 27\,000$. Or $30^3 = 27\,000$, donc $R = 30$ cm.

(c) $R^3 = \frac{3 \times 20}{4 \times \pi} = \frac{15}{\pi} \approx 4{,}775$. Or $1{,}6^3 = 4{,}096$ et $1{,}7^3 = 4{,}913$, donc $1{,}6 \text{ cm} < R < 1{,}7$ cm. Le rayon de la perle est compris entre 1,6 cm et 1,7 cm.

Ex. 18 ★★☆ **La bougie et sa boîte (Archimède)**

(a) Le rayon est $R = 7 \div 2 = 3{,}5$ cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 42{,}875 = \frac{343}{6}\pi$ cm³ $\approx 179{,}6$ cm³.

(b) $V_{\text{boîte}} = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 3{,}5^2 \times 7 = 85{,}75\pi$ cm³ $\approx 269{,}4$ cm³. $\frac{343}{6}\pi \div 85{,}75\pi = \frac{2}{3}$: la bougie occupe les deux tiers de la boîte.

(c) $V_{\text{air}} = 85{,}75\pi - \frac{343}{6}\pi = \frac{343}{12}\pi$ cm³ $\approx 89{,}8$ cm³ (c'est le tiers de la boîte).

(d) La bougie géante est un agrandissement de rapport k de la bougie, donc son volume est multiplié par k^3. Ici $k^3 = 8 = 2^3$, donc $k = 2$. Son diamètre est $2 \times 7 = 14$ cm. Vérification : $R = 7$ cm et $\frac{4}{3} \times \pi \times 7^3 = \frac{1\,372}{3}\pi$ cm³ $= 8 \times \frac{343}{6}\pi$ cm³.

Ex. 19 ★★★ **La lampe dans son colis**

(a) Inès a pris le diamètre pour le rayon et elle a mis le rayon au carré au lieu de le mettre au cube. Le rayon est $R = 22 \div 2 = 11$ cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 11^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1\,331 = \frac{5\,324}{3}\pi$ cm³ $\approx 5\,575{,}3$ cm³.

(b) $V_{\text{boîte}} = 22^3 = 10\,648$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, cela fait $10\,648 \div 1\,000 = 10{,}648$ L, soit environ 10,6 L.

(c) $V_{\text{billes}} = 10\,648 - \frac{5\,324}{3}\pi \approx 5\,072{,}7$ cm³, soit environ 5,1 L.

(d) La moitié de la boîte vaut $10\,648 \div 2 = 5\,324$ cm³. Or la lampe a un volume d'environ 5 575,3 cm³ et $5\,575{,}3 > 5\,324$. Mila a raison : la lampe occupe plus de la moitié de la boîte.

Ex. 20 ★★★ **Les dômes du pâtissier**

(a) $R = 16 \div 2 = 8$ cm. $V = \frac{2}{3} \times \pi \times 8^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 512 = \frac{1\,024}{3}\pi$ cm³ $\approx 1\,072{,}3$ cm³.

(b) $R = 8 \div 2 = 4$ cm. $V = \frac{2}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{128}{3}\pi$ cm³ $\approx 134{,}0$ cm³. On a $\frac{1\,024}{3}\pi \div \frac{128}{3}\pi = 8$. Hugo a tort : c'est une réduction de rapport $k = \frac{1}{2}$, donc le volume est multiplié par $k^3 = \frac{1}{8}$. Un mini-dôme contient 8 fois moins de mousse.

Ex. 20 (suite)

(c) 1,5 L = 1 500 cm³. $1\,500 \div \frac{128}{3}\pi \approx 11{,}2$. Hugo peut faire 11 mini-dômes complets.

(d) Aire d'une demi-sphère : $\frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 8^2 = 128\pi$ cm² ≈ 402,1 cm². Pour deux dômes : $2 \times 128\pi = 256\pi$ cm² ≈ 804,2 cm². Comme $804{,}2 > 750$, un pot ne suffit pas.

Ex. 21 ★★★ **Les billes de l'aquarium**

(a) $V = 40 \times 25 \times 20 = 20\,000$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, l'aquarium contient $20\,000 \div 1\,000 = 20$ L d'eau.

(b) $R = 3 \div 2 = 1{,}5$ cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 1{,}5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}375 = 4{,}5\pi$ cm³ ≈ 14,1 cm³.

