1. *Égalité de vecteurs, translation et parallélogramme*

Ex. 1 ★☆☆ **Lire des vecteurs égaux ou opposés sur un quadrillage**

(a) De A à B : 3 carreaux vers la droite, 1 carreau vers le haut.

(b) Non. $\overrightarrow{EF}$ se lit 3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas : même direction et même norme que $\overrightarrow{AB}$, mais sens contraire.
Donc $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

(c) $\overrightarrow{CD}$ (de C à D : 3 à droite, 1 vers le haut) et $\overrightarrow{FE}$ (de F à E : 3 à droite, 1 vers le haut). Attention à l'ordre : c'est $\overrightarrow{FE}$, pas $\overrightarrow{EF}$.

(d) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{EF}$: ils correspondent tous à 3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas.

(e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, et ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Le parallélogramme est donc ABDC
(et pas ABCD).

(f) Il y en a une infinité : depuis chaque point du plan, on peut tracer une flèche de 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

Ex. 2 ★☆☆ **Parallélogramme et ordre des lettres**

(a) On suit le contour à l'envers : $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TU}$.

(b) $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RU}$
(côtés opposés [ST] et [RU] parcourus dans le même sens).

(c) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$ si et seulement si KLNM est un parallélogramme : c'est KLNM, pas KLMN.

(d) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$: en suivant le contour, on obtient le parallélogramme EFGH.

(e) Hugo a tort. Les longueurs AB et BA sont bien égales, mais $\overrightarrow{AB}$ va de A vers B et $\overrightarrow{BA}$ va de B vers A : ils ont même direction et même norme, mais des sens contraires.
Donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: ce sont deux vecteurs opposés.

(f) Un vecteur nul a une norme égale à 0, donc PQ = 0 : P et Q sont confondus.

Ex. 2 (suite)

(g) Ils ont même direction (la droite qui porte les quatre points), même sens (celui de A vers D, car les points sont dans l'ordre A, B, C, D) et même norme (2 cm) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Or ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: ABDC est donc un parallélogramme aplati
(ses quatre sommets sont alignés).

Ex. 3 ★★☆ **Jeu vidéo : image par une translation**

(a) De A à B : $1-(-2) = 3$ unités vers la droite et $3-1 = 2$ vers le haut. C′ est le point tel que $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$: $C'(2+3\,;-1+2)$, soit $C'(5\,;1)$.

(b) $D'(-4+3\,;-3+2)$, soit $D'(-1\,;-1)$.

(c) À rebours : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, donc on part de F et on recule de 3 unités vers la gauche et de 2 vers le bas : $E(0-3\,;4-2)$, soit $E(-3\,;2)$.

(d) C′ est l'image de C, donc $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CC'}$. Or ABC′C est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CC'}$.
Donc ABC′C est un parallélogramme.

(e) Non. Cette translation déplace de 3 vers la droite et de 2 vers le haut ; elle envoie B en $(4\,;5)$. Celle qui transforme B en A est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: c'est une autre translation.

Ex. 4 ★★☆ **Plan d'un parc : vrai ou faux**

(a) Vrai. ABCD est un parallélogramme, et en suivant le contour, [AB] et [DC] se parcourent dans le même sens : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
(4 carreaux vers la droite).

(b) Faux. $\overrightarrow{AD}$ se lit 2 à droite, 3 vers le haut, et $\overrightarrow{CB}$ 2 à gauche, 3 vers le bas : même direction, même norme, mais sens contraires. En fait $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$.

(c) Faux. L'image de C est le point C′ tel que $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$, à 4 carreaux à droite de C ; ce n'est pas D, car $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$. Cette translation transforme D en C.

(d) Vrai. $\overrightarrow{BE}$: 4 carreaux à droite ; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$: 4 carreaux à droite.
Donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$. Or BECD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$.
Donc BECD est un parallélogramme.

Ex. 4 **(suite)**

(e) Faux. $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BE}$ représentent tous les deux $\overrightarrow{AB}$ (4 carreaux à droite). Dans le plan, $\overrightarrow{AB}$ a même une infinité de représentants.

Ex. 5 ★★★ **Drone : démontrer, corriger, translater**

(a) $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E\,;y_F - y_E) : \overrightarrow{EF}(2-(-3)\,;-2-(-1))$, soit $\overrightarrow{EF}(5\,;-1)$. $\overrightarrow{HG}(4-(-1)\,;2-3)$, soit $\overrightarrow{HG}(5\,;-1)$. Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Or ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; avec A = E, B = F, C = H, D = G, on obtient : EFGH est un parallélogramme.

(b) $\overrightarrow{GH}(-1-4\,;3-2)$, soit $\overrightarrow{GH}(-5\,;1)$: ce n'est pas $(5\,;-1)$.
Donc $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{EF}$: même direction, même norme, mais sens contraire. Léa a tort : en suivant le contour E → F → G → H, les côtés opposés se parcourent dans le même sens, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

(c) Le vecteur de la translation est $\overrightarrow{GH}(-5\,;1)$. P vérifie $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{GH}$, donc $x_P = 2+(-5) = -3$ et $y_P = -2+1 = -1$: $P(-3\,;-1)$. On remarque que P = E : en effet $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FE}$, donc l'image de F est E.

(d) $\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$.
$\overrightarrow{EH}(-1-(-3)\,;3-(-1))$, soit $\overrightarrow{EH}(2\,;4)$, donc $\|\overrightarrow{EH}\| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Comme $\sqrt{26} \neq \sqrt{20}$, deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur : c'est faux, EFGH n'est pas un losange.

Ex. 6 ★★★ **Le cavalier sur l'échiquier**

(a) $\overrightarrow{CD}$: de C(1 ; 3) à D(3 ; 4), 2 carreaux à droite et 1 vers le haut, comme $\vec{u}$: $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$. $\overrightarrow{EF}$: de E(6 ; 3) à F(4 ; 2), 2 carreaux à gauche et 1 vers le bas : même direction, même norme, sens contraire, donc $\overrightarrow{EF} = -\vec{u} = \overrightarrow{BA}$. Un vecteur n'est pas attaché à un point : toute flèche de même direction, même sens et même longueur le représente, et $\vec{u}$ a une infinité de représentants.

(b) $\overrightarrow{AE}$: 6 carreaux à droite et 3 vers le haut, soit 3 fois le déplacement de $\vec{u}$. Même direction et même sens, mais pas la même norme : $AE = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5}$ alors que $AB = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. Noa a tort : deux vecteurs égaux ont même direction, même sens ET même norme ; ici la norme diffère, donc $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AE}$.

Ex. 6 **(suite)**

(c) ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (question 1), donc ABDC est un parallélogramme. ABCD n'en est pas un : pour cela, il faudrait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et $\overrightarrow{DC}$ va 2 carreaux à gauche et 1 vers le bas. ABCD est un quadrilatère croisé.

(d) Depuis D(3 ; 4), je reporte $\vec{u}$: 2 carreaux à droite et 1 vers le haut, donc G(5 ; 5). On a $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$ (question 1) et $\overrightarrow{DG} = \vec{u}$, donc $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DG} = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$: D est le milieu de [CG]. Contrôle : $\left(\frac{1+5}{2}\,;\frac{3+5}{2}\right) = (3\,;4)$, ce sont bien les coordonnées de D.

(e) Le coup $\overrightarrow{AB}$ mène de C(1 ; 3) à (3 ; 4), c'est-à-dire en D. Le coup $\overrightarrow{EF}$ (2 à gauche, 1 vers le bas) mène de D(3 ; 4) à (1 ; 3), c'est-à-dire en C. Le cavalier revient à son point de départ : son déplacement total est $\overrightarrow{CC} = \vec{0}$, le vecteur nul, car $\overrightarrow{EF}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.

Ex. 7 ★★★ **Bouées et courant marin**

(a) $\overrightarrow{RS}(-1-(-4)\,;1-3)$, soit $\overrightarrow{RS}(3\,;-2)$. U est le point tel que $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{RS}$, donc $x_T - x_U = 3$ et $y_T - y_U = -2$. On en déduit $x_U = 5-3 = 2$ et $y_U = 4-(-2) = 6$: $U(2\,;6)$.

