Corrigé – Vecteur normal et équation de droite

Mathématiques – Première spécialité

Géométrie repérée · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Vecteur normal, vecteur directeur ★

Le repère est orthonormé. Donne un vecteur normal $\vec{n}$ et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.

a) Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(2\,;\,-3)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(3\,;\,2)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=2\times 3+(-3)\times 2=0$.

b) Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(-1\,;\,4)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(-4\,;\,-1)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=-1\times(-4)+4\times(-1)=0$.

c) On passe tout à gauche : $2x-y-1=0$.
Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(2\,;\,-1)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(1\,;\,2)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=2\times 1+(-1)\times 2=0$.

d) On écrit $x-4=0$, c'est-à-dire $1x+0y-4=0$: la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(1\,;\,0)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(0\,;\,1)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=1\times 0+0\times 1=0$.

e) On écrit $0x+1y+3=0$: la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(0\,;\,1)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(-1\,;\,0)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=0\times(-1)+1\times 0=0$.

f) Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(5\,;\,1)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(-1\,;\,5)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=5\times(-1)+1\times 5=0$.

g) On multiplie par 6 pour avoir des coefficients entiers : $3x+4y-6=0$. (Le vecteur $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\right)$ est aussi normal.)
Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(3\,;\,4)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(-4\,;\,3)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=3\times(-4)+4\times 3=0$.

h) On passe tout à gauche : $3x-7y=0$.
Pour $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;\,b)=(3\,;\,-7)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;\,a)=(7\,;\,3)$ est directeur.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=3\times 7+(-7)\times 3=0$.

Exercice 2 – Droite passant par un point, de vecteur normal donné ★

Le repère est orthonormé. Écris une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$,

avec des coefficients entiers sans facteur commun.

a) $M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2(x-1) - 3(y+4) = 0.$

$$\begin{aligned}2(x-1) - 3(y+4) &= 2x - 2 - 3y - 12\\ &= 2x - 3y - 14\end{aligned}$$

Une équation est $2x - 3y - 14 = 0$.
Contrôle avec $A : 2 \times 1 + (-3) \times (-4) + (-14) = 0$.

b) $M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 4(x+2) + (y-5) = 0.$

$$\begin{aligned}4(x+2) + (y-5) &= 4x + 8 + y - 5\\ &= 4x + y + 3\end{aligned}$$

Une équation est $4x + y + 3 = 0$.
Contrôle avec $A : 4 \times (-2) + 1 \times 5 + 3 = 0$.
Avec $x_A = -2$ *:* $x - (-2) = x + 2$.

c) $M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff -(x-3) + 5y = 0.$

$$\begin{aligned}-(x-3) + 5y &= -x + 3 + 5y\\ &= -x + 5y + 3\end{aligned}$$

Une équation est $-x + 5y + 3 = 0$.
Contrôle avec $A : (-1) \times 3 + 5 \times 0 + 3 = 0$.
On peut aussi l'écrire $x - 5y - 3 = 0$ (on multiplie par -1).

d) $M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 3(y+2) = 0.$

$$\begin{aligned}3(y+2) &= 3y + 6\end{aligned}$$

On divise par 3 : $y + 2 = 0$.
Une équation est $y + 2 = 0$.
Contrôle avec $A : 0 \times 0 + 1 \times (-2) + 2 = 0$.
C'est une droite parallèle à l'axe des abscisses : $y = -2$.

e) $M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 6(x+1) - 4(y+1) = 0.$

$$\begin{aligned}6(x+1) - 4(y+1) &= 6x + 6 - 4y - 4\\ &= 6x - 4y + 2\end{aligned}$$

On divise par 2 : $3x - 2y + 1 = 0$.
Une équation est $3x - 2y + 1 = 0$.
Contrôle avec $A : 3 \times (-1) + (-2) \times (-1) + 1 = 0$.

f) $M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) - (y - 3) = 0.$

$$\begin{aligned}2\left(x - \frac{1}{2}\right) - (y - 3) &= 2x - 1 - y + 3\\ &= 2x - y + 2\end{aligned}$$

Une équation est $2x - y + 2 = 0$.

Contrôle avec $A : 2 \times \dfrac{1}{2} + (-1) \times 3 + 2 = 0$.

g) $M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 5\,(x - 4) = 0.$

$$\begin{aligned}5\,(x - 4) &= 5x - 20\end{aligned}$$

On divise par 5 : $x - 4 = 0$.