(c) Volume des 60 billes : $60 \times 4{,}5\pi = 270\pi$ cm³ ≈ 848,2 cm³. L'aire de la base est $40 \times 25 = 1\,000$ cm², donc le niveau monte de $270\pi \div 1\,000 \approx 0{,}8$ cm.

(d) Volume de la boule : $1\,000 \times 0{,}5 = 500$ cm³. $\frac{4}{3}\pi R^3 = 500$, donc $R^3 = 3 \times 500 \div (4\pi) \approx 119{,}4$. Or $4{,}9^3 = 117{,}649$ et $4{,}95^3 \approx 121{,}3$, donc $4{,}9 < R < 4{,}95$. Le rayon de la boule est environ 4,9 cm.

4. *Solides composés avec une boule*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes — lire un solide composé**

(a) La boule touche deux faces opposées du cube, donc son diamètre est égal à l'arête : 9 cm. Son rayon est $R = 9 \div 2 = 4{,}5$ cm.

(b) La demi-boule a une hauteur égale à son rayon. La hauteur du cylindre est donc $9{,}5 - 2{,}5 = 7$ m.

(c) La demi-boule ferme exactement la base du cône, donc elle a le même rayon : $R = 2{,}5$ cm. Sa hauteur est égale à R. La hauteur totale est $4 + 2{,}5 = 6{,}5$ cm.

(d) 1 m³ = 1 000 L, donc $3{,}6$ m³ $= 3{,}6 \times 1\,000 = 3\,600$ L.

(e) $100 \div 6 \approx 16{,}7$. Il n'a pas assez de pâte pour faire une 17e boule : il fait au maximum 16 boules.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes — volume d'un solide composé**

(a) $V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} + \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{\pi \times 2^2 \times 11}{3} + \frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{44}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi = 20\pi$ cm³ ≈ 62,8 cm³.

(b) Les deux demi-boules forment une boule de rayon 0,5 cm. $V = \pi \times 0{,}5^2 \times 2 + \frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}5^3 = 0{,}5\pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ cm³ ≈ 2,1 cm³.

(c) On soustrait la cavité au cube : $V = 8^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times 3^3 = 512 - 18\pi$ cm³ ≈ 455,5 cm³.

Ex. 24 ★★☆ **La boîte de balles de tennis**

(a) Le diamètre de la boîte est celui d'une balle, donc $r = 6{,}6 \div 2 = 3{,}3$ cm. Les trois balles sont empilées, donc $h = 3 \times 6{,}6 = 19{,}8$ cm.

(b) Balles : $3 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}3^3 = 4 \times \pi \times 35{,}937 = 143{,}748\pi$ cm³ ≈ 451,6 cm³. Boîte : $\pi \times 3{,}3^2 \times 19{,}8 = 215{,}622\pi$ cm³ ≈ 677,4 cm³.

(c) $V_{\text{air}} = 215{,}622\pi - 143{,}748\pi = 71{,}874\pi$ cm³ ≈ 225,8 cm³.

(d) $\frac{143{,}748\pi}{215{,}622\pi} \times 100 \approx 66{,}7$: les balles occupent environ 66,7 % de la boîte, soit les deux tiers.

Ex. 25 ★★☆ **Les billes du verrier**

(a) 1 L = 1 000 cm³, donc $1{,}5$ L $= 1{,}5 \times 1\,000 = 1\,500$ cm³.

(b) $R = 1{,}6 \div 2 = 0{,}8$ cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}8^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}512 = \frac{256}{375}\pi$ cm³ ≈ 2,14 cm³.

(c) Avec la valeur exacte : $1\,500 \div \frac{256}{375}\pi \approx 699{,}4$. Il ne peut pas faire une bille entière de plus : au maximum 699 billes.
(Avec la valeur arrondie 2,14, on trouverait 700,9 et donc 700 billes, ce qui est faux.)

Ex. 26 ★★★ **Le silo à grain du Gers**

(a) Le cylindre et la demi-boule ont le même rayon : $R = 6 \div 2 = 3$ m. La hauteur totale comprend la demi-boule, dont la hauteur est R. La hauteur du cylindre est donc $h = 14 - 3 = 11$ m.

(b) $V_{\text{cylindre}} = \pi \times R^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 11 = 99\pi$ m³ et $V_{\text{demi-boule}} = \frac{2}{3} \times \pi \times 3^3 = 18\pi$ m³.
Donc $V = 99\pi + 18\pi = 117\pi$ m³ ≈ 367,6 m³.

(c) La masse de blé est $117\pi \times 750 = 87\,750\pi$ kg ≈ 275 674,8 kg, soit environ 275,7 t.

