Corrigé – Vecteurs, coplanarité

Mathématiques – Terminale spécialité

Vecteurs de l'espace · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Relation de Chasles dans un cube ★

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ est la face du bas, $EFGH$ celle du haut, avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Écris chaque somme avec un seul vecteur dont les extrémités sont des sommets du cube.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
$= \overrightarrow{AF}$ *(relation de Chasles)*

b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}$
$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG}$ *(Chasles avec E)*
$= \overrightarrow{AG}$ *(Chasles avec H)*

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AC}$ *(règle du parallélogramme : $ABCD$ est un carré)*

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ *($\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$: deux arêtes verticales, même sens)*
$= \overrightarrow{AF}$ *(relation de Chasles)*

e) $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CA}$ *($-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$)*
$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}$ *(on change l'ordre de la somme)*
$= \overrightarrow{CG}$ *(relation de Chasles)*

Le résultat est $\overrightarrow{CG}$, pas $\overrightarrow{GC}$.

f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EH}$
$= \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}$ *($-\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{HE}$, et on change l'ordre)*
$= \overrightarrow{HF}$ *(relation de Chasles)*

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA}$
$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA}$ *(Chasles avec B)*
$= \overrightarrow{AA}$ *(Chasles avec G)*
$= \vec{0}$ *(on revient au point de départ)*

h) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{FE}$
$= \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{GH}$ *($\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$: côtés opposés du carré $EFGH$)*
$= \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}$ *(on change l'ordre)*
$= \overrightarrow{GB}$ *(relation de Chasles)*

Exercice 2 – Coordonnées : vecteurs et milieux ★

L'espace est muni d'un repère. Calcule.

a) Arrivée moins départ : $\overrightarrow{AB}\,(5-2\,;\,0-(-1)\,;\,-1-3)$,
soit $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,1\,;\,-4)$

b) Arrivée moins départ : $\overrightarrow{MN}\,(1-(-3)\,;\,-2-4\,;\,5-0)$,
soit $\overrightarrow{MN}\,(4\,;\,-6\,;\,5)$

c) On fait la moyenne des coordonnées : $I\left(\dfrac{4+(-2)}{2}\,;\,\dfrac{-3+5}{2}\,;\,\dfrac{1+6}{2}\right)$,
soit $I(1\,;\,1\,;\,\dfrac{7}{2})$

d) On calcule coordonnée par coordonnée :
$2\vec{u}-3\vec{v}\,(2\times 1-3\times 0\,;\,2\times(-2)-3\times 4\,;\,2\times 3-3\times(-1))$
soit $2\vec{u}-3\vec{v}\,(2\,;\,-16\,;\,9)$

e) $2\vec{u}+3\vec{v}\,(2\times\dfrac{1}{2}+3\times(-1)\,;\,2\times 3+3\times\dfrac{1}{3}\,;\,2\times(-2)+3\times 0)$
soit $2\vec{u}+3\vec{v}\,(-2\,;\,7\,;\,-4)$

$2\times\dfrac{1}{2}=1$ et $3\times\dfrac{1}{3}=1$: les fractions disparaissent.

f) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BC}\,(-3\,;\,6\,;\,-5)$ (arrivée moins départ).
Donc $x_D-1=-3$, $y_D-0=6$ et $z_D-2=-5$,
soit $D(-2\,;\,6\,;\,-3)$

L'ordre des lettres compte : c'est $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, pas $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$.

g) On fait la moyenne des coordonnées : $K\left(\dfrac{-1+3}{2}\,;\,\dfrac{-4+0}{2}\,;\,\dfrac{2+(-5)}{2}\right)$,
soit $K(1\,;\,-2\,;\,-\dfrac{3}{2})$

h) B est le milieu, donc $x_B=\dfrac{x_A+x_C}{2}$, soit $x_C=2x_B-x_A$ (de même pour y et z).
$C(2\times 2-5\,;\,2\times(-3)-1\,;\,2\times 1-(-2))$
soit $C(-1\,;\,-7\,;\,4)$

Exercice 3 – Colinéaires ? Alignés ? ★

Réponds en cherchant le réel k et en le testant sur les trois coordonnées.

a) On cherche k tel que $\vec{v}=k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $-6=k\times 2$, donc $k=-3$.
Les ordonnées : $-3\times(-1)=3$: c'est bien 3.
Les cotes : $-3\times 3=-9$: c'est bien -9.
Le même $k=-3$ convient : $\vec{v}=-3\vec{u}$, les vecteurs sont colinéaires.