(b) ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Avec A = R, B = S, C = U, D = T, l'égalité $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$ donne : RSTU est un parallélogramme. En suivant le contour R → S → T → U, les côtés opposés [RS] et [UT] sont parcourus dans le même sens. Mia s'est trompée dans l'ordre des lettres : RSUT est croisé.

(c) Les diagonales de RSTU sont [RT] et [SU]. Milieu de [RT] : $\left(\frac{-4+5}{2}\,;\frac{3+4}{2}\right) = (0{,}5\,;3{,}5)$. Milieu de [SU] : $\left(\frac{-1+2}{2}\,;\frac{1+6}{2}\right) = (0{,}5\,;3{,}5)$. Les deux diagonales ont le même milieu, ce qui confirme que RSTU est un parallélogramme.

(d) W′ est l'image de W par la translation de vecteur $\overrightarrow{RS}$, donc $\overrightarrow{WW'} = \overrightarrow{RS}$: $x_{W'} = 5+3 = 8$ et $y_{W'} = -3+(-2) = -5$, d'où $W'(8\,;-5)$.

(e) Milieu de [RW′] : $\left(\frac{-4+8}{2}\,;\frac{3+(-5)}{2}\right) = (2\,;-1)$. Milieu de [SW] : $\left(\frac{-1+5}{2}\,;\frac{1+(-3)}{2}\right) = (2\,;-1)$. C'est le même milieu, donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{WW'}$ et RSW′W est un parallélogramme. Mais W est sur la droite (RS) et W′ aussi (on part de W et on suit la direction de (RS)) : les quatre points sont alignés. RSW′W est donc un parallélogramme aplati.

2. Somme de vecteurs et relation de Chasles

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : simplifier avec la relation de Chasles**

(a) L'extrémité du premier est l'origine du second : $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$.

(b) Je réordonne : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{TQ}$.

(c) $-\overrightarrow{FH}$ devient $+\overrightarrow{HF}$: $\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{GF}$.

(d) $-\overrightarrow{AB}$ devient $+\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

(e) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FF} = \vec{0}$.

(f) Je réordonne : $\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{JN}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : sommes dans un parallélogramme**

(a) Relation de Chasles : $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GE}$.

(b) Même origine E : règle du parallélogramme. EFGH est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG}$ (la diagonale issue de E, pas un côté).

(c) Même origine F : $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$, donc FEHG est un parallélogramme et $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH}$ (diagonale issue de F).

(d) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$ (côtés opposés du parallélogramme), donc $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$. Attention : ce n'est pas $\overrightarrow{EH}$.

(e) O est le milieu de [EG], donc $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$.

(f) $-\overrightarrow{FO}$ devient $+\overrightarrow{OF}$: $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG}$.

Ex. 10 ★★☆ **Deux cordes tirent une caisse**

(a) Les deux vecteurs ont la même origine O : règle du parallélogramme. Depuis M, je reporte le représentant de $\overrightarrow{ON}$: 4 carreaux vers le haut. On obtient P, et OMPN est un parallélogramme qui a un angle droit en O : c'est un rectangle.

(b) Le triangle OMP est rectangle en M, avec OM = 3 et MP = ON = 4. D'après le théorème de Pythagore : $OP^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, donc $\|\overrightarrow{OP}\| = 5$ carreaux.

(c) Non. La force totale mesure 5 carreaux, pas 7 : la norme d'une somme n'est pas la somme des normes. Ici, $\|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\| = 5 < 3 + 4$.

Ex. 10 (suite)

(d) Les deux forces ont maintenant la même direction et le même sens. Bout à bout : 3 carreaux puis 4 carreaux vers la droite, soit 7 carreaux. La norme de la force totale vaut 7 carreaux. Les normes ne s'ajoutent que dans ce cas.

Ex. 11 ★★☆ **La fontaine du parc**

(a) Les vecteurs ont la même origine G : règle du parallélogramme (GAPB). Depuis A, je reporte le représentant de $\overrightarrow{GB}$: 3 carreaux à droite, 1 vers le bas. P est donc à 3 carreaux sous G.

(b) $\overrightarrow{GP}$: 3 carreaux vers le bas ; $\overrightarrow{GC}$: 3 carreaux vers le haut. Ils ont la même direction (verticale) et la même norme (3 carreaux), mais des sens contraires : ce sont des vecteurs opposés, donc $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{CG}$.

(c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.

(d) Non. Chasles exige que l'extrémité du premier vecteur soit l'origine du second, ce qui n'est pas le cas pour $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$. D'ailleurs $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GP}$ (3 carreaux vers le bas), alors que $\overrightarrow{AB}$ correspond à 6 carreaux à droite et 1 vers le haut. En fait, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$.

(e) J'insère le point G : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$. J'additionne : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$. Or la parenthèse vaut $\vec{0}$ (question précédente), d'où l'égalité.

Ex. 12 ★★★ **Démontrer sans figure**

(a) $-\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{FG}$ et $-\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{HE}$.
Donc l'expression vaut $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE}$. Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$, puis $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EH}$, puis $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$. L'égalité est démontrée.

(b) $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UT}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{US} + \overrightarrow{ST}$. En additionnant : $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UT} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{US} + (\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{ST})$. Or $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TT} = \vec{0}$.
Donc $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{US}$.

Ex. 12 **(suite)**

(c) Non. Pour appliquer la relation de Chasles, il faut que l'extrémité du premier vecteur soit l'origine du second. Ici, $\overrightarrow{KL}$ finit en L mais $\overrightarrow{ML}$ part de M. D'ailleurs, si l'on avait $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}$, on aurait $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{LM}$: un vecteur égal à son opposé est nul, donc M = L. C'est faux dès que M et L sont distincts. L'égalité juste est $\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{KM}$.

(d) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BA}$ (Chasles). $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$ (Chasles). L'expression vaut donc $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}$.

(e) Faux. Le triangle est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore, $AC^2=5^2+12^2=169$, d'où $AC=\sqrt{169}=13$. Mais AB + BC = 5 + 12 = 17, et $17\neq 13$. La relation de Chasles porte sur les vecteurs, pas sur les longueurs : en général, AB + BC ≥ AC.

Ex. 13 ★★★ **Le robot de l'entrepôt**

(a) Attention : ce n'est pas $\overrightarrow{AC}$, car l'extrémité B de $\overrightarrow{AB}$ n'est pas l'origine C de $\overrightarrow{CB}$. ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, et en prenant les opposés $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.
Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$ (relation de Chasles). Le robot part de D et arrive en B. Sur le quadrillage : D + (5 ; 1) donne C, puis C + (−2 ; −3) donne B.

(b) Depuis A, je reporte le représentant de $\overrightarrow{AB}$ (5 carreaux à droite, 1 vers le haut), puis celui de $\overrightarrow{AC}$ (7 à droite, 4 vers le haut) : E est à 12 carreaux à droite et 5 vers le haut de A. Ensuite, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}$ (Chasles) = $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AB}$.
Donc $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$.

(c) ABCD est un parallélogramme, donc DABC aussi. Par la règle du parallélogramme depuis D : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$. De plus, $-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}$.
Donc l'expression vaut $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DO}$ (Chasles).

Ex. 13 **(suite)**

(d) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : O est le milieu de [AC] et de [BD].
Donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont opposés : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. De même, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. La somme vaut donc $\vec{0}$. Sur la figure, O est à 3,5 carreaux à droite et 2 vers le haut de A, aussi bien comme milieu de [AC] que comme milieu de [BD].

Ex. 14 ★★★ **Le bateau et le courant**

(a) Depuis M, je reporte le représentant de $\vec{c}$: 3 carreaux à droite, 4 vers le bas. P est donc à 8 carreaux à droite et 0 vers le haut de O. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\vec{m}+\vec{c}$.

(b) Le quadrillage est orthonormé, donc on applique le théorème de Pythagore. $\|\vec{m}\|=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$. $\|\vec{c}\|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$. $\vec{m}+\vec{c}=\overrightarrow{OP}$, soit 8 carreaux à droite et 0 vers le haut, donc $\|\vec{m}+\vec{c}\|=8$.