(d) Non. Les volumes sont multipliés par $k^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$, et non par 1,5. On obtient $V' = 3{,}375 \times 117\pi = 394{,}875\pi$ m³ ≈ 1 240,5 m³. Ce silo contient donc environ 3,4 fois plus de blé.

Ex. 27 ★★★ **Le globe de Nadia**

(a) Le globe tient exactement dans le cube : il touche deux faces opposées. Son diamètre est donc égal à l'arête du cube, soit 30 cm.

(b) Théo a pris le diamètre pour le rayon. Le rayon est $R = 30 \div 2 = 15$ cm, donc $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3\,375 = 4\,500\pi$ cm³ ≈ 14 137,2 cm³.

Ex. 27 (suite)

(c) $V_{\text{boîte}} = 30^3 = 27\,000$ cm³. $V_{\text{air}} = 27\,000 - 4\,500\pi$ cm³ $\approx 12\,862{,}8$ cm³. Comme 1 L $= 1\,000$ cm³, il reste environ 12,9 L d'air.

(d) $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = 7\,776\pi$, donc $R^3 = 7\,776 \times 3 \div 4 = 5\,832$. Or $18^3 = 5\,832$, donc $R = 18$ cm. Le globe tient exactement dans la boîte : l'arête est égale au diamètre, soit $2 \times 18 = 36$ cm.

(e) $12{,}86 \div 5 \approx 2{,}6$. Deux sacs ne suffisent pas, car $2 \times 5 = 10$ L $< 12{,}9$ L. Nadia doit donc acheter 3 sacs (on arrondit à l'unité supérieure).

Ex. 28 ★★★ La citerne de récupération d'eau de pluie

(a) Le cylindre et les demi-boules ont le même rayon : $R = 1{,}2 \div 2 = 0{,}6$ m. La longueur totale comprend les deux demi-boules, soit $2R$. La longueur du cylindre est donc $4{,}2 - 2 \times 0{,}6 = 3$ m.

(b) Les deux demi-boules ont le même rayon. Réunies, elles forment une boule de rayon 0,6 m. $V_{\text{cylindre}} = \pi \times 0{,}6^2 \times 3 = 1{,}08\pi$ m³ et $V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}6^3 = 0{,}288\pi$ m³.
Donc $V = 1{,}08\pi + 0{,}288\pi = 1{,}368\pi$ m³ $\approx 4{,}3$ m³.

(c) L'erreur : 1 m³ $= 1\,000$ L, et non 100 L. La contenance de la citerne est $1{,}368\pi \times 1\,000 = 1\,368\pi$ L $\approx 4\,297{,}7$ L, bien plus que 500 L.

(d) $4\,297{,}7 \div 11 \approx 390{,}7$. Le 391e arrosoir ne serait pas plein. On arrondit donc à l'unité inférieure : Yanis peut remplir 390 arrosoirs pleins.

5. *Réduction d'une pyramide ou d'un cône coupé*

Ex. 29 ★☆☆ Section d'un cône : rapport, rayon et aire

(a) Le plan est à 3 cm de la base, donc la petite hauteur, mesurée depuis le sommet, est $SO' = 10 - 3 = 7$ cm. Donc $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ (on a bien $k < 1$).

(b) La section est une réduction de la base de rapport k : $O'A' = k \times OA = 0{,}7 \times 4 = 2{,}8$ cm.

(c) $\mathcal{B} = \pi \times OA^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$ cm² $\approx 50{,}3$ cm².

(d) Les aires sont multipliées par k^2 (et non par k) : $\mathcal{B}' = k^2 \times \mathcal{B} = 0{,}7^2 \times 16\pi = 0{,}49 \times 16\pi = 7{,}84\pi$ cm² $\approx 24{,}6$ cm². Vérification : $\pi \times 2{,}8^2 = 7{,}84\pi$.

Ex. 30 ★☆☆ Volume du petit solide : penser au cube

(a) Léo a multiplié par k alors qu'un volume se multiplie par k^3. On a $k^3 = 0{,}2^3 = 0{,}008$, donc $V' = k^3 \times V = 0{,}008 \times 250 = 2$ cm³.

(b) Mesurée depuis le sommet, la petite hauteur vaut $20 - 15 = 5$ cm, donc $k = \frac{5}{20} = 0{,}25$. La petite pyramide est une réduction de rapport 0,25 : $V' = 0{,}25^3 \times 800 = 0{,}015625 \times 800 = 12{,}5$ cm³.