Une équation est $x - 4 = 0$.

Contrôle avec $A : 1 \times 4 + 0 \times (-3) + (-4) = 0$.

Droite parallèle à l'axe des ordonnées : $x = 4$.

h) $\overrightarrow{BC}\,(3 - 1\,;\,-2 - 1)$, soit $\vec{n}\,(2\,;\,-3)$.

$M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2\,(x + 3) - 3\,(y - 2) = 0.$

$$\begin{aligned}2\,(x + 3) - 3\,(y - 2) &= 2x + 6 - 3y + 6\\ &= 2x - 3y + 12\end{aligned}$$

Une équation est $2x - 3y + 12 = 0$.

Contrôle avec $A : 2 \times (-3) + (-3) \times 2 + 12 = 0$.

Exercice 3 – Parallèles, perpendiculaires ou sécantes ? ★

Le repère est orthonormé. Compare les vecteurs normaux des droites d_1 et d_2 et conclus.

a) $\vec{n_1}\,(2\,;\,-1)$ et $\vec{n_2}\,(1\,;\,2)$ sont normaux à d_1 et d_2.

$$\begin{aligned}\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2\\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les droites sont perpendiculaires.

b) $\vec{n_1}\,(3\,;\,6)$ et $\vec{n_2}\,(1\,;\,2)$ sont normaux à d_1 et d_2.
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$
$= 3\times 1 + 6\times 2$
$= 15$

Ce n'est pas nul : les droites ne sont pas perpendiculaires.
Colinéarité des vecteurs normaux :
$\det(\vec{n_1},\vec{n_2})$
$= 3\times 2 - 6\times 1$
$= 0$

Les vecteurs normaux sont colinéaires : les droites sont parallèles (et distinctes).

c) $\vec{n_1}\,(4\,;\,-3)$ et $\vec{n_2}\,(3\,;\,4)$ sont normaux à d_1 et d_2.
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$
$= 4\times 3 + (-3)\times 4$
$= 0$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les droites sont perpendiculaires.

d) $\vec{n_1}\,(1\,;\,-5)$ et $\vec{n_2}\,(5\,;\,1)$ sont normaux à d_1 et d_2.
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$
$= 1\times 5 + (-5)\times 1$
$= 0$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les droites sont perpendiculaires.

e) $\vec{n_1}\,(2\,;\,3)$ et $\vec{n_2}\,(3\,;\,2)$ sont normaux à d_1 et d_2.
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$
$= 2\times 3 + 3\times 2$
$= 12$

Ce n'est pas nul : les droites ne sont pas perpendiculaires.
Colinéarité des vecteurs normaux :
$\det(\vec{n_1},\vec{n_2})$
$= 2\times 2 - 3\times 3$
$= -5$

Ni orthogonaux, ni colinéaires : les droites sont sécantes, sans être perpendiculaires.

f) On passe tout à gauche : $d_1 : 3x - y - 1 = 0$ et, en multipliant par 3, $d_2 : x + 3y - 6 = 0$.
$\vec{n_1}\,(3\,;\,-1)$ et $\vec{n_2}\,(1\,;\,3)$ sont normaux à d_1 et d_2.
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$
$= 3\times 1 + (-1)\times 3$
$= 0$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les droites sont perpendiculaires.

g) $\vec{n_1}\,(-1\,;\,2)$ et $\vec{n_2}\,(2\,;\,-4)$ sont normaux à d_1 et d_2.
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$
$= -1\times 2 + 2\times(-4)$
$= -10$

Ce n'est pas nul : les droites ne sont pas perpendiculaires.
Colinéarité des vecteurs normaux :
$\det(\vec{n_1},\vec{n_2})$
$= -1\times(-4) - 2\times 2$
$= 0$

Les vecteurs normaux sont colinéaires : les droites sont parallèles.
De plus, l'équation de d_2 est celle de d_1 multipliée par -2 : les droites sont confondues.

h) $d_1 : x - 2 = 0$ et $d_2 : y + 1 = 0$.
$\vec{n_1}\,(1\,;\,0)$ et $\vec{n_2}\,(0\,;\,1)$ sont normaux à d_1 et d_2.
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$
$= 1\times 0 + 0\times 1$
$= 0$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux : les droites sont perpendiculaires.