(c) Non. $\|\vec{m}\|+\|\vec{c}\|=\sqrt{41}+5\approx 11{,}40$, alors que la vitesse réelle vaut $\|\vec{m}+\vec{c}\|=8$ km/h. La norme d'une somme n'est pas, en général, la somme des normes : il n'y a égalité que si les deux vecteurs ont la même direction et le même sens, ce qui n'est pas le cas ici.

(d) Il faut que $\vec{m'}+\vec{c}=\vec{0}$, donc $\vec{m'}=-\vec{c}$, le vecteur opposé à $\vec{c}$: 3 carreaux vers la gauche et 4 vers le haut. Il a la même direction et la même norme (5 km/h) que $\vec{c}$, mais le sens contraire.

(e) Q est l'origine du représentant de $\vec{c}$ qui a pour extrémité B. Depuis B, je fais le chemin inverse de $\vec{c}$: 3 carreaux à gauche et 4 vers le haut. Q est donc à 1 carreau à gauche et 8 vers le haut de O. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{OB}$, soit $\overrightarrow{OQ}+\vec{c}=\overrightarrow{OB}$. Le vecteur moteur à choisir est donc $\overrightarrow{OQ}$.

3. *Produit d'un vecteur par un réel*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : développer et réduire**

(a) $3\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{v}=3\vec{u}-2\vec{v}$

(b) $2\vec{u}+6\vec{v}-5\vec{u}+5\vec{v}=-3\vec{u}+11\vec{v}$ (attention : $-5\times(-\vec{v})=+5\vec{v}$).

(c) $\frac{6}{3}\vec{u}-\frac{9}{3}\vec{v}+\vec{v}=2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{v}=2\vec{u}-2\vec{v}$

(d) $4\vec{u}-8\vec{v}-4\vec{u}+8\vec{v}=\vec{0}$: on obtient le vecteur nul $\vec{0}$, pas le nombre 0.

(e) $-\vec{u}+4\vec{v}+\vec{u}-3\vec{v}=\vec{v}$

Ex. 15 **(suite)**

(f) $2\vec{u}+2\vec{v}+k\vec{u}=(2+k)\vec{u}+2\vec{v}$. Il faut $2+k=5$, donc $k=3$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : direction, sens et norme de $k\vec{u}$**

(a) Même direction que $\vec{u}$ (horizontale), sens contraire (vers la gauche) car $-2<0$, norme $|-2|\times 6=12$ cm.

(b) Même direction, même sens (vers la droite) car $\frac{1}{3}>0$, norme $\frac{1}{3}\times 6=2$ cm.

(c) $-\frac{1}{2}<0$: même direction que $\vec{u}$ (horizontale), sens contraire (vers la gauche), norme $|-\frac{1}{2}|\times 6=3$ cm. Depuis A, je compte 3 carreaux vers la gauche : la flèche part de A et pointe vers la gauche.

(d) $0\vec{u}=\vec{0}$: c'est le vecteur nul (un vecteur, pas le nombre 0). Sa norme vaut 0.

(e) Non : une norme n'est jamais négative. $\|-\frac{4}{3}\vec{u}\|=|-\frac{4}{3}|\times 6=8$ cm. Le signe $-$ change seulement le sens.

(f) $|k|\times 6=15$, donc $|k|=\frac{15}{6}=2{,}5$: $k=2{,}5$ ou $k=-2{,}5$.

Ex. 17 ★☆☆ **Lire k sur une figure**

(a) $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont de même sens, EH $=5$ et EF $=3$: $k=\frac{5}{3}$.

(b) $\overrightarrow{EG}$ est dirigé vers la gauche (sens contraire de $\overrightarrow{EF}$), EG $=2$: $k=-\frac{2}{3}$.

(c) $\overrightarrow{FG}$ est dirigé vers la gauche, FG $=5$: $k=-\frac{5}{3}$.

(d) $\overrightarrow{GH}$ est dirigé vers la droite (même sens), GH $=7$: $k=\frac{7}{3}$.

(e) Non : $\overrightarrow{FH}$ va vers la droite et $\overrightarrow{FG}$ va vers la gauche. Ils sont de sens contraires, donc $k<0$: $\overrightarrow{FH}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{FG}$.

Ex. 18 ★★☆ **Le trajet d'un drone**

(a) Depuis R, je reporte $-\overrightarrow{RS}$: 3 carreaux à gauche et 1 vers le bas. Puis 2 fois $\overrightarrow{RT}$: 2 carreaux à droite et 6 vers le haut. Au total, M est à 1 carreau à gauche et 5 carreaux au-dessus de R.

(b) $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RM}=-\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RT}=-2\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RT}$.

(c) $\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RT}=-\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}$. Alors $2\overrightarrow{ST}=-2\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RT}=\overrightarrow{SM}$, donc $k=2$.

Ex. 18 **(suite)**

(d) $\overrightarrow{ST}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SM}$. Or I est le milieu de [SM] si et seulement si $\overrightarrow{SI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SM}$.
Donc T est le milieu de [SM]. Vérification sur le quadrillage : de S à T, on fait 2 carreaux à gauche et 2 vers le haut, puis de nouveau 2 à gauche et 2 vers le haut de T à M.

Ex. 19 ★★★ **Un parallélogramme dans le parc**

(a) $\frac{1}{3}>0$, donc $\overrightarrow{RU}$ a la même direction que $\overrightarrow{RS}$ (horizontale) et le même sens (vers la droite). Sa norme vaut $\frac{1}{3}\times 6=2$ carreaux. Depuis R, je compte 2 carreaux vers la droite : U est sur [RS].

(b) $3\overrightarrow{RU}-\overrightarrow{RS}=3\times\frac{1}{3}\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{RS}=0\overrightarrow{RS}=\vec{0}$. Le résultat est le vecteur nul $\vec{0}$, et non le nombre 0 : une somme de vecteurs donne toujours un vecteur.

(c) Relation de Chasles : $\overrightarrow{RV}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SV}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}-\frac{2}{3}\overrightarrow{RS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}$. Depuis R, je fais 2 carreaux à droite puis 1 à droite et 4 vers le haut : V est 3 carreaux à droite et 4 carreaux au-dessus de R, soit 2 carreaux à droite de T.

(d) Relation de Chasles : $\overrightarrow{TV}=\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RV}=-\overrightarrow{RT}+\frac{1}{3}\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RU}$. Or RUVT est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{TV}$. R, U et T ne sont pas alignés, car T n'est pas sur (RS).
Donc RUVT est un parallélogramme (non aplati).

Ex. 20 ★★★ **Le bateau et le courant**

(a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ km. Chloé a tort : $\|-4\vec{u}\|=|-4|\times\|\vec{u}\|=4\sqrt{5}$ km. Une norme n'est jamais négative. Le signe moins indique seulement que $-4\vec{u}$ est de sens contraire à $\vec{u}$.

(b) $\vec{d}=3\vec{u}+3\vec{c}-2\vec{c}=3\vec{u}+\vec{c}$. On a $3\vec{u}(3\times 2\,;3\times 1)$, soit $3\vec{u}(6\,;3)$.
Donc $\vec{d}(6+1\,;3+(-1))$, soit $\vec{d}(7\,;2)$.

(c) $\overrightarrow{PQ}=\vec{d}$, donc $x_Q-1=7$ et $y_Q-0=2$. On trouve $x_Q=8$ et $y_Q=2$. Conclusion : $Q(8\,;2)$.

(d) $\overrightarrow{PR}(-5-1\,;-3-0)$, soit $\overrightarrow{PR}(-6\,;-3)$. Or $-6=-3\times 2$ et $-3=-3\times 1$, donc $\overrightarrow{PR}=-3\vec{u}$ et $k=-3$. Comme $k<0$, $\overrightarrow{PR}$ est de sens contraire à $\vec{u}$. $PR=|-3|\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ km.