(c) Le plan est à 6 cm du sommet, donc $k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Le petit cône est une réduction du grand de rapport $\frac{2}{3}$: $V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 135 = \frac{8}{27} \times 135 = 40$ cm³.

(d) $k^3 = \frac{27}{1\,000} = 0{,}027$. Or $0{,}3^3 = 0{,}027$, donc $k = 0{,}3$.

Ex. 31 ★★☆ Pyramide coupée : retrouver la hauteur

(a) La section est une réduction de la base, donc $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. La petite pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de $SABCD$ de rapport $\frac{1}{3}$, donc $SO' = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ cm.

(b) $B'C' = k \times BC = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm.

(c) $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{9 \times 6 \times 12}{3} = 216$ cm³. La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de $SABCD$ de rapport $k = \frac{1}{3}$, donc $V' = k^3 \times V = \frac{1}{27} \times 216 = 8$ cm³.

(d) $\mathcal{B}' = 3 \times 2 = 6$ cm² et $h' = SO' = 4$ cm, donc $\frac{\mathcal{B}' \times h'}{3} = \frac{6 \times 4}{3} = 8$ cm³. On retrouve bien $V' = 8$ cm³.

Ex. 32 ★★☆ Le verre à cocktail rempli à mi-hauteur

(a) Le rayon est $8 \div 2 = 4$ cm. $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 4^2 \times 12}{3} = 64\pi$ cm³ $\approx 201{,}1$ cm³.

(b) Le jus forme un petit cône, réduction du verre de rapport $k = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Son volume est $k^3 \times V = \frac{1}{8} \times 64\pi = 8\pi$ cm³ $\approx 25{,}1$ cm³, soit environ 25,1 mL. La moitié de la contenance ferait $32\pi \approx 100{,}5$ mL. Jade a donc tort : elle n'a versé que $\frac{1}{8}$ de la contenance.

(c) 1 L $= 1\,000$ cm³. $\frac{1\,000}{8\pi} \approx 39{,}8$. Jade peut donc servir 39 verres remplis à mi-hauteur.

Ex. 33 ★★★ Le presse-papiers en tronc de pyramide

(a) Le plan est à 2 cm de la base, donc à $8 - 2 = 6$ cm du sommet : $SO' = 6$ cm. La petite pyramide est une réduction de $SABCD$ de rapport $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{8} = 0{,}75$ (on a bien $k < 1$).

Ex. 33 **(suite)**

(b) La section est une réduction de la base. C'est donc un carré de côté $12 \times 0{,}75 = 9$ cm, d'aire $9^2 = 81$ cm². Yanis a trouvé $0{,}75 \times 144 = 108$ cm² : il a multiplié l'aire par k. Or une aire se multiplie par k^2 : $0{,}75^2 \times 144 = 0{,}5625 \times 144 = 81$ cm².

(c) $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{12^2 \times 8}{3} = 384$ cm³. La petite pyramide est une réduction de $SABCD$ de rapport $k = 0{,}75$, donc $V' = k^3 \times V = 0{,}421875 \times 384 = 162$ cm³.

(d) Le tronc n'est pas une réduction : on calcule son volume par différence, $V - V' = 384 - 162 = 222$ cm³. Avec la méthode de Zoé, on trouverait $384 \times (1 - 0{,}75) = 384 \times 0{,}25 = 96$ cm³, et non 222 cm³ : elle a tort.

(e) Masse $= 222 \times 2{,}5 = 555$ g. Le presse-papiers pèse 555 g.

Ex. 34 ★★★ **La bougie conique qui se consume**

(a) Le diamètre mesure 10 cm, donc le rayon vaut $r = 5$ cm. $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 18}{3} = 150\pi$ cm³ $\approx 471{,}2$ cm³.

(b) La partie brûlée est un petit cône dont la hauteur, mesurée depuis le sommet, vaut $18 - 15 = 3$ cm. C'est une réduction de la bougie de rapport $k = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$. Cire brûlée : $k^3 \times V = \frac{1}{216} \times 150\pi = \frac{25}{36}\pi$ cm³ $\approx 2{,}2$ cm³. La bougie restante est un tronc, qui n'est pas une réduction : on calcule la différence $150\pi - \frac{25}{36}\pi = \frac{5\,375}{36}\pi$ cm³ $\approx 469{,}1$ cm³.