b) On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $3 = k \times 1$, donc $k = 3$.
Les ordonnées : $3 \times 2 = 6$: c'est bien 6.
Les cotes : $3 \times (-4) = -12$, et $-12 \neq -10$.
Le même k ne marche pas partout : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les deux premières coordonnées marchent, mais la troisième décide.

c) On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les ordonnées : $-6 = k \times 4$, donc $k = -\dfrac{3}{2}$.
Les abscisses : $-\dfrac{3}{2} \times 0 = 0$: c'est bien 0.
Les cotes : $-\dfrac{3}{2} \times (-2) = 3$: c'est bien 3.
Les abscisses sont nulles toutes les deux ($0 = k \times 0$ pour tout k) : $\vec{v} = -\dfrac{3}{2}\vec{u}$, colinéaires.

d) On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $2 = k \times \dfrac{1}{2}$, donc $k = 4$.
Les ordonnées : $4 \times (-1) = -4$: c'est bien -4.
Les cotes : $4 \times 2 = 8$: c'est bien 8.
$\vec{v} = 4\vec{u}$: les vecteurs sont colinéaires.

e) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(6\,;\,3\,;\,-3)$.
On cherche k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.
Les abscisses : $6 = k \times 2$, donc $k = 3$.
Les ordonnées : $3 \times 1 = 3$: c'est bien 3.
Les cotes : $3 \times (-1) = -3$: c'est bien -3.
Les vecteurs sont colinéaires et ont le point A en commun : A, B, C sont alignés.

f) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,2\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-4\,;\,-4\,;\,-1)$.
On cherche k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.
Les abscisses : $-4 = k \times 2$, donc $k = -2$.
Les ordonnées : $-2 \times 2 = -4$: c'est bien -4.
Les cotes : $-2 \times 1 = -2$, et $-2 \neq -1$.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés.
$k = -2$ *marche pour deux coordonnées, pas pour la cote.*

g) On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
Les abscisses : $-4 = 2k$, donc $k = -2$.
Les cotes : $-2 \times (-1) = 2$: c'est bien la cote de $\vec{v}$.
Les ordonnées : $6 = -2m$, donc $m = -3$.
Pour $m = -3$, $\vec{v} = -2\vec{u}$: les vecteurs sont colinéaires.

h) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,1\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{AC}\,(a-2\,;\,b+1\,;\,3)$.
On cherche k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.
Les cotes : $3 = -3k$, donc $k = -1$.
Les abscisses : $a - 2 = -2$, donc $a = 0$.
Les ordonnées : $b + 1 = -1$, donc $b = -2$.
Avec $C(0\,;\,-2\,;\,4)$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$: les points sont alignés.

Exercice 4 – Vecteurs coplanaires ou base ? ★★

Les vecteurs sont-ils coplanaires ? S'ils ne le sont pas, ils forment une base de l'espace.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

La 1re ligne (abscisses) s'écrit $a = 2$.

La 2e ligne (ordonnées) s'écrit $b = 3$.

On teste la 3e ligne (cotes) : $2 \times 2 - 3 = 1$: c'est bien 1.

Donc $\vec{w} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires (ce n'est pas une base).

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a = 1 \\ a + 3b = 4 \end{cases}$$

La 2e ligne (ordonnées) s'écrit $-a = 1$, donc $a = -1$.

On remplace dans la 1re ligne (abscisses) : $2 \times (-1) + b = 0$, donc $b = 2$.

On teste la 3e ligne (cotes) : $-1 + 3 \times 2 = 5$, et $5 \neq 4$.

Il n'existe pas de tels réels : les vecteurs ne sont pas coplanaires, ils forment une base de l'espace.

c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ -a + b = 5 \\ 2a = -6 \end{cases}$$

La 3e ligne (cotes) s'écrit $2a = -6$, donc $a = -3$.

On remplace dans la 1re ligne (abscisses) : $-3 + 2b = 1$, donc $2b = 4$, donc $b = 2$.

On teste la 2e ligne (ordonnées) : $-(-3) + 2 = 5$: c'est bien 5.

Donc $\vec{w} = -3\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires (ce n'est pas une base).

Pourtant les vecteurs sont deux à deux non colinéaires : cela ne suffit pas pour une base.

d) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (abscisse nulle pour $\vec{v}$ seulement).

On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = m \\ -a + 3b = 4 \end{cases}$$

On résout avec les lignes sans m.

La 1re ligne (abscisses) s'écrit $a = 2$.

On remplace dans la 3e ligne (cotes) : $-2 + 3b = 4$, donc $3b = 6$, donc $b = 2$.

La 2e ligne donne alors $m = 2 \times 2 + 2 = 6$.

