Corrigé – Vecteurs : égalité, somme et relation de Chasles

Mathématiques – Seconde

Vecteurs : opérations et coordonnées · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Égalité, translation et somme sur un quadrillage ★

Complète avec une lettre de la figure ci-contre.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: 3 vers la droite et 1 vers le haut (en carreaux).

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: 3 vers le haut (en carreaux).

c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$: l'image est F.

d) Règle du parallélogramme $(ABDC)$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

e) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$: 3 vers le bas (en carreaux).

f) $-\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA}$.

g) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.

h) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$: l'image est G.

Exercice 2 – Parallélogramme : l'ordre des lettres ★

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Complète ou réponds (fais un croquis).

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: côtés opposés, même sens.

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$: c'est l'opposé de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

d) O est le milieu de $[AC]$: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

e) Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

f) Faux : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{CB}$ est son opposé.

g) $EFGH$: on lit $E \to F$, puis $H \to G$ dans le même sens, donc E, F, G, H dans l'ordre.

h) $MNQP$ (et non $MNPQ$) : après N vient Q, puis P.

Exercice 3 – Relation de Chasles ★

Écris sous la forme d'un seul vecteur.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{AC}$ (Chasles en B)

b) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{CD}$ (Chasles en A)

c) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$
$= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$ (Chasles en N)
$= \overrightarrow{MQ}$ (Chasles en P)

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{AA}$ (Chasles en B)
$= \vec{0}$

e) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (on change l'ordre)
$= \overrightarrow{AC}$ (Chasles en B)

f) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ($-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$)
$= \overrightarrow{AB}$ (Chasles en C)

g) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG}$
$= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GE}$ ($-\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{GE}$)
$= \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EF}$ (on change l'ordre)
$= \overrightarrow{GF}$ (Chasles en E)

h) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$ ($-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ et $-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$)
$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ (on change l'ordre)
$= \overrightarrow{CA}$ (Chasles en B)

i) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ ($-\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO}$)
$= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$ (on change l'ordre)
$= \overrightarrow{BA}$ (Chasles en O)

j) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ (on change l'ordre)
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$ (Chasles en D)
$= \overrightarrow{BB}$ (Chasles en A)
$= \vec{0}$

Exercice 4 – Simplifier une somme ★★

Écris sous la forme d'un seul vecteur (ou du vecteur nul). Commence par retourner les vecteurs précédés d'un

signe moins.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ $(-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$ et $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA})$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ (Chasles en B)
$= \overrightarrow{AA}$ (Chasles en C)
$= \vec{0}$

b) $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ $(-\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EF})$
$= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG}$ (Chasles en E)
$= \overrightarrow{DG}$ (Chasles en F)

c) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA}$ $(-\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM}$ et $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA})$
$= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}$ (on change l'ordre)
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$ (Chasles en M)
$= 2\overrightarrow{BA}$ (on ajoute)

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ (on change l'ordre)
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ (Chasles en B)
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ (Chasles en C)
$= \overrightarrow{AE}$ (Chasles en D)

e) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ $(2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA})$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ (Chasles en B)
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA}$ (Chasles en C)
$= \overrightarrow{AB}$ $(\overrightarrow{AA} = \vec{0})$

f) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{ST}$
$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{ST}$ $(-\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QR}$ et $-\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RP})$
$= \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{ST}$ (Chasles en Q)
$= \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{ST}$ (Chasles en R)
$= \overrightarrow{ST}$ $(\overrightarrow{PP} = \vec{0})$

Exercice 5 – Produit par un réel ★★

Développe, puis réduis.

a) $3\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) - 4\vec{v}$
$= 3\vec{u} + 6\vec{v} - 4\vec{v}$ (on développe)
$= 3\vec{u} + 2\vec{v}$ (on réduit)

b) $-2(\vec{u}-\vec{v})+3\vec{u}$
$=-2\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{u}$ (on développe : $-2\times(-\vec{v})=2\vec{v}$)
$=\vec{u}+2\vec{v}$ (on réduit)

c) $\frac{1}{2}(4\vec{u}-6\vec{v})-(\vec{u}-3\vec{v})$
$=2\vec{u}-3\vec{v}-\vec{u}+3\vec{v}$ (on développe ; le signe $-$ change les signes)
$=\vec{u}$ (on réduit)

d) $5\vec{u}-2(3\vec{u}-\vec{v})+\vec{w}$
$=5\vec{u}-6\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ (on développe)
$=-\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ (on réduit)

e) $2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-3\overrightarrow{AC}$
$=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}$ (Chasles en B)
$=-\overrightarrow{AC}$ (on réduit)
$=\overrightarrow{CA}$ ($-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$)

f) $4\left(\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}\right)-2(2\vec{u}-\vec{v})$
$=4\vec{u}-2\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}$ (on développe)
$=\vec{0}$ (on réduit)

Exercice 6 – Caractérisation du milieu ★★

I est le milieu de $[AB]$ et M est un point quelconque. Complète par un nombre ou par un vecteur.

a) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: même sens, moitié de la longueur.