(c) Le petit cône est une réduction de rapport k, donc $k^3 = \frac{9{,}6\pi}{150\pi} = 0{,}064$. Comme $0{,}4^3 = 0{,}064$, on a $k = 0{,}4$. La hauteur du petit cône, mesurée depuis le sommet, vaut $0{,}4 \times 18 = 7{,}2$ cm. La flamme est donc à $18 - 7{,}2 = 10{,}8$ cm de la base.

(d) Ce disque est la section : c'est une réduction de la base de rapport 0,4. Son rayon vaut $5 \times 0{,}4 = 2$ cm et son aire $\pi \times 2^2 = 4\pi$ cm² $\approx 12{,}6$ cm². On retrouve bien $k^2 \times 25\pi = 0{,}16 \times 25\pi = 4\pi$ cm².

Ex. 35 ★★★ **La cuve conique d'eau de pluie**

(a) $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 1{,}5^2 \times 2}{3} = 1{,}5\pi$ m³ $\approx 4{,}71$ m³. Comme 1 m³ = 1 000 L, la contenance vaut $1\,500\pi$ L $\approx 4\,712$ L.

(b) Le petit cône d'eau est une réduction de la cuve de rapport $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$. La surface de l'eau est un disque de rayon $1{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}9$ m, d'aire $\pi \times 0{,}9^2 = 0{,}81\pi$ m² $\approx 2{,}54$ m².

Ex. 35 **(suite)**

(c) $V_{eau} = k^3 \times V = 0{,}6^3 \times 1{,}5\pi = 0{,}216 \times 1{,}5\pi = 0{,}324\pi$ m³ $\approx 1{,}02$ m³, soit environ 1 018 L. L'eau remplit 0,216 de la cuve, c'est-à-dire 21,6 % et non 60 %. Malik a pris k au lieu de k^3 (60 % donnerait environ 2 827 L).

(d) Le volume d'eau est $0{,}324\pi$ m³ $= 324\pi$ L. Durée $= \frac{324\pi}{12} = 27\pi$ min ≈ 85 min. Il faut environ 85 minutes, soit 1 h 25 min.

6. *Effet d'un agrandissement sur les aires et les volumes*

Ex. 36 ★☆☆ **Longueur, aire ou volume ?**

(a) Un périmètre est une longueur : il est multiplié par k. $P' = 2{,}5 \times 12 = 30$ cm.

(b) Tripler les longueurs, c'est appliquer le rapport $k = 3$. Une aire est multipliée par $k^2 = 3^2 = 9$, et non par 3 : $\mathcal{A}' = 9 \times 8 = 72$ cm².

(c) $V = 5 \times 2 \times 4 = 40$ cm³. Un volume est multiplié par $k^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, il est donc divisé par 8 : $V' = 40 \div 8 = 5$ cm³.

(d) On a $0 < k < 1$, c'est donc une réduction. $k^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$ et $\mathcal{A}' = 0{,}64 \times 50 = 32$ cm².

(e) Les dimensions sont multipliées par $k = 1{,}2$, donc la contenance est multipliée par $k^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$: $V' = 1{,}728 \times 1\,250 = 2\,160$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, la contenance est de 2,16 L.

Ex. 37 ★☆☆ **Retrouver le rapport k**

(a) $k = \frac{14}{4} = 3{,}5$. On a $k > 1$: c'est un agrandissement.

(b) On écrit les deux longueurs dans la même unité : 2 m = 200 cm. $k = \frac{50}{200} = 0{,}25$. On a $0 < k < 1$: c'est une réduction.

(c) $k^2 = \frac{63}{7} = 9$, donc $k = \sqrt{9} = 3$. C'est un agrandissement.

(d) $k^3 = \frac{320}{5} = 64 = 4^3$, donc $k = 4$. C'est un agrandissement.

(e) $k^3 = \frac{50}{10} = 5$. $1{,}7^3 = 4{,}913 < 5$ et $1{,}8^3 = 5{,}832 > 5$, donc $1{,}7 < k < 1{,}8$. Puis $1{,}71^3 \approx 5{,}0002 > 5$, donc $1{,}70 < k < 1{,}71$. Enfin $1{,}705^3 \approx 4{,}956 < 5$, donc $k \approx 1{,}71$ au centième. C'est un agrandissement.

Ex. 38 ★★☆ **La maquette du silo**

(a) Les longueurs réelles sont 50 fois plus grandes : $h = 50 \times 8 = 400$ cm, c'est-à-dire 4 m.

(b) $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi$ cm³ $\approx 226{,}2$ cm³.