Pour $m = 6$, $\vec{w} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$: les vecteurs sont coplanaires.

e) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = 3 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$$

La 1re ligne (abscisses) donne $a = 4 - 2b$.

On remplace dans la 2e ligne (ordonnées) : $2\,(4 - 2b) - b = 3$, donc $8 - 5b = 3$, donc $-5b = -5$, donc $b = 1$.

Puis $a = 2$ (on remplace b par 1).

On teste la 3e ligne (cotes) : $3 \times 2 + 1 = 7$: c'est bien 7.

Donc $\vec{w} = 2\,\vec{u} + \vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires (ce n'est pas une base).

Exercice 5 – Quatre points coplanaires ★★

Pour quatre points A, B, C, D : ils sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

a) $\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$, $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;\,3\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AD}\,(3\,;\,-1\,;\,-1)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + 3b = -1 \\ -a - b = -1 \end{cases}$$

La 1re ligne (abscisses) donne $a = b + 3$.

On remplace dans la 2e ligne (ordonnées) : $(b + 3) + 3b = -1$, donc $4b + 3 = -1$, donc $4b = -4$, donc $b = -1$.

Puis $a = 2$ (on remplace b par -1).

On teste la 3e ligne (cotes) : $-2 - (-1) = -1$: c'est bien -1.

$\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$: les vecteurs sont coplanaires, donc les points A, B, C, D sont coplanaires.

b) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,0\,;\,1)$, $\overrightarrow{AC}\,(1\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AD}\,(3\,;\,1\,;\,3)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 2b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

La 2e ligne (ordonnées) s'écrit $2b = 1$, donc $b = \dfrac{1}{2}$.

On remplace dans la 1re ligne (abscisses) : $2a + \dfrac{1}{2} = 3$, donc $2a = \dfrac{5}{2}$, donc $a = \dfrac{5}{4}$.

On teste la 3e ligne (cotes) : elle demande $a = 3$, or $a = \dfrac{5}{4}$, et $\dfrac{5}{4} \neq 3$.

Les vecteurs ne sont pas coplanaires : D n'est pas dans le plan (ABC), les quatre points ne sont pas coplanaires.

c) $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-1\,;\,0)$, $\overrightarrow{AC}\,(0\,;\,1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AD}\,(4\,;\,-3\,;\,-2)$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$:
$\begin{cases} 2a = 4 \\ -a + b = -3 \\ 2b = -2 \end{cases}$
La 1re ligne (abscisses) s'écrit $2a = 4$, donc $a = 2$.
On remplace dans la 2e ligne (ordonnées) : $-2 + b = -3$, donc $b = -1$.
On teste la 3e ligne (cotes) : $2 \times (-1) = -2$: c'est bien -2.
$\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$: les vecteurs sont coplanaires, donc les points A, B, C, D sont coplanaires.

d) $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;\,2\,;\,1)$, $\overrightarrow{AC}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ (non colinéaires) et $\overrightarrow{AD}\,(1\,;\,3\,;\,z)$.
On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$:
$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 2a + b = 3 \\ a - b = z \end{cases}$
La 1re ligne (abscisses) donne $a = 2b - 1$.
On remplace dans la 2e ligne (ordonnées) : $2\,(2b - 1) + b = 3$, donc $5b - 2 = 3$, donc $5b = 5$, donc $b = 1$.
Puis $a = 1$ (on remplace b par 1).
La 3e ligne donne $z = 1 - 1 = 0$.
Pour $z = 0$, le point $D(2\,;\,3\,;\,0)$ est dans le plan (ABC).

e) Dans ce repère, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$ et $E(0\,;\,0\,;\,1)$.
$\overrightarrow{BD}\,(-1\,;\,1\,;\,0)$, $\overrightarrow{BG}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BE}\,(-1\,;\,0\,;\,1)$.
$\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
On cherche a et b tels que $\overrightarrow{BE} = a\,\overrightarrow{BD} + b\,\overrightarrow{BG}$:
$\begin{cases} -a = -1 \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$
La 1re ligne (abscisses) s'écrit $-a = -1$, donc $a = 1$.
On remplace dans la 2e ligne (ordonnées) : $1 + b = 0$, donc $b = -1$.
On teste la 3e ligne (cotes) : elle demande $b = 1$, or $b = -1$, et $-1 \neq 1$.
Les vecteurs ne sont pas coplanaires : E n'est pas dans le plan (BDG), les quatre points ne sont pas coplanaires.