Ex. 21 ★★★ **Le personnage du jeu vidéo**

(a) $\overrightarrow{KM}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{KL}$ (vers la gauche et vers le bas), donc $k < 0$. Valeur : $6 = 1{,}5 \times 4$ et $3 = 1{,}5 \times 2$. Donc $\overrightarrow{KM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{KL}$, soit $k = -\frac{3}{2}$.

(b) Vrai. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LK} - \frac{3}{2}\overrightarrow{KL}$. Comme $\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{LK}$, on obtient $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LK} + \frac{3}{2}\overrightarrow{LK} = \frac{5}{2}\overrightarrow{LK}$. Vérification : de L à M, on fait 10 carreaux à gauche et 5 vers le bas, soit $\frac{5}{2}$ fois le trajet de L à K (4 à gauche, 2 vers le bas).

(c) Yanis s'est trompé de signe : $-3 \times \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{KL}\right) = +\overrightarrow{KL}$, et non $-\overrightarrow{KL}$. Correction : $2\overrightarrow{KN} - 2\overrightarrow{KL} - 3\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KL}$.

(d) Relation de Chasles : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KP}$. Or $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{KM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KL}$.
Donc $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KL} + 2\overrightarrow{KN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KL} + 2\overrightarrow{KN}$. Pour placer P depuis K : 2 fois $\overrightarrow{KN}$ donne 2 carreaux à droite et 6 vers le haut. Puis $-\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$ donne 2 carreaux à gauche et 1 vers le bas. Au total, P est 5 carreaux au-dessus de K. Vérification : depuis M, $\overrightarrow{KL} + 2\overrightarrow{KN}$ donne 6 carreaux à droite et 8 vers le haut, ce qui mène au même point P.

4. *Construire un point défini par une égalité vectorielle*

Ex. 22 ★☆☆ **Le robot du quadrillage**

(a) Depuis E, je reporte 2 fois $\overrightarrow{EF}$: $2 \times 3 = 6$ carreaux à droite, $2 \times 1 = 2$ vers le haut. M est à 6 carreaux à droite et 2 au-dessus de E.

(b) $-\overrightarrow{EG}$ a le sens contraire de $\overrightarrow{EG}$: depuis E, 1 carreau à gauche et 3 vers le bas. N est à 1 carreau à gauche et 3 au-dessous de E.

(c) L'origine est F, et non E : depuis F, je reporte $\overrightarrow{EG}$, donc 1 carreau à droite et 3 vers le haut. P est à 1 carreau à droite et 3 au-dessus de F.

(d) Depuis E : $\overrightarrow{EF}$ (3 à droite, 1 vers le haut), puis au bout $-\overrightarrow{EG}$ (1 à gauche, 3 vers le bas). Au total : $3 - 1 = 2$ carreaux à droite et $1 - 3 = -2$, donc 2 vers le bas. T est à 2 carreaux à droite et 2 au-dessous de E.

(e) $-2\overrightarrow{EF}$: sens contraire et deux fois plus long, donc $2 \times 3 = 6$ carreaux à gauche et $2 \times 1 = 2$ vers le bas. R est à 6 carreaux à gauche et 2 au-dessous de G.

Ex. 22 (suite)

(f) $9 = 3 \times 3$ et $3 = 3 \times 1$, et le sens est le même que celui de $\overrightarrow{EF}$: $\overrightarrow{EV} = 3\overrightarrow{EF}$, donc $k = 3$.

Ex. 23 ★★☆ **Des points sur l'écran d'un jeu vidéo**

(a) $\overrightarrow{AB}(2 - (-2) ; 3 - 1)$, soit $\overrightarrow{AB}(4 ; 2)$, donc $\overrightarrow{AM}(2 ; 1)$. $x_M = -2 + 2 = 0$ et $y_M = 1 + 1 = 2$: $M(0 ; 2)$.

(b) $-0{,}5\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-0{,}5 \times 4 ; -0{,}5 \times 2) = (-2 ; -1)$. $x_N = -2 + (-2) = -4$ et $y_N = 1 + (-1) = 0$: $N(-4 ; 0)$.

(c) $\overrightarrow{AC}(1 - (-2) ; -2 - 1)$, soit $(3 ; -3)$, donc $-\overrightarrow{AC}(-3 ; 3)$. L'origine est B : $x_P = 2 + (-3) = -1$ et $y_P = 3 + 3 = 6$: $P(-1 ; 6)$.

(d) $\overrightarrow{AQ}(4 + 3 ; 2 + (-3))$, soit $(7 ; -1)$. $x_Q = -2 + 7 = 5$ et $y_Q = 1 + (-1) = 0$: $Q(5 ; 0)$.

(e) $\overrightarrow{BA}(-4 ; -2)$, donc $\overrightarrow{BR}(-4 + 3 ; -2 + (-3)) = (-1 ; -5)$. $x_R = 2 + (-1) = 1$ et $y_R = 3 + (-5) = -2$: $R(1 ; -2)$. R est confondu avec C. C'est logique : par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Ex. 24 ★★☆ **La fontaine du parc**

(a) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS}$.
Donc $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS}$.
L'égalité s'écrit bien $2\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RT}$.

(b) Son calcul est juste : $2\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{RS}$. Mais sa construction est fausse : en partant de R, il faut reporter $\overrightarrow{RM}$, et non $\overrightarrow{MR}$. Comme $\overrightarrow{RM} = -\overrightarrow{MR}$, Inès place le point dans le sens contraire.

(c) $\overrightarrow{RM} = -\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$. En carreaux : $\frac{1}{2} \times 5 - \frac{1}{2} \times 1 = 2$ à droite et $\frac{1}{2} \times (-1) - \frac{1}{2} \times 3 = -2$, donc 2 vers le bas. Je pars de R : M est à 2 carreaux à droite et 2 au-dessous de R.

(d) $\overrightarrow{MR}$: 2 à gauche, 2 vers le haut, soit $(-2 ; 2)$ en carreaux. $\overrightarrow{MS}$: de M à S, $5 - 2 = 3$ à droite et $-1 - (-2) = 1$ vers le haut, soit $(3 ; 1)$. La somme vaut $(-2 + 3 ; 2 + 1) = (1 ; 3)$: c'est bien $\overrightarrow{RT}$. La fontaine est bien placée.

Ex. 25 ★★☆ **Le vol du drone**

(a) $\overrightarrow{DE}$: 4 carreaux à droite, 2 vers le haut ; $\overrightarrow{DF}$: 2 à droite, 3 vers le haut. Depuis D, je reporte $\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$: 6 à droite, 3 vers le haut (j'arrive en $(3 ; 2)$). Au bout, je reporte $-\overrightarrow{DF}$, de sens contraire : 2 à gauche, 3 vers le bas. J'arrive en M.

Ex. 25 **(suite)**

(b) $\overrightarrow{DE}(1-(-3)\,;1-(-1))$, soit $(4\,;2)$; $\overrightarrow{DF}(-1-(-3)\,;2-(-1))$, soit $(2\,;3)$. $\overrightarrow{DM}(\frac{3}{2}\times 4-2\,;\frac{3}{2}\times 2-3)=(4\,;0)$. $x_M=-3+4=1$ et $y_M=-1+0=-1$: $M(1\,;-1)$. Cela confirme la construction.

(c) $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DM}=-\overrightarrow{DE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}$. Vérification : $\overrightarrow{EM}(1-1\,;-1-1)=(0\,;-2)$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(2-2\,;1-3)=(0\,;-2)$. Les coordonnées sont égales.

(d) $\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}(6\,;3)$, donc $\left\|\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}\right\|=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ cm. $\|-\overrightarrow{DF}\|=\|\overrightarrow{DF}\|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ cm : une norme n'est jamais négative.

Ex. 26 ★★★ **Le bateau au mouillage**

(a) $\overrightarrow{PF}(x_F-x_P\,;y_F-y_P)$, donc $\overrightarrow{PF}(-3-1\,;3-(-1))$, soit $\overrightarrow{PF}(-4\,;4)$. De même, $\overrightarrow{PB}(3-1\,;1-(-1))$, soit $\overrightarrow{PB}(2\,;2)$.
Donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{PF}$ a pour coordonnées $(-2\,;2)$, et $\frac{1}{2}\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PB}$ a pour coordonnées $(-2-2\,;2-2)$, soit $(-4\,;0)$.