(c) Le silo est un agrandissement de la maquette de rapport $k = 50$, donc $V_{\text{réel}} = 50^3 \times 72\pi = 125\,000 \times 72\pi = 9\,000\,000\pi$ cm³. Comme 1 m³ = 1 000 000 cm³, on obtient $V_{\text{réel}} = 9\pi$ m³ $\approx 28{,}3$ m³.

(d) Non, elle a tort : une aire est multipliée par $50^2 = 2\,500$. Sur la maquette, l'aire de la base est $\pi \times 3^2 = 9\pi$ cm². En réalité : $2\,500 \times 9\pi = 22\,500\pi$ cm². Comme 1 m² = 10 000 cm², cela fait $2{,}25\pi$ m² $\approx 7{,}1$ m².

Ex. 39 ★★☆ **Les sapins en chocolat**

(a) Non, il a tort. $k = \frac{30}{10} = 3$. La masse est proportionnelle au volume, donc elle est multipliée par $k^3 = 3^3 = 27$: $27 \times 120 = 3\,240$ g, soit 3,24 kg. Un sapin trois fois plus haut pèse 27 fois plus, pas 3 fois plus.

(b) $k = \frac{25}{10} = 2{,}5$. La masse est multipliée par $k^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625$: $15{,}625 \times 120 = 1\,875$ g.

(c) $k^3 = \frac{15}{120} = 0{,}125 = 0{,}5^3$, donc $k = 0{,}5$ (c'est une réduction). La hauteur est $0{,}5 \times 10 = 5$ cm.

Ex. 40 ★★★ **Les bougies de Manon**

(a) $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{6^2 \times 9}{3} = \frac{36 \times 9}{3} = 108$ cm³. Le volume de la petite bougie est 108 cm³.

(b) L'aire de la base de la petite bougie est $6^2 = 36$ cm². Les aires sont multipliées par k^2, donc $k^2 = \frac{81}{36} = 2{,}25$ et $k = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$. Comme $k > 1$, c'est un agrandissement.

(c) Léo se trompe : les volumes ne sont pas multipliés par k mais par $k^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$.
Donc $V' = k^3 \times V = 3{,}375 \times 108 = 364{,}5$ cm³. La grande bougie a un volume de 364,5 cm³.

(d) 1,2 L = 1,2 dm³ = 1 200 cm³. $\frac{1\,200}{364{,}5} \approx 3{,}29$. Manon peut couler au maximum 3 grandes bougies
(il lui reste $1\,200 - 3 \times 364{,}5 = 106{,}5$ cm³ de cire).

Ex. 41 ★★★ **La maquette du château d'eau**

(a) Le réservoir réel est un agrandissement de rapport 40 de la maquette : son diamètre est $15 \times 40 = 600$ cm, soit 6 m.

Ex. 41 **(suite)**

(b) La maquette a un rayon $R = 15 \div 2 = 7{,}5$ cm. $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 7{,}5^2 = 225\pi$ cm² $\approx 706{,}9$ cm². Les aires sont multipliées par $40^2 = 1\,600$: $\mathcal{A}_{\text{réel}} = 225\pi \times 1\,600 = 360\,000\pi$ cm² $= 36\pi$ m² (car 1 m² = 10 000 cm²), soit environ 113,1 m².

(c) Tom se trompe : les contenances sont multipliées par $40^3 = 64\,000$, pas par 40. $V_{\text{maquette}} = \frac{4}{3} \times \pi \times 7{,}5^3 = 562{,}5\pi$ cm³, donc $V_{\text{réel}} = 562{,}5\pi \times 64\,000 = 36\,000\,000\pi$ cm³ $= 36\pi$ m³ $\approx 113{,}1$ m³. Comme 1 m³ = 1 000 L, le réservoir contient $36\,000\pi$ L, soit environ 113 097,3 L.

(d) $\frac{36\pi}{12} = 3\pi \approx 9{,}4$. 9 pots ne suffisent pas : il faut acheter 10 pots.

Ex. 42 ★★★ **Le bocal deux fois plus grand**

(a) $V = \pi r^2 h = \pi \times 4^2 \times 10 = 160\pi$ cm³ $\approx 502{,}7$ cm³. Comme 1 cm³ = 1 mL, le petit bocal contient environ 502,7 mL.

(b) Non : avec $k = 2$, la contenance est multipliée par $2^3 = 8$, pas par 2. Le bocal contiendrait $8 \times 160\pi = 1\,280\pi$ cm³ $\approx 4\,021{,}2$ cm³, soit 8 fois plus.