Exercice 6 – Dans le repère d'un cube ★★

$ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). On prend le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$.

a) Pour aller de A à G : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $G(1\,;\,1\,;\,1)$.
O est le milieu de la diagonale $[EG]$, avec $E(0\,;\,0\,;\,1)$:
$O\left(\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+1}{2}\right)$, soit $O(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1)$.

b) $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $C(1\,;\,1\,;\,0)$: $\overrightarrow{EC}\,(1-0\,;\,1-0\,;\,0-1)$, soit $\overrightarrow{EC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$.
Les coordonnées sont les coefficients sur la base : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

c) $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$: le milieu de $[BH]$ est $\left(\dfrac{1+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\right)$, soit $(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2})$.
$A(0\,;\,0\,;\,0)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$: le milieu de $[AG]$ est aussi $(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2})$.
Les deux diagonales se coupent en leur milieu, le centre du cube.

d) $\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,0\,;\,0)$, $\overrightarrow{AH}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AG}\,(1\,;\,1\,;\,1)$.
On voit que $(1\,;\,1\,;\,1) = (1\,;\,0\,;\,0) + (0\,;\,1\,;\,1)$:
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$: les trois vecteurs sont coplanaires (ils sont dans le plan $(ABGH)$).

e) $\overrightarrow{AF}\,(1\,;\,0\,;\,1)$, $\overrightarrow{AH}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\,;\,1\,;\,0)$; $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires.
On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AC} = a\,\overrightarrow{AF} + b\,\overrightarrow{AH}$:
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$
La 1re ligne (abscisses) s'écrit $a = 1$.
La 2e ligne (ordonnées) s'écrit $b = 1$.
On teste la 3e ligne (cotes) : $1 + 1 = 2$, et $2 \neq 0$.
Pas de solution : les vecteurs ne sont pas coplanaires, ils forment une base de l'espace.

Exercice 7 – Le tétraèdre et ses quatre milieux ★★★

1. On passe par A :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} \quad \textit{(Chasles)} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \textit{(I milieu de $[AB]$, K milieu de $[AC]$)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \textit{(Chasles)}\end{aligned}$$

2. On passe par D :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{LJ} &= \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DJ} \quad \textit{(Chasles)} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \quad \textit{(L milieu de $[BD]$, J milieu de $[CD]$)} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \textit{(Chasles)}\end{aligned}$$

   Donc $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ}$: le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme (ses quatre points sont donc coplanaires).

3. $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(0\,;\,1\,;\,0)$ et $D(0\,;\,0\,;\,1)$.
   Avec les milieux :
   $I(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0)$, $J(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2})$, $K(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0)$, $L(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2})$.
   $\overrightarrow{IK}\,(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0)$, $\overrightarrow{LJ}\,(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-1\,;\,1\,;\,0)$: on a bien $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

4. Milieu de $[IJ]$: $G\left(\dfrac{\frac{1}{2}+0}{2}\,;\,\dfrac{0+\frac{1}{2}}{2}\,;\,\dfrac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)$, soit $G(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4})$.
   Milieu de $[KL]$: on trouve aussi $(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4})$: les diagonales du parallélogramme $IKJL$ se coupent en G.
   $\overrightarrow{AG}\,(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4})$ et $\overrightarrow{AQ}\,(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3})$: $\dfrac{1}{4} = k \times \dfrac{1}{3}$ donne $k = \dfrac{3}{4}$, et c'est le même k pour les trois coordonnées.
   $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AQ}$: A, G, Q sont alignés (Q est le centre de gravité du triangle BCD).

Exercice 8 – Le cube coupé par un plan ★★★

1. $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $D(0\,;\,1\,;\,0)$ se lisent sur les arêtes issues de A.
   $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$, donc $I(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1)$ (milieu).
   $G(1\,;\,1\,;\,1)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$, donc $J(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1)$.

2. $\overrightarrow{IJ}\,(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BD}\,(-1\,;\,1\,;\,0)$.
   Les trois coordonnées donnent le même k : $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
   Les vecteurs sont colinéaires : (IJ) et (BD) sont parallèles.
   Deux droites parallèles sont dans un même plan : B, D, J, I sont coplanaires ($BDJI$ est un trapèze).

3. $\overrightarrow{BD}\,(-1\,;\,1\,;\,0)$, $\overrightarrow{BI}\,(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1)$ (non colinéaires) et $\overrightarrow{BE}\,(-1\,;\,0\,;\,1)$.
   On cherche a et b tels que $\overrightarrow{BE} = a\,\overrightarrow{BD} + b\,\overrightarrow{BI}$:
   $$\begin{cases} -a = -1 \\ a + \dfrac{1}{2}b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
   La 1re ligne (abscisses) s'écrit $-a = -1$, donc $a = 1$.
   On remplace dans la 2e ligne (ordonnées) : $1 + \dfrac{1}{2}b = 0$, donc $\dfrac{1}{2}b = -1$, donc $b = -2$.
   On teste la 3e ligne (cotes) : elle demande $b = 1$, or $b = -2$, et $-2 \neq 1$.
   Pas de solution : E n'est pas dans le plan (BDI).

