Vecteurs, coplanarité – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Vecteurs de l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Coordonnées d'un vecteur : arrivée moins départ, $\overrightarrow{PQ}\,(x_Q - x_P\,;\,y_Q - y_P\,;\,z_Q - z_P)$.
- Milieu : on fait la moyenne des coordonnées, $\dfrac{x_P + x_Q}{2}$, jamais la demi-différence.
- Colinéarité : le même k pour les trois coordonnées ; deux coordonnées ne suffisent pas.
- Coplanarité : deux équations donnent a et b, la troisième décide.
- Trois vecteurs deux à deux non colinéaires peuvent être coplanaires : ce n'est alors pas une base.
- Chasles : $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}$; le signe moins renverse le vecteur.

Exercice 1 – Relation de Chasles dans un cube ★

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ est la face du bas, $EFGH$ celle du haut, avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Écris chaque somme avec un seul vecteur dont les extrémités sont des sommets du cube.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

e) $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}$

f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EH}$

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA}$

h) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{FE}$

Exercice 2 – Coordonnées : vecteurs et milieux ★

L'espace est muni d'un repère. Calcule.

a) $A(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $B(5\,;\,0\,;\,-1)$: coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

b) $M(-3\,;\,4\,;\,0)$ et $N(1\,;\,-2\,;\,5)$: coordonnées de $\overrightarrow{MN}$.

c) $C(4\,;\,-3\,;\,1)$ et $D(-2\,;\,5\,;\,6)$: coordonnées du milieu I de $[CD]$.

d) $\vec{u}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,4\,;\,-1)$: coordonnées de $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

e) $\vec{u}\,(\dfrac{1}{2}\,;\,3\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(-1\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,0)$: coordonnées de $2\vec{u} + 3\vec{v}$.

f) $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(3\,;\,-1\,;\,4)$ et $C(0\,;\,5\,;\,-1)$: coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

g) $E(-1\,;\,-4\,;\,2)$ et $F(3\,;\,0\,;\,-5)$: coordonnées du milieu K de $[EF]$.

h) $B(2\,;\,-3\,;\,1)$ est le milieu de $[AC]$, avec $A(5\,;\,1\,;\,-2)$: coordonnées de C.

Exercice 3 – Colinéaires ? Alignés ? ★

Réponds en cherchant le réel k et en le testant sur les trois coordonnées.

a) $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(-6\,;\,3\,;\,-9)$

b) $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,-4)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,6\,;\,-10)$

c) $\vec{u}\,(0\,;\,4\,;\,-2)$ et $\vec{v}\,(0\,;\,-6\,;\,3)$

d) $\vec{u}\,(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,-4\,;\,8)$

e) $A(1\,;\,2\,;\,0)$, $B(3\,;\,3\,;\,-1)$ et $C(7\,;\,5\,;\,-3)$: ces points sont-ils alignés ?

f) $A(0\,;\,-1\,;\,2)$, $B(2\,;\,1\,;\,3)$ et $C(-4\,;\,-5\,;\,1)$: ces points sont-ils alignés ?

g) $\vec{u}\,(2\,;\,m\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(-4\,;\,6\,;\,2)$: trouve m pour que les vecteurs soient colinéaires.

h) $A(2\,;\,-1\,;\,1)$, $B(4\,;\,0\,;\,-2)$ et $C(a\,;\,b\,;\,4)$: trouve a et b pour que A, B, C soient alignés.

Exercice 4 – Vecteurs coplanaires ou base ? ★★

Les vecteurs sont-ils coplanaires ? S'ils ne le sont pas, ils forment une base de l'espace.

a) $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$, $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$ et $\vec{w}\,(2\,;\,3\,;\,1)$

b) $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$, $\vec{v}\,(1\,;\,0\,;\,3)$ et $\vec{w}\,(0\,;\,1\,;\,4)$

c) $\vec{u}\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $\vec{v}\,(2\,;\,1\,;\,0)$ et $\vec{w}\,(1\,;\,5\,;\,-6)$

d) $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$, $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,3)$ et $\vec{w}\,(2\,;\,m\,;\,4)$: trouve m pour que les vecteurs soient coplanaires.

e) $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,3)$, $\vec{v}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ et $\vec{w}\,(4\,;\,3\,;\,7)$

Exercice 5 – Quatre points coplanaires ★★

Pour quatre points A, B, C, D : ils sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

a) $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(2\,;\,1\,;\,1)$, $C(0\,;\,3\,;\,1)$, $D(4\,;\,-1\,;\,1)$: ces quatre points sont-ils coplanaires ?

b) $A(0\,;\,1\,;\,-1)$, $B(2\,;\,1\,;\,0)$, $C(1\,;\,3\,;\,-1)$, $D(3\,;\,2\,;\,2)$: ces quatre points sont-ils coplanaires ?

c) $A(1\,;\,1\,;\,1)$, $B(3\,;\,0\,;\,1)$, $C(1\,;\,2\,;\,3)$, $D(5\,;\,-2\,;\,-1)$: ces quatre points sont-ils coplanaires ?

d) $A(1\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,1)$, $C(3\,;\,1\,;\,-1)$ et $D(2\,;\,3\,;\,z)$: trouve z pour que D soit dans le plan (ABC).

e) $ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). On prend le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$: les points B, D, G, E sont-ils coplanaires ?