(c) Les contenances sont multipliées par k^3 ; on veut une contenance multipliée par 2, donc $k^3 = 2$. $1{,}25^3 = 1{,}953\,125 < 2$ et $1{,}26^3 \approx 2{,}0004 > 2$, donc $1{,}25 < k < 1{,}26$. Comme $1{,}255^3 \approx 1{,}977 < 2$, on a $k \approx 1{,}26$ au centième
(agrandissement, car $k > 1$).

(d) Les longueurs sont multipliées par k : $r' \approx 4 \times 1{,}26 = 5{,}04$ cm et $h' \approx 10 \times 1{,}26 = 12{,}6$ cm.

(e) Le périmètre est une longueur : $P' = 2\pi r' \approx 2 \times \pi \times 5{,}04 \approx 31{,}7$ cm (c'est le périmètre 8π cm du petit couvercle multiplié par k). L'aire est multipliée par k^2 : $\mathcal{A}' = \pi r'^2 \approx \pi \times 5{,}04^2 \approx 79{,}8$ cm².

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : conversions, durée et quantité suffisante**

(a) 1 m³ = 1 000 L, donc 2,35 m³ $= 2{,}35 \times 1\,000 = 2\,350$ L.

(b) 1 L = 1 000 cm³, donc 4 800 cm³ $= 4\,800 \div 1\,000 = 4{,}8$ L.

(c) $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 4^2 \times 9 = 144\pi$ cm³ $\approx 452{,}4$ cm³.

(d) 0,7 m³ = 700 L, puis $700 \div 400 = 1{,}75$ h. Comme 0,75 h $= 0{,}75 \times 60 = 45$ min, le remplissage dure 1 h 45 min (et non 1 h 75 min).

Ex. 43 (suite)

(e) $58 \div 8 = 7{,}25$. Avec 7 seaux, il ne verse que $7 \times 8 = 56$ L, ce qui ne suffit pas. On arrondit donc par excès : il doit remplir son seau 8 fois.

Ex. 44 ★☆☆ Automatismes : une pyramide coupée près de sa base

(a) La distance est donnée depuis la base, donc $SO' = 12 - 4 = 8$ cm. Le rapport vaut $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

(b) Les longueurs sont multipliées par k : $A'B' = 9 \times \frac{2}{3} = 6$ cm.

(c) La section est un carré de côté 6 cm, d'aire $6^2 = 36$ cm². On retrouve $81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 36$ cm².

(d) $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3} = \dfrac{9^2 \times 12}{3} = 324$ cm³.

(e) La petite pyramide est une réduction de $SABCD$ de rapport $k = \frac{2}{3}$, donc $V' = k^3 \times V = \frac{8}{27} \times 324 = 96$ cm³. Vérification : $\frac{36 \times 8}{3} = 96$ cm³.

(f) Le tronc n'est pas une réduction, on calcule donc une différence : $V - V' = 324 - 96 = 228$ cm³.

Ex. 45 ★★☆ Le cornet de glace de Lisbonne

(a) Le triangle SOA est rectangle en O et $OA = 10 \div 2 = 5$ cm. D'après le théorème de Pythagore, $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, donc $SO = 12$ cm.

(b) Inès a pris la génératrice $SA = 13$ cm à la place de la hauteur $SO = 12$ cm. Or la hauteur est perpendiculaire à la base. On a $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} = 100\pi$ cm³ ≈ 314 cm³.

(c) Demi-boule de rayon 5 cm : $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{250}{3}\pi$ cm³. Total : $100\pi + \frac{250}{3}\pi = \frac{550}{3}\pi$ cm³ ≈ 576 cm³. Comme 1 cm³ = 1 mL, il sert environ 576 mL de glace.

Ex. 46 ★★☆ La citerne de la ferme de Noé

(a) Le rayon vaut $1{,}6 \div 2 = 0{,}8$ m. $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 0{,}8^2 \times 2{,}5 = 1{,}6\pi$ m³. Comme 1 m³ = 1 000 L, cela fait $1\,600\pi$ L $\approx 5\,027$ L.

(b) $5\,027 > 4\,800$: la citerne pleine suffit pour une semaine.

(c) On garde la valeur exacte du volume : $1{,}6\pi \times 4{,}20 = 6{,}72\pi$ € $\approx 21{,}11$ €. Noé économise environ 21,11 € à chaque remplissage.