(b) $\overrightarrow{PM}(x_M-1\,;y_M-(-1))$. On résout $x_M-1=-4$ et $y_M+1=0$: on trouve $M(-3\,;-1)$. Construction : depuis P, je trace un représentant de $\frac{1}{2}\overrightarrow{PF}$, soit 2 carreaux à gauche et 2 vers le haut. J'arrive au point $(-1\,;1)$. Depuis ce point, je trace un représentant de $-\overrightarrow{PB}$: c'est le sens contraire de $\overrightarrow{PB}$, donc 2 carreaux à gauche et 2 vers le bas. J'arrive bien en $M(-3\,;-1)$.

(c) Avec l'égalité de Lina, $\overrightarrow{M'P}(-4\,;0)$. Or $\overrightarrow{M'P}(1-x_{M'}\,;-1-y_{M'})$. On résout $1-x_{M'}=-4$, ce qui donne $x_{M'}=5$, et $-1-y_{M'}=0$, ce qui donne $y_{M'}=-1$.
Donc $M'(5\,;-1)$. Lina a construit le point en partant du mauvais côté : $\overrightarrow{MP}=-\overrightarrow{PM}$.

(d) D'après l'égalité de Lina, $\overrightarrow{PM'}=-\overrightarrow{M'P}=-\overrightarrow{PM}$, donc $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=\vec{0}$. Or I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Donc P est le milieu de [MM']. Vérification avec les coordonnées : $\overrightarrow{PM'}(5-1\,;-1-(-1))$, soit $(4\,;0)$, qui est bien l'opposé de $\overrightarrow{PM}(-4\,;0)$. Le milieu de [MM'] a pour coordonnées $\left(\frac{-3+5}{2}\,;\frac{-1+(-1)}{2}\right)$, soit $(1\,;-1)$: c'est bien P.

Ex. 27 ★★★ **Les cases de l'échiquier**

(a) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KL}$.
Donc $\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{KL}$ (je développe), soit $3\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{KL}$ (je réduis). L'égalité s'écrit bien $3\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KN}$.

Ex. 27 **(suite)**

(b) $3\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{KN}-2\overrightarrow{KL}$, donc $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{KL}$. Or $\overrightarrow{KM}$ est l'opposé de $\overrightarrow{MK}$: $\overrightarrow{KM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KL}-\frac{1}{3}\overrightarrow{KN}$. Pour construire depuis K, j'utilise $\overrightarrow{KM}$, et non $\overrightarrow{MK}$.

(c) En carreaux : $\frac{2}{3}\times 4-\frac{1}{3}\times 2=\frac{8-2}{3}=2$ à droite, et $\frac{2}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times(-2)=\frac{4+2}{3}=2$ vers le haut. Depuis K, je me déplace de 2 carreaux à droite et 2 vers le haut : c'est M, 2 carreaux à gauche de L sur la même ligne.
Vérification : $\overrightarrow{MK}$ fait 2 carreaux à gauche et 2 vers le bas. $\overrightarrow{ML}$ fait $4-2=2$ à droite et $2-2=0$ vers le haut, donc $2\overrightarrow{ML}$ fait 4 à droite. Somme : $-2+4=2$ à droite et $-2+0=-2$, soit 2 vers le bas. C'est bien $\overrightarrow{KN}$.

(d) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{KN}$.
Donc $\overrightarrow{KP}=2\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KN}$. Deux vecteurs égaux de même origine K ont la même extrémité, donc P est confondu avec N. Inutile de tracer bout à bout !

Ex. 28 ★★★ **Les forces sur un objet**

(a) $\overrightarrow{GH}(3-(-1)\,;-1-2)$, soit $\overrightarrow{GH}(4\,;-3)$.
$\overrightarrow{GJ}(0-(-1)\,;4-2)$, soit $\overrightarrow{GJ}(1\,;2)$.
Donc $\overrightarrow{GR}(4+1\,;-3+2)$, soit $(5\,;-1)$. On résout $x_R-(-1)=5$ et $y_R-2=-1$: $R(4\,;1)$.

(b) GHJR est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{RJ}$. Or $\overrightarrow{RJ}(0-4\,;4-1)$, soit $(-4\,;3)$, qui est différent de $\overrightarrow{GH}(4\,;-3)$: Sami a tort, il s'est trompé dans l'ordre des lettres. En revanche, $\overrightarrow{JR}(4-0\,;1-4)$, soit $(4\,;-3)$, donc $\overrightarrow{JR}=\overrightarrow{GH}$. Or GHRJ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{JR}$. Le parallélogramme est donc GHRJ.

(c) I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$: T est donc le milieu de [GR]. $x_T=\frac{-1+4}{2}=1{,}5$ et $y_T=\frac{2+1}{2}=1{,}5$: $T(1{,}5\,;1{,}5)$. Le milieu de [HJ] a pour coordonnées $\left(\frac{3+0}{2}\,;\frac{-1+4}{2}\right)$, soit $(1{,}5\,;1{,}5)$: c'est T. Les diagonales de GHRJ ont le même milieu.

(d) $2\overrightarrow{GJ}(2\times 1\,;2\times 2)$, soit $(2\,;4)$. Ici H est l'extrémité et S l'origine : $\overrightarrow{SH}(3-x_S\,;-1-y_S)$. On résout $3-x_S=2$, donc $x_S=1$, et $-1-y_S=4$, donc $y_S=-5$: $S(1\,;-5)$.
Piège : calculer H + 2GJ donnerait $(3+2\,;-1+4)=(5\,;3)$. Ce serait le point S' tel que $\overrightarrow{HS'}=2\overrightarrow{GJ}$.

5. Coordonnées d'un vecteur

Ex. 29 ★☆☆ **Lire des coordonnées sur un quadrillage**

(a) De A à B : 3 carreaux vers la droite, 2 vers le haut, donc $\vec{u}(3\,;2)$.

(b) De C à D : 3 carreaux vers la gauche, 1 vers le haut, donc $\vec{v}(-3\,;1)$.

(c) De E à F : aucun déplacement horizontal, 3 carreaux vers le bas, donc $\vec{w}(0\,;-3)$.

(d) De G à H : 4 carreaux vers la gauche, 3 vers le bas, donc $\vec{t}(-4\,;-3)$.

(e) $-\vec{t}$ a la même direction et la même norme que $\vec{t}$, mais le sens contraire : $-\vec{t}(4\,;3)$.

Ex. 30 ★☆☆ **Extrémité moins origine**

(a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-2\\1-(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$.

(b) Ici l'origine est B : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2-(-3)\\-5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$, ce sont les coordonnées de l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.

(c) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1-(-4)\\-6-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

(d) $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-0{,}5-1{,}5\\3{,}5-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5{,}5\end{pmatrix}$.

(e) $x=-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{5}{4}$ et $y=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{4}{6}=-\frac{1}{2}$, donc $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{5}{4}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

(f) $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}-2-0\\7-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$: avec l'origine O seulement, on retrouve les coordonnées de P. Puis $\overrightarrow{PO}\begin{pmatrix}0-(-2)\\0-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$.

Ex. 31 ★★☆ **Le robot livreur**

(a) Tom se trompe : $(5\,;-4)$ sont les coordonnées du déplacement, pas celles d'un point. On a $\overrightarrow{KL}=\vec{u}$, donc $x_L=-2+5=3$ et $y_L=3+(-4)=-1$. Le robot arrive en $L(3\,;-1)$.

(b) $\overrightarrow{QP}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}1-x\\-2-y\end{pmatrix}$. Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées :
$1-x=-3$, donc $x=4$, et $-2-y=-5$, donc $y=3$.
Contrôle : $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}1-4\\-2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$. Le robot est parti de $Q(4\,;3)$.

(c) $\frac{1}{2}\vec{v}\left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{5}{2}\right)$, donc $\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(5-\frac{3}{2}\,;-4-\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}\,;-\frac{13}{2}\right)$. Puis $x_Z=3+\frac{7}{2}=\frac{13}{2}$ et $y_Z=-1-\frac{13}{2}=-\frac{15}{2}$. Le robot arrive en $Z\left(\frac{13}{2}\,;-\frac{15}{2}\right)$.