Exercice 6 – Dans le repère d'un cube ★★

$ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). On prend le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$: $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$.

a) Donne les coordonnées de G, puis du centre O de la face $EFGH$.

b) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{EC}$, puis écris $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

c) Montre que les diagonales $[BH]$ et $[AG]$ ont le même milieu.

d) Montre que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

e) Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 7 – Le tétraèdre et ses quatre milieux ★★★

$ABCD$ est un tétraèdre. I, J, K, L sont les milieux de $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

1. Avec la relation de Chasles, montre que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
2. Montre de même que $\overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Que peux-tu dire du quadrilatère $IKJL$?
3. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Donne les coordonnées de I, J, K, L, puis contrôle les questions 1 et 2.
4. Calcule les coordonnées du milieu G de $[IJ]$ et du milieu de $[KL]$. Montre ensuite que A, G et $Q\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ sont alignés.

Exercice 8 – Le cube coupé par un plan ★★★

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ est la face du bas, $EFGH$ celle du haut, avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. On utilise le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[FG]$ et J celui de $[GH]$.

1. Donne les coordonnées de B, D, I et J.
2. Montre que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles. Que peux-tu en déduire pour les points B, D, J, I ?
3. Le point E est-il dans le plan (BDI) ?
4. M est le point de $[AG]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$, avec t réel. Trouve t pour que M soit dans le plan (BDI).

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $A(2\,;\,5\,;\,-1)$ et $B(4\,;\,1\,;\,3)$: $\overrightarrow{AB}\,(2-4\,;\,5-1\,;\,-1-3)$, soit $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;\,4\,;\,-4)$.

b) $\vec{u}\,(2\,;\,4\,;\,-6)$ et $\vec{v}\,(3\,;\,6\,;\,-8)$: $3 = \frac{3}{2} \times 2$ et $6 = \frac{3}{2} \times 4$, donc les vecteurs sont colinéaires.

c) $C(3\,;\,-2\,;\,7)$ et $D(1\,;\,6\,;\,-3)$: le milieu de $[CD]$ est $\left(\frac{1-3}{2}\,;\,\frac{6+2}{2}\,;\,\frac{-3-7}{2}\right) = (-1\,;\,4\,;\,-5)$.

d) Dans le cube : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

e) $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,1)$, $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\vec{w}\,(1\,;\,-1\,;\,0)$ sont deux à deux non colinéaires, donc ils forment une base.

f) $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,0)$, $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$, $\vec{w}\,(2\,;\,3\,;\,5)$: les abscisses donnent $a = 2$, les ordonnées $4 + b = 3$, donc $b = -1$: les vecteurs sont coplanaires.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $A(1\,;\,-2\,;\,4)$ et $B(3\,;\,1\,;\,0)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont :

   A $(-2\,;\,-3\,;\,4)$ **B** $(4\,;\,-1\,;\,4)$ **C** $(2\,;\,3\,;\,-4)$ **D** $(2\,;\,-1\,;\,-4)$

2. $A(-1\,;\,3\,;\,5)$ et $B(5\,;\,-1\,;\,2)$. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :

   A $\left(2\,;\,1\,;\,\frac{7}{2}\right)$ **B** $\left(3\,;\,-2\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ **C** $(4\,;\,2\,;\,7)$ **D** $(6\,;\,-4\,;\,-3)$

3. $ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas ; E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Le vecteur $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AE}$ est égal à :

   A $\overrightarrow{HA}$ **B** $\overrightarrow{AG}$ **C** $\overrightarrow{AF}$ **D** $\overrightarrow{AH}$

4. $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(-4\,;\,m\,;\,-6)$ sont colinéaires pour :

   A $m=-2$ **B** $m=2$ **C** $m=\dfrac{1}{2}$ **D** $m=-\dfrac{1}{2}$

5. $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$, $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\vec{w}\,(3\,;\,-2\,;\,4)$:

   A forment une base de l'espace **B** sont deux à deux colinéaires **C** ne sont pas coplanaires **D** sont coplanaires

6. $A(0\,;\,1\,;\,2)$, $B(1\,;\,3\,;\,1)$ et $C(3\,;\,7\,;\,c)$ sont alignés pour :

   A $c=-1$ **B** $c=5$ **C** $c=-3$ **D** $c=1$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).