Exercice 4 – Perpendiculaire ou parallèle passant par un point ★★

Le repère est orthonormé. Écris une équation cartésienne de la droite demandée, avec des coefficients entiers sans facteur commun.

a) $\vec{n}\,(3\,;\,-1)$ est normal à d, donc il dirige la perpendiculaire d'.
Un vecteur normal de d' est un vecteur directeur de d : $\vec{u}\,(1\,;\,3)$.
$M(x\,;\,y)\in d' \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0 \iff (x-1)+3\,(y-4) = 0$.
$(x-1)+3\,(y-4)$
$= x - 1 + 3y - 12$
$= x + 3y - 13$

Une équation est $x + 3y - 13 = 0$.
Contrôle avec A : $1\times 1 + 3\times 4 + (-13) = 0$.

b) Une parallèle à d a le même vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;\,5)$.
$M(x\,;\,y)\in d' \iff \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n} = 0 \iff 2\,(x+2)+5\,(y-1) = 0$.
$2\,(x+2)+5\,(y-1)$
$= 2x + 4 + 5y - 5$
$= 2x + 5y - 1$

Une équation est $2x + 5y - 1 = 0$.
Contrôle avec B : $2\times(-2) + 5\times 1 + (-1) = 0$.
On retrouve l'équation de d : le point B est sur d, la parallèle cherchée est d elle-même.

c) $\vec{n}\,(1\,;\,-4)$ est normal à d, donc il dirige la perpendiculaire d'.
Un vecteur normal de d' est un vecteur directeur de d : $\vec{u}\,(4\,;\,1)$.
$M(x\,;\,y) \in d' \iff \overrightarrow{CM} \cdot \vec{u} = 0 \iff 4x + (y+2) = 0$.
$$\begin{aligned}&4x + (y+2)\\ &\quad = 4x + y + 2\end{aligned}$$

Une équation est $4x + y + 2 = 0$.
Contrôle avec C : $4 \times 0 + 1 \times (-2) + 2 = 0$.

d) On écrit d : $2x + y - 5 = 0$.
$\vec{n}\,(2\,;\,1)$ est normal à d, donc il dirige la perpendiculaire d'.
Un vecteur normal de d' est un vecteur directeur de d : $\vec{u}\,(-1\,;\,2)$.
$M(x\,;\,y) \in d' \iff \overrightarrow{DM} \cdot \vec{u} = 0 \iff -(x-3) + 2\,(y+1) = 0$.
$$\begin{aligned}&-(x-3) + 2\,(y+1)\\ &\quad = -x + 3 + 2y + 2\\ &\quad = -x + 2y + 5\end{aligned}$$

Une équation est $-x + 2y + 5 = 0$.
Contrôle avec D : $(-1) \times 3 + 2 \times (-1) + 5 = 0$.

e) Une parallèle à d a le même vecteur normal $\vec{n}\,(6\,;\,4)$.
$M(x\,;\,y) \in d' \iff \overrightarrow{EM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 6\,(x-1) + 4\,(y+1) = 0$.
$$\begin{aligned}&6\,(x-1) + 4\,(y+1)\\ &\quad = 6x - 6 + 4y + 4\\ &\quad = 6x + 4y - 2\end{aligned}$$

On divise par 2 : $3x + 2y - 1 = 0$.
Une équation est $3x + 2y - 1 = 0$.
Contrôle avec E : $3 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) = 0$.

f) On écrit d : $x + 3 = 0$.
$\vec{n}\,(1\,;\,0)$ est normal à d, donc il dirige la perpendiculaire d'.
Un vecteur normal de d' est un vecteur directeur de d : $\vec{u}\,(0\,;\,1)$.
$M(x\,;\,y) \in d' \iff \overrightarrow{FM} \cdot \vec{u} = 0 \iff (y-5) = 0$.
$$\begin{aligned}&(y-5)\\ &\quad = y - 5\end{aligned}$$

Une équation est $y - 5 = 0$.
Contrôle avec F : $0 \times 2 + 1 \times 5 + (-5) = 0$.
La perpendiculaire à une droite parallèle à l'axe des ordonnées est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 5 – Médiatrice et hauteurs d'un triangle ★★

1. La médiatrice passe par le milieu I de $[AB]$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
   $I\left(\dfrac{-2+4}{2}\,;\,\dfrac{-2+0}{2}\right)$, soit $I(1\,;\,-1)$, et $\overrightarrow{AB}\,(6\,;\,2)$.
   $M(x\,;\,y) \in \Delta \iff \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \iff 6\,(x-1)+2\,(y+1)=0$.
   $6\,(x-1)+2\,(y+1)$
   $= 6x-6+2y+2$
   $= 6x+2y-4$

   On divise par 2 : $3x+y-2=0$.
   Une équation est $3x+y-2=0$.
   Contrôle avec I : $3\times 1+1\times(-1)+(-2)=0$.