Ex. 32 ★★☆ **Le parterre du parc**

(a) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2-(-3)\\-1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

(b) Inès se trompe sur l'ordre des lettres : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$ donne un « parallélogramme » EFHG, pas EFGH. La propriété : EFGH est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Je pose $H(x\,;y)$: $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}4-x\\3-y\end{pmatrix}$, donc $4-x=5$, d'où $x=-1$, et $3-y=1$, d'où $y=2$. Donc $H(-1\,;2)$.

(c) $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}-1-(-3)\\2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4-2\\3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. Les deux vecteurs sont égaux, ce qui confirme que EFGH est un parallélogramme.

(d) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$ a pour coordonnées $(5+2\,;1+4)=(7\,;5)$. Donc $x_K=-3+7=4$ et $y_K=-2+5=3$: $K(4\,;3)$, c'est le point G
(règle du parallélogramme).

Ex. 33 ★★★ **La trajectoire du drone**

(a) Extrémité moins origine : $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}1-(-3)\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}4-(-3)\\-2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$.

(b) $2\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$, donc $2\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}8-7\\6-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{RM}(1\,;7)$. Ce sont les coordonnées du déplacement depuis R, pas celles de M : $x_M=-3+1=-2$ et $y_M=-1+7=6$.
Donc $M(-2\,;6)$.

(c) $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix}4{,}5-(-3)\\1{,}5-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RS}+k\overrightarrow{RT}$ a pour coordonnées $(4+7k\,;3-k)$. Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées : $4+7k=7{,}5$ donne $k=0{,}5$, et $3-k=2{,}5$ donne $k=0{,}5$. Les deux équations donnent la même valeur, donc $k=0{,}5$.

(d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Je pose $N(x\,;y)$: $\overrightarrow{NS}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{NS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$ donne deux équations : $1-x=\frac{7}{2}$, donc $x=-\frac{5}{2}$, et $2-y=-\frac{1}{2}$, donc $y=\frac{5}{2}$.
Donc $N\left(-\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$. Contrôle : $1-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{2}$ ✓.

Ex. 34 ★★★ **Le bateau et le courant**

(a) $\vec{m}+\vec{c}\begin{pmatrix}2+1\\3+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Après 1 h : $x=-3+3=0$ et $y=-2+1=-1$. Le bateau est au point $(0\,;-1)$.

(b) En 3 h, le déplacement est $3(\vec{m}+\vec{c})\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$. Position : $x=-3+9=6$ et $y=-2+3=1$. Le bateau est au point $(6\,;1)$.

Ex. 34 (suite)

(c) $\overrightarrow{PL}\begin{pmatrix}5-(-3)\\2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$, donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{PL}(4\,;2)$. Avec ce réglage, $\vec{m}+\vec{c}(5\,;0)$, ce qui fait $(10\,;0)$ en 2 h. Le bateau arrive en $(-3+10\,;-2+0)=(7\,;-2)$, et non en $L(5\,;2)$. Noé a tort : il oublie le courant.

(d) Il faut que $2(\vec{m}+\vec{c})=\overrightarrow{PL}(8\,;4)$, donc $\vec{m}+\vec{c}(4\,;2)$.
Avec $\vec{m}(x\,;y)$: $x+1=4$, donc $x=3$, et $y+(-2)=2$, donc $y=4$.
Donc $\vec{m}(3\,;4)$. Contrôle : $2\times(4\,;2)=(8\,;4)$ ✓.

(e) Il faudrait que $\vec{m}+\vec{c}=\overrightarrow{PL}$. Une égalité de vecteurs donne deux égalités de coordonnées : $a+1=8$, donc $a=7$, et $2a+(-2)=4$, donc $a=3$. Un même a ne peut pas valoir à la fois 7 et 3 : il n'existe aucun réel a qui convient.

Ex. 35 ★★★ Le quatrième coffre

(a) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$. Je pose $D(x\,;y)$: $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x\\-2-y\end{pmatrix}$.
Donc $1-x=5$, soit $x=-4$, et $-2-y=1$, soit $y=-3$.
Donc $D(-4\,;-3)$. Contrôle : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4-(-2)\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-3\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ ✓.

(b) ABEC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$ (attention à l'ordre des lettres : ici ce n'est pas $\overrightarrow{EC}$).
Avec $\overrightarrow{AB}(5\,;1)$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-1\\y_E-(-2)\end{pmatrix}$: $x_E-1=5$, donc $x_E=6$, et $y_E+2=1$, donc $y_E=-1$.
Donc $E(6\,;-1)$.

(c) AFBC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CB}$. $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3-1\\2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
Donc $x_F=-2+2=0$ et $y_F=1+4=5$: $F(0\,;5)$.

(d) $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-2-(-4)\\1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0-(-2)\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AF}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}$.
Donc A est le milieu de $[DF]$.

6. *Norme d'un vecteur*

Ex. 36 ★☆☆ Calculer une norme en valeur exacte

(a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ (et non $\sqrt{-36-64}$: un carré est positif).

(b) $\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+(-6)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$.

Ex. 36 (suite)

(c) $\|\vec{w}\|=\sqrt{0^2+(-7)^2}=\sqrt{49}=7$.

(d) $\|\vec{s}\|=\sqrt{1{,}5^2+2^2}=\sqrt{2{,}25+4}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$.

(e) $\|\vec{t}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(f) $\|\vec{r}\|=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}\approx5{,}83$.

(g) $\overrightarrow{KL}(1-(-1)\,;-4-2)$, soit $\overrightarrow{KL}(2\,;-6)$; $\|\overrightarrow{KL}\|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=\sqrt{4\times10}=2\sqrt{10}$.

Ex. 37 ★★☆ Propriétés de la norme : les réflexes

(a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$.
Puis $\|-4\vec{u}\|=|-4|\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ (une norme n'est jamais négative). Vérification : $-4\vec{u}(-8\,;8)$ et $\sqrt{64+64}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$.

(b) $\|k\vec{u}\|=|k|\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ donc $|k|=5$: $k=5$ ou $k=-5$.

(c) $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$: la racine d'une somme n'est pas la somme. $\|\vec{w}\|=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$.

(d) $\vec{u}+\vec{v}(2+(-1)\,;-2+3)$, soit $(1\,;1)$:
$\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Or $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$, donc $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|=2\sqrt{2}+\sqrt{10}\approx5{,}99$.
Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|<\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$: la norme d'une somme n'est pas la somme des normes.

(e) $\|\vec{v}\|^2=10$ et $3^2=9$. Les deux nombres sont positifs et $10>9$, donc $\|\vec{v}\|>3$.

(f) $\|\vec{m}\|^2=2^2+y^2=4+y^2$ et $\left(\sqrt{53}\right)^2=53$.
Donc $4+y^2=53$, $y^2=49$: $y=7$ ou $y=-7$.

Ex. 38 ★★☆ Trois bases dans un jeu vidéo

(a) $\overrightarrow{RS}(1-(-2)\,;-1-1)$, soit $(3\,;-2)$:
$RS=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$. $\overrightarrow{ST}(4-1\,;1-(-1))$, soit $(3\,;2)$:
$ST=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$. $\overrightarrow{RT}(4-(-2)\,;1-1)$, soit $(6\,;0)$:
$RT=\sqrt{36+0}=6$.

(b) $RS=ST=\sqrt{13}$: le triangle RST est isocèle en S. Il n'est pas équilatéral car $RT=6\neq\sqrt{13}$ ($6^2=36\neq13$).

(c) $[RT]$ est le plus grand côté : $RT^2=36$ et $RS^2+ST^2=13+13=26$. Comme $RS^2+ST^2\neq RT^2$, l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée : RST n'est pas rectangle.
Conclusion : RST est isocèle en S, mais pas rectangle.

(d) $RS+ST+RT=\sqrt{13}+\sqrt{13}+6=2\sqrt{13}+6\approx13{,}2$ (et non $\sqrt{26}+6$: $\sqrt{13}+\sqrt{13}\neq\sqrt{13+13}$).