Ex. 47 ★★★ Le silo à blé de Marion

(a) Le rayon vaut $OA = 6 \div 2 = 3$ m. Le triangle SOA est rectangle en O car la hauteur est perpendiculaire à la base. D'après le théorème de Pythagore, $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, donc $SO = \sqrt{16} = 4$ m. La trémie mesure 4 m de haut.

Ex. 47 (suite)

(b) Cylindre : $V_1 = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi$ m³. Cône : $V_2 = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 12\pi$ m³. Le silo est la somme des deux solides : $V = 72\pi + 12\pi = 84\pi$ m³ $\approx 263{,}9$ m³.

(c) Volume de blé : $0{,}9 \times 84\pi = 75{,}6\pi$ m³ $\approx 237{,}5$ m³. Masse : $75{,}6\pi \times 0{,}75 = 56{,}7\pi$ t $\approx 178{,}1$ t. Le silo contient environ 178,1 t de blé.

(d) $56{,}7\pi \div 25 \approx 7{,}1$. Avec 7 camions on ne transporte que 175 t, ce qui ne suffit pas. On arrondit donc par excès : il faut au minimum 8 camions.

Ex. 48 ★★★ Le réservoir d'arrosage de Yasmine

(a) Volume d'un cône : $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{\pi \times 1{,}2^2 \times 2}{3} = 0{,}96\pi$ m³ $\approx 3{,}016$ m³. Comme 1 m³ = 1 000 L, la contenance du réservoir est d'environ 3 016 L.

(b) La distance de 0,5 m est mesurée depuis le bord : $SO' = 2 - 0{,}5 = 1{,}5$ m. Le cône d'eau est une réduction du réservoir de rapport $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$.

(c) Les volumes sont multipliés par k^3 : $V' = k^3 \times V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 0{,}96\pi = \frac{27}{64} \times 0{,}96\pi = 0{,}405\pi$ m³ $\approx 1{,}272$ m³. Le réservoir contient environ 1 272 L d'eau. Vérification : le rayon de l'eau vaut $1{,}2 \times \frac{3}{4} = 0{,}9$ m et $\frac{\pi \times 0{,}9^2 \times 1{,}5}{3} = 0{,}405\pi$ m³.

(d) Il manque $0{,}96\pi - 0{,}405\pi = 0{,}555\pi$ m³ $\approx 1\,744$ L. Durée : $1\,744 \div 400 = 4{,}36$ h. Or 0,36 h = $0{,}36 \times 60$ min ≈ 22 min, donc la durée est d'environ 4 h 22 min (et non 4 h 36 min). Comme 4 h 22 min > 4 h, le réservoir ne sera pas plein à temps.

Ex. 49 ★★★ La sculpture du rond-point de Rennes

(a) Le rayon de la boule vaut $8 \div 2 = 4$ cm. Boule : $V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{256}{3}\pi$ cm³. Cube : $V_2 = 6^3 = 216$ cm³. La maquette est la somme des deux : $V = 216 + \frac{256}{3}\pi$ cm³ $\approx 484{,}1$ cm³.

(b) Non. Léo trouverait environ $25 \times 484{,}1 \approx 12\,102{,}1$ cm³, mais dans un agrandissement de rapport k les volumes sont multipliés par $k^3 = 25^3 = 15\,625$, et non par k. On peut aussi raisonner avec les longueurs réelles : rayon $4 \times 25 = 100$ cm = 1 m et arête $6 \times 25 = 150$ cm = 1,5 m.
Donc $V_{\text{réel}} = 1{,}5^3 + \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = 3{,}375 + \frac{4}{3}\pi$ m³ $\approx 7{,}6$ m³.

Ex. 49 **(suite)**

(c) La boule réelle a pour rayon 1 m. Aire de la sphère : $4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 1^2 = 4\pi$ m². Avec deux couches, on peint 8π m². Il faut donc $\frac{8\pi}{3}$ L $\approx 8{,}4$ L de peinture, soit $8{,}4 \div 2 \approx 4{,}2$ pots. Avec 4 pots, il en manque : on arrondit par excès, il faut acheter 5 pots.

(d) Le socle réel est un cube d'arête 1,5 m. Son volume vaut $1{,}5^3 = 3{,}375$ m³ et sa masse $3{,}375 \times 2{,}4 = 8{,}1$ t. Comme $8{,}1 \text{ t} > 8$ t, la grue ne suffit pas pour poser le socle d'un seul bloc.