2. La hauteur issue de C passe par C et est perpendiculaire à (AB) : $\overrightarrow{AB}\,(6\,;\,2)$ est un vecteur normal.
   $M(x\,;\,y) \in h_C \iff \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \iff 6x+2\,(y-4)=0$.
   $6x+2\,(y-4)$
   $= 6x+2y-8$

   On divise par 2 : $3x+y-4=0$.
   Une équation est $3x+y-4=0$.
   Contrôle avec C : $3\times 0+1\times 4+(-4)=0$.
   Elle est parallèle à la médiatrice de $[AB]$: même vecteur normal.

3. Elle passe par A, de vecteur normal $\overrightarrow{BC}\,(-4\,;\,4)$.
   $M(x\,;\,y) \in h_A \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \iff -4\,(x+2)+4\,(y+2)=0$.
   $-4\,(x+2)+4\,(y+2)$
   $= -4x-8+4y+8$
   $= -4x+4y$

   On divise par 4 : $-x+y=0$.
   Une équation est $-x+y=0$, soit $y=x$.
   Contrôle avec A : $(-1)\times(-2)+1\times(-2)+0=0$.
   H vérifie les deux équations.
   On remplace y par x dans $3x+y-4=0$:
   $3x+x-4=0$
   $\iff 4x=4$ *(on réduit et on ajoute 4)*
   $\iff x=1$ *(on divise par 4)*
   $S=\{1\}$

   Puis $y=x=1$: $H(1\,;\,1)$.

4. La hauteur issue de B passe par B, de vecteur normal $\overrightarrow{AC}\,(2\,;\,6)$.
   $M(x\,;\,y) \in h_B \iff \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff 2\,(x-4) + 6y = 0.$
   $2\,(x-4) + 6y$
   $= 2x - 8 + 6y$
   $= 2x + 6y - 8$

   On divise par 2 : $x + 3y - 4 = 0$.
   Une équation est $x + 3y - 4 = 0$.
   Contrôle avec B : $1 \times 4 + 3 \times 0 + (-4) = 0$.
   Avec $H(1\,;\,1)$: $1 + 3 \times 1 - 4 = 0$.
   Le point H est sur les trois hauteurs : c'est l'orthocentre du triangle.

Exercice 6 – Projeté orthogonal et distance à une droite ★★

Le repère est orthonormé. Calcule les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d, puis la distance MH de M à d. Sauf indication, cherche H sous la forme $H = M + t\,\vec{n}$ avec $\vec{n}$ normal à d.

a) $\vec{n}\,(1\,;\,-2)$ est normal à d.
On cherche $H = M + t\,\vec{n} : H(5 + t\,;\,-2t)$.
H est sur d :
$(5 + t) - 2\,(-2t) = 0$
$\iff 5t + 5 = 0$ *(on développe et on réduit)*
$\iff t = -1$

Donc $H(4\,;\,2)$.
Contrôle : $1 \times 4 + (-2) \times 2 + 0 = 0$.
MH
$= |t| \times \|\vec{n}\|$
$= 1 \times \sqrt{5}$
$= \sqrt{5}$

b) $\vec{n}\,(3\,;\,4)$ est normal à d.
On cherche $H = M + t\,\vec{n} : H(2 + 3t\,;\,7 + 4t)$.
H est sur d :
$3\,(2 + 3t) + 4\,(7 + 4t) - 9 = 0$
$\iff 25t + 25 = 0$ *(on développe et on réduit)*
$\iff t = -1$

Donc $H(-1\,;\,3)$.
Contrôle : $3 \times (-1) + 4 \times 3 + (-9) = 0$.
MH
$= |t| \times \|\vec{n}\|$
$= 1 \times 5$
$= 5$

c) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\,(-1\,;\,1)$; c'est un vecteur normal de la perpendiculaire d' à d passant par M.
d' : $-1(x-0)+1(y-0)=0$, soit $-x+y=0$, c'est-à-dire $y=x$.
H est sur d et sur d' : on remplace y par x dans l'équation de d.
$x+x-4=0$
$\iff 2x=4$ *(on réduit et on ajoute 4)*
$\iff x=2$ *(on divise par 2)*