Ex. 39 ★★☆ **Le drone et sa zone de vol**

(a) $\overrightarrow{CA}(3-(-1)\,;3-1)$, soit $(4\,;2)$: $CA=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$. Le rayon vaut $2\sqrt{5}$ unités, soit environ 447 m.

(b) $\overrightarrow{CD}(-3-(-1)\,;-3-1)$, soit $(-2\,;-4)$: $CD=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Comme $CD=CA$, D est sur le cercle.

(c) $\overrightarrow{CE}(3-(-1)\,;-1{,}5-1)$, soit $(4\,;-2{,}5)$: $CE^2=16+6{,}25=22{,}25$ et $CA^2=20$. Comme $22{,}25>20$, on a $CE>CA$: E est à l'extérieur du cercle.

(d) $\overrightarrow{AD}(-3-3\,;-3-3)$, soit $(-6\,;-6)$: $AD=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}\approx8{,}485$ unités. Le drone parcourt environ 849 m.

(e) Non. $CA=CD=2\sqrt{5}$, mais $AD=6\sqrt{2}$ et $AD^2=72\neq20=CA^2$: le triangle ACD est isocèle en C, pas équilatéral.

Ex. 40 ★★★ **Course d'orientation : l'erreur de Léo**

(a) $\overrightarrow{EF}(x_F-x_E\,;y_F-y_E)=(1-(-3)\,;-4-(-1))$, donc $\overrightarrow{EF}(4\,;-3)$. Léo s'est trompé sur le carré : $(-3)^2=9$ et pas -9. On a donc $EF=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

(b) $\overrightarrow{FG}(4-1\,;0-(-4))$, donc $\overrightarrow{FG}(3\,;4)$: ses coordonnées sont justes. Mais $\sqrt{3^2+4^2}\neq3+4$: on ne peut pas « séparer » une racine carrée sur une somme.
$FG=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$. Léo a tort.

(c) $\overrightarrow{EG}(4-(-3)\,;0-(-1))$, donc $\overrightarrow{EG}(7\,;1)$. $EG=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=5\sqrt{2}\approx7{,}07$.

(d) $EF=FG=5$: le triangle EFG est isocèle en F. Le plus grand côté est $[EG]$: $EG^2=50$ et $EF^2+FG^2=25+25=50$. Comme $EG^2=EF^2+FG^2$, la réciproque du théorème de Pythagore montre que EFG est rectangle en F. Conclusion : EFG est rectangle et isocèle en F.

(e) 7,07 n'est qu'une valeur approchée de $EG=5\sqrt{2}$: son carré ne peut pas valoir exactement 50. Avec la valeur exacte, $EG^2=(5\sqrt{2})^2=25\times2=50$. Pour appliquer la réciproque de Pythagore, il faut utiliser les carrés exacts, jamais des longueurs arrondies.

Ex. 41 ★★★ **Bateau et courant : le capitaine se trompe-t-il ?**

(a) La base est orthonormée, donc $\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$ et $\|\vec{c}\|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

(b) $\vec{v}+\vec{c}\,(4+(-1)\,;-1+4)$, donc $\vec{v}+\vec{c}\,(3\,;3)$. $\|\vec{v}+\vec{c}\|=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}\approx4{,}2$ nœuds.

Ex. 41 (suite)

(c) Faux. $\|\vec{v}\|+\|\vec{c}\|=\sqrt{17}+\sqrt{17}=2\sqrt{17}$. On compare les carrés de ces nombres positifs : $(3\sqrt{2})^2=18$ et $(2\sqrt{17})^2=4\times17=68$. Comme $18<68$, $\|\vec{v}+\vec{c}\|<\|\vec{v}\|+\|\vec{c}\|$: la norme d'une somme n'est pas la somme des normes. On a seulement $\|\vec{v}+\vec{c}\|\leqslant\|\vec{v}\|+\|\vec{c}\|$ (inégalité triangulaire).

(d) $\|-2\vec{c}\|=|-2|\times\|\vec{c}\|=2\sqrt{17}$. Vérification : $-2\vec{c}\,(-2\times(-1)\,;-2\times4)$, donc $-2\vec{c}\,(2\,;-8)$, et $\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times17}=2\sqrt{17}$. On retrouve le même résultat.

(e) Faux. La démonstration utilise le triangle OHM rectangle en H, ce qui demande des axes perpendiculaires, et les longueurs $OH=|x|$ et $HM=|y|$, ce qui demande la même unité sur les deux axes. Le théorème de Pythagore ne s'applique que dans ce cas : la formule $\sqrt{x^2+y^2}$ n'est valable que dans une base orthonormée.

Ex. 42 ★★★ **Le plan du parc et le jet d'eau**

(a) $\overrightarrow{AB}(-1-(-2)\,;4-(-1))$, donc $\overrightarrow{AB}(1\,;5)$ et $AB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$. $\overrightarrow{AC}(3-(-2)\,;1-(-1))$, donc $\overrightarrow{AC}(5\,;2)$ et $AC=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$.
$\overrightarrow{BC}(3-(-1)\,;1-4)$, donc $\overrightarrow{BC}(4\,;-3)$ et $BC=\sqrt{16+9}=5$.

(b) Non. $\sqrt{26}\approx5{,}1$ et $\sqrt{29}\approx5{,}4$ s'arrondissent bien à 5, mais en valeur exacte $AB^2=26$, $AC^2=29$ et $BC^2=25$ sont trois nombres différents. Les trois côtés n'ont donc pas la même longueur : ABC n'est pas équilatéral, ni même isocèle. Sam a tort.

(c) $CB=BC=5$: B est à la distance 5 du centre C, donc B est sur le cercle qui borde le disque. $CA=\sqrt{29}$ et $29>25$, donc $\sqrt{29}>5$: A est à l'extérieur du disque, le banc A n'est pas arrosé.

(d) $\overrightarrow{CP}(6{,}5-3\,;-2{,}5-1)$, donc $\overrightarrow{CP}(3{,}5\,;-3{,}5)$. $CP^2=3{,}5^2+(-3{,}5)^2=12{,}25+12{,}25=24{,}5$. Comme $24{,}5<25$, on a $CP<5$: la poubelle est dans le disque, elle est arrosée
(de justesse !).

(e) Une unité vaut 10 m, donc $AC=10\times\sqrt{29}=10\sqrt{29}$ m $\approx53{,}9$ m.

7. Caractérisation vectorielle du milieu

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : le milieu en vecteurs**

(a) T est le milieu de [RS], donc $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = \vec{0}$.

(b) $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{TS}$: même direction, même sens, même norme. Ce n'est pas $\overrightarrow{TR}$, qui est son opposé.

(c) $\overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$, donc $k = \frac{1}{2}$.

(d) SR = 2ST et les deux vecteurs vont dans le même sens (de S vers R), donc $\overrightarrow{SR} = 2\overrightarrow{ST}$: $k = 2$.

(e) T est le milieu de [RS], donc $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS} = 2\overrightarrow{PT}$.

(f) $\overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$: $6 \div 2 = 3$ et $2 \div 2 = 1$, donc 3 carreaux à droite et 1 vers le haut.

(g) Non. $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ ont la même direction et la même norme, mais ils sont de sens contraires : ils sont opposés, donc $\overrightarrow{TR} = -\overrightarrow{TS}$.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : coordonnées du milieu**

(a) $x = \frac{2+8}{2} = 5$ et $y = \frac{-6+4}{2} = -1$: le milieu est $(5\,;-1)$.

(b) $\overrightarrow{EF}(-7-(-3)\,;-2-5)$, soit $(-4\,;-7)$. I est le milieu de [EF], donc $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$: $\overrightarrow{EI}\left(\frac{-4}{2}\,;\frac{-7}{2}\right)$, soit $(-2\,;-3{,}5)$.

(c) Faux. $x = \frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}{2} = \frac{3}{2}$ mais $y = \frac{-3+\frac{1}{3}}{2} = \frac{-\frac{8}{3}}{2} = -\frac{4}{3}$ (et non $-\frac{1}{3}$, car $-3 + \frac{1}{3} = -\frac{9}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$). Le milieu est $\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{4}{3}\right)$.