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ (Chasles en I)
I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IB}$.

c) $\overrightarrow{BI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: sens contraire de $\overrightarrow{AB}$.

d) $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont la même longueur et des sens contraires : ils sont opposés, $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$.
Donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

e) $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$: *opposés, pas égaux.*

f) On passe par I (Chasles) dans les deux vecteurs :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$
$=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$
$=2\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$
$=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}$ (milieu)
$=2\overrightarrow{MI}$

Exercice 7 – Démontrer une égalité vectorielle ★★★

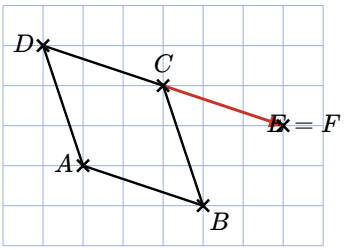
1. On part du membre de gauche et on fait apparaître $\overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
   $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$ (Chasles en D dans $\overrightarrow{AB}$)
   $= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$ (on change l'ordre)
   $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (Chasles en D)
   On obtient le membre de droite : l'égalité est vraie pour tous points A, B, C, D.

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   $= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ (Chasles en I)
   $= 2\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$ (on regroupe)
   $= 2\overrightarrow{AI} + \vec{0}$
   $= 2\overrightarrow{AI}$
   Car I est le milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont opposés, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

3. $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (côtés opposés, même sens).
   Par définition de M : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM}$.
   Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CM}$.
   On lit $A \to D$ et $C \to M$ dans le même sens : $ADMC$ est un parallélogramme.

4. $\overrightarrow{BD}$
   $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ (Chasles en A)
   $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (définition de D)
   $= \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AC}$ (Chasles en A)
   $= \overrightarrow{AC}$
   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: on lit $A \to C$ et $B \to D$ dans le même sens, donc $ACDB$, c'est-à-dire $ABDC$, est un parallélogramme (*et non* $ABCD$).

Exercice 8 – Construire sur un quadrillage ★★★



1. $ABCD$ parallélogramme $\iff$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: depuis A, 1 vers la gauche et 3 vers le haut (en carreaux).

2. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$: depuis C, 3 vers la droite et 1 vers le bas (en carreaux).

3. Sur la figure, F et E sont confondus.
   Justification :
   $\overrightarrow{AE}$
   $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ (Chasles en C)
   $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$, question 2)
   Donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$: E et F sont le même point.

4. $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
   E est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.
   Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$: même longueur, même direction, même sens.
   D, C, E sont alignés et $DC = CE$: C est le milieu de $[DE]$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *Les côtés opposés se parcourent dans le même sens.*
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) *Chasles exige que F soit l'origine du second vecteur.*
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GF}$ ne se simplifie pas tel quel ; en revanche $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$.

c) *$-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, puis on met $\overrightarrow{CA}$ en premier.*
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

d) *On ajoute $\overrightarrow{AC}$, pas $\overrightarrow{CA}$: la boucle ne se ferme pas.*
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$.

e) *Ils ont la même longueur mais des sens contraires.*
$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BI}$.

f) *Le 2 multiplie aussi $-3\vec{v}$.*
$2\left(\vec{u} - 3\vec{v}\right) = 2\vec{u} - 6\vec{v}$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $ABCD$ est un parallélogramme. Alors $\overrightarrow{DA}$ est égal à :

   Réponse C : $\overrightarrow{CB}$
   $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (côtés opposés, même sens), donc leurs opposés sont égaux : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$ est égal à :

   Réponse A : $\overrightarrow{AD}$
   $-\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD}$, donc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ est égal à :

Réponse D : $\overrightarrow{CB}$
On commence par $\overrightarrow{CA}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

4. I est le milieu de $[AB]$. Laquelle de ces égalités est vraie ?

Réponse B : $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA}$
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}$, donc $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA}$.

5. $3\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) - \left(\vec{u} - 4\vec{v}\right)$ est égal à :

Réponse D : $2\vec{u} - 2\vec{v}$
$3\vec{u} - 6\vec{v} - \vec{u} + 4\vec{v} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$: le signe moins change les deux signes de la parenthèse.

6. D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Alors :

Réponse A : $ABCD$ est un parallélogramme
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: $A \to D$ et $B \to C$ dans le même sens, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).