4. $\overrightarrow{AG}\,(1\,;\,1\,;\,1)$, donc $M(t\,;\,t\,;\,t)$ et $\overrightarrow{BM}\,(t-1\,;\,t\,;\,t)$.
   M est dans le plan si et seulement s'il existe a et b tels que $\overrightarrow{BM} = a\,\overrightarrow{BD} + b\,\overrightarrow{BI}$:
   $$\begin{cases} t - 1 = -a \\ t = a + \dfrac{1}{2}b \\ t = b \end{cases}$$
   La 1re ligne donne $a = 1 - t$ et la 3e donne $b = t$.
   On remplace dans la 2e : $t = 1 - t + \dfrac{1}{2}t$, donc $\dfrac{3}{2}t = 1$, donc $t = \dfrac{2}{3}$.
   Le point $M\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$ est le point où la diagonale $[AG]$ traverse le plan (BDI).

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *L'élève a fait départ moins arrivée : c'est arrivée moins départ.*

$\overrightarrow{AB}\,(4-2\,;\,1-5\,;\,3-(-1))$

soit $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-4\,;\,4)$

b) *La cote n'a pas été testée.*

$\dfrac{3}{2} \times (-6) = -9$, et $-9 \neq -8$.

Le même k ne marche pas pour les trois coordonnées : les vecteurs ne sont pas colinéaires.

c) *Pour un milieu, on additionne les coordonnées (moyenne) : on ne les soustrait pas.*

$\left(\dfrac{3+1}{2}\,;\,\dfrac{-2+6}{2}\,;\,\dfrac{7+(-3)}{2}\right)$, soit le milieu $(2\,;\,2\,;\,2)$.

d) *Soustraire $\overrightarrow{AD}$, c'est ajouter $\overrightarrow{DA}$: le résultat va de D vers B.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

e) *Deux à deux non colinéaires ne suffit pas : il faut qu'ils ne soient pas coplanaires.*

$(1\,;\,0\,;\,1) - (0\,;\,1\,;\,1) = (1\,;\,-1\,;\,0)$, donc $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.

Les trois vecteurs sont coplanaires : ils ne forment pas une base.

f) *Deux équations donnent a et b : c'est la troisième qui décide, et elle n'a pas été testée.*

La 1re ligne (abscisses) s'écrit $a = 2$.

On remplace dans la 2e ligne (ordonnées) : $2 \times 2 + b = 3$, donc $b = -1$.

On teste la 3e ligne (cotes) : elle demande $b = 5$, or $b = -1$, et $-1 \neq 5$.

Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $A(1\,;\,-2\,;\,4)$ et $B(3\,;\,1\,;\,0)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont :

Réponse C : $(2\,;\,3\,;\,-4)$

Arrivée moins départ : $(3-1\,;\,1-(-2)\,;\,0-4) = (2\,;\,3\,;\,-4)$.

2. $A(-1\,;\,3\,;\,5)$ et $B(5\,;\,-1\,;\,2)$. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :

Réponse A : $\left(2\,;\,1\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$

On fait la moyenne : $\left(\dfrac{-1+5}{2}\,;\,\dfrac{3-1}{2}\,;\,\dfrac{5+2}{2}\right)$.

3. $ABCDEFGH$ est un cube ($ABCD$ en bas ; E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Le vecteur $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AE}$ est égal à :

Réponse D : $\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ (côtés opposés du carré $EFGH$), donc la somme vaut $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH}$ (Chasles).

4. $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{v}\,(-4\,;\,m\,;\,-6)$ sont colinéaires pour :

Réponse B : $m = 2$

Abscisses : $-4 = -2 \times 2$, donc $k = -2$ (les cotes le confirment). Ordonnées : $m = -2 \times (-1) = 2$.

5. $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$, $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\vec{w}\,(3\,;\,-2\,;\,4)$:

Réponse D : sont coplanaires

$\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$: la cote donne $3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$, vérifiée.

6. $A(0\,;\,1\,;\,2)$, $B(1\,;\,3\,;\,1)$ et $C(3\,;\,7\,;\,c)$ sont alignés pour :

Réponse A : $c = -1$

$\overrightarrow{AB}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(3\,;\,6\,;\,c-2)$: $k = 3$, donc $c - 2 = -3$ et $c = -1$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).