(d) $x = \frac{-1{,}4+3}{2} = 0{,}8$ et $y = \frac{0{,}6+(-2{,}2)}{2} = -0{,}8$: le milieu est $(0{,}8\,;-0{,}8)$.

(e) Hugo a calculé des demi-différences, c'est-à-dire les coordonnées de $\frac{1}{2}\overrightarrow{UV}$. Le milieu a pour coordonnées les moyennes : $x = \frac{-2+6}{2} = 2$ et $y = \frac{3+(-5)}{2} = -1$, soit $(2\,;-1)$.

Ex. 45 ★★☆ **Plan d'un parc : la quatrième fontaine**

(a) $x = \frac{-4+5}{2} = 0{,}5$ et $y = \frac{1+(-3)}{2} = -1$: $\Omega(0{,}5\,;-1)$.

(b) Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ont le même milieu. Les diagonales de EFGK sont [EG] et [FK]. Comme EFGK doit être un parallélogramme, Ω est aussi le milieu de [FK].

(c) Ω est le milieu de [FK], donc $x_\Omega = \frac{x_F+x_K}{2}$, d'où $x_K = 2x_\Omega - x_F = 2 \times 0{,}5 - 3 = -2$. De même, $y_K = 2 \times (-1) - 2 = -4$.
Donc $K(-2\,;-4)$.

Ex. 45 (suite)

(d) $\overrightarrow{EF}(3-(-4)\,;2-1)$, soit $(7\,;1)$, et $\overrightarrow{KG}(5-(-2)\,;-3-(-4))$, soit $(7\,;1)$. EFGK est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KG}$: c'est bien le cas, le résultat est juste.

Ex. 46 ★★☆ **Deux forces sur un objet**

(a) Je mets les deux déplacements bout à bout : $0 + 6 = 6$ carreaux à droite et $5 + 1 = 6$ vers le haut.

(b) $\overrightarrow{AB}$ correspond à 6 carreaux à droite et $5 - 1 = 4$ vers le bas. Comme $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, je place I à $6 \div 2 = 3$ carreaux à droite et $4 \div 2 = 2$ vers le bas de A. Depuis M, cela fait 3 à droite et $5 - 2 = 3$ vers le haut : $\overrightarrow{MI}$ correspond à 3 à droite et 3 vers le haut.

(c) Non. I est le milieu de [AB], donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, et non $\overrightarrow{MI}$. Sur le quadrillage, $2\overrightarrow{MI}$ correspond à $2 \times 3 = 6$ et $2 \times 3 = 6$, comme la somme, alors que $\overrightarrow{MI}$ ne correspond qu'à 3 et 3.

(d) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, donc $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. Or I est le milieu de [MN] si et seulement si $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.
Donc I est le milieu de [MN].

Ex. 47 ★★★ **La zone d'un robot tondeuse**

(a) Ω a pour coordonnées $\left(\frac{-3+6}{2}\,;\frac{-2+3}{2}\right)$, soit $\Omega\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Le milieu de [SU] a pour coordonnées $\left(\frac{5+(-2)}{2}\,;\frac{-1+2}{2}\right)$, soit $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$: c'est aussi Ω.

(b) Les diagonales [RT] et [SU] ont le même milieu $\Omega\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Or RSTU est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales [RT] et [SU] ont le même milieu.
Donc RSTU est un parallélogramme.

(c) Non. S est le milieu de [TT′], donc $x_S = \frac{x_T+x_{T'}}{2}$, d'où $x_{T'} = 2x_S - x_T$. Chloé a inversé les rôles de S et de T : elle a calculé l'abscisse du symétrique de S par rapport à T. Le bon calcul : $x_{T'} = 2 \times 5 - 6 = 4$ et $y_{T'} = 2 \times (-1) - 3 = -5$, donc $T'(4\,;-5)$. Vérification : $\frac{6+4}{2} = 5$ et $\frac{3+(-5)}{2} = -1$.

(d) RSTU est un parallélogramme, donc RUTS aussi (mêmes sommets parcourus dans l'autre sens). Or RUTS est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$. S est le milieu de [T′T], donc $\overrightarrow{T'S} = \overrightarrow{ST}$ (attention : $\overrightarrow{ST'} = \overrightarrow{ST}$ serait faux, ces vecteurs sont opposés).
Donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{T'S}$. Contrôle : $\overrightarrow{RU}(-2-(-3)\,;2-(-2))$, soit $(1\,;4)$, et $\overrightarrow{T'S}(5-4\,;-1-(-5))$, soit $(1\,;4)$.

Ex. 48 ★★★ **Le centre caché d'un jeu vidéo**

(a) $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont opposés, pas égaux. O est le milieu des diagonales [EG] et [FH], donc $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OH}=\vec{0}$
(ou encore $\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OH}$).

(b) Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OG}$.
Donc $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MO}+(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG})=2\overrightarrow{MO}$, car O est le milieu de [EG]. De même, O étant le milieu de [FH], $\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MO}+(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OH})=2\overrightarrow{MO}$. En additionnant : $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=4\overrightarrow{MO}$.

(c) Extrémité moins origine, en carreaux : $\overrightarrow{ME}(0-1\,;0-6)$ soit $(-1\,;-6)$; $\overrightarrow{MF}(6-1\,;1-6)$ soit $(5\,;-5)$; $\overrightarrow{MG}(8-1\,;5-6)$ soit $(7\,;-1)$; $\overrightarrow{MH}(2-1\,;4-6)$ soit $(1\,;-2)$. Somme : $(-1+5+7+1\,;-6+(-5)+(-1)+(-2))$, soit $(12\,;-14)$.

(d) $4\overrightarrow{MO}$ a pour coordonnées $(12\,;-14)$, donc $\overrightarrow{MO}\left(\frac{12}{4}\,;\frac{-14}{4}\right)$, soit $(3\,;-3{,}5)$. Par Chasles, $\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MO}$, de coordonnées $(1+3\,;6+(-3{,}5))$, soit $(4\,;2{,}5)$: O est à 4 carreaux à droite et 2,5 carreaux vers le haut de E.

(e) $F(6\,;1)$ et $H(2\,;4)$: le milieu de [FH] a pour coordonnées $\left(\frac{6+2}{2}\,;\frac{1+4}{2}\right)$, soit $(4\,;2{,}5)$. On retrouve bien la position de O, centre du parallélogramme.

Ex. 49 ★★★ **La balise du drone**

(a) $JA=\sqrt{(-4-(-3))^2+(-1-4)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$ et $JB=\sqrt{(2-(-3))^2+(3-4)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$.
Maël a tort : JA = JB en longueurs ne suffit pas.
$\overrightarrow{JA}(-1\,;-5)$ et $\overrightarrow{JB}(5\,;-1)$, donc $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}$ a pour coordonnées $(-1+5\,;-5+(-1))$, soit $(4\,;-6)$: ce n'est pas $\vec{0}$, donc J n'est pas le milieu de [AB]
(J est sur la médiatrice de [AB]).

(b) $I\left(\frac{-4+2}{2}\,;\frac{-1+3}{2}\right)$, soit $I(-1\,;1)$.

(c) $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}$ est la caractérisation du milieu : K est le milieu de [BJ]. $K\left(\frac{2+(-3)}{2}\,;\frac{3+4}{2}\right)$, soit $K(-0{,}5\,;3{,}5)$.

(d) I est le milieu de [JL], donc $x_L=2x_I-x_J=2\times(-1)-(-3)=1$ et $y_L=2\times1-4=-2$.
Donc $L(1\,;-2)$.

Ex. 49 **(suite)**

(e) Les diagonales [AB] et [JL] ont le même milieu I, donc AJBL est un parallélogramme. Ses côtés consécutifs vérifient JA = JB = $\sqrt{26}$: c'est un losange. Enfin $AB^2=(2-(-4))^2+(3-(-1))^2=36+16=52$ et $JA^2+JB^2=26+26=52$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AJB est rectangle en J. Un losange qui a un angle droit est un carré : AJBL est un carré.