Puis $y=x=2$: $H(2\,;\,2)$.
MH
$=\sqrt{2^2+2^2}$
$=\sqrt{8}$
$=2\sqrt{2}$

d) On écrit d : $y-1=0$.
$\vec{n}\,(0\,;\,1)$ est normal à d.
On cherche $H=M+t\,\vec{n}$: $H(3\,;\,-2+t)$.
H est sur d :
$(-2+t)-1=0$
$\iff t-3=0$ *(on développe et on réduit)*
$\iff t=3$

Donc $H(3\,;\,1)$.
Contrôle : $0\times 3+1\times 1+(-1)=0$.
MH
$=|t|\times\|\vec{n}\|$
$=3\times 1$
$=3$

H est juste au-dessus de M, sur la droite horizontale $y=1$.

e) On teste d'abord si M est sur d : $2\times 1-1-1=0$.
Le point M est sur d : son projeté est lui-même, $H=M$, et la distance de M à d est 0.

Exercice 7 – Hauteur et aire d'un triangle ★★★

1. $\overrightarrow{BC}\,(-4\,;\,2)$ dirige (BC) et $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=-4\times 1+2\times 2=0$: $\vec{n}$ est normal à (BC).
   $M(x\,;\,y)\in(BC)\iff\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0\iff(x-4)+2y=0$.
   $(x-4)+2y$
   $=x-4+2y$
   $=x+2y-4$

   Une équation est $x+2y-4=0$.
   Contrôle avec B : $1\times 4+2\times 0+(-4)=0$.
   Second contrôle avec C : $0+2\times 2-4=0$.

2. $\vec{n}\,(1\,;\,2)$ est normal à (BC).
   On cherche $H = A + t\,\vec{n} : H(-2+t\,;\,-3+2t)$.
   H est sur (BC) :
   $(-2+t) + 2\,(-3+2t) - 4 = 0$
   $\iff 5t - 12 = 0$ *(on développe et on réduit)*
   $\iff t = \dfrac{12}{5}$

   Donc $H(\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{9}{5})$.
   Contrôle : $1 \times \dfrac{2}{5} + 2 \times \dfrac{9}{5} + (-4) = 0$.

3. La distance de A à (BC) est la longueur AH.
   AH
   $= |t| \times \|\vec{n}\|$
   $= \dfrac{12}{5} \times \sqrt{5}$
   $= \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

   Soit environ 5,37 cm.

4. $[AH]$ est la hauteur issue de A, et la base est $[BC]$.
   BC
   $= \sqrt{(-4)^2 + 2^2}$
   $= \sqrt{20}$
   $= 2\sqrt{5}$

   $\mathcal{A}$
   $= \dfrac{BC \times AH}{2}$
   $= \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$
   $= \dfrac{12 \times 5}{5}$
   $= 12$

   L'aire du triangle ABC est 12 cm².

Exercice 8 – Le chemin le plus court ★★★

1. $\vec{n}\,(1\,;\,-3)$ est normal à d ; un vecteur directeur de d est $\vec{u}\,(3\,;\,1)$, qui est donc normal à d'.
   $P(x\,;\,y) \in d' \iff \overrightarrow{MP} \cdot \vec{u} = 0 \iff 3\,(x-5) + (y+3) = 0$.
   $3\,(x-5) + (y+3)$
   $= 3x - 15 + y + 3$
   $= 3x + y - 12$

   Une équation est $3x + y - 12 = 0$.
   Contrôle avec M : $3 \times 5 + 1 \times (-3) + (-12) = 0$.

2. Le chemin le plus court arrive au projeté orthogonal H de M sur d : H est sur d et sur d'.
   De $d : x = 3y - 6$.
   On remplace dans l'équation de d' :
   $3(3y - 6) + y - 12 = 0$
   $\iff 10y - 30 = 0$ *(on développe et on réduit)*
   $\iff y = 3$ *(on divise par 10)*

   Puis $x = 3 \times 3 - 6 = 3$: $H(3\,;\,3)$.
   Contrôle dans d : $3 - 9 + 6 = 0$.

3. $\overrightarrow{MH}\,(-2\,;\,6)$.
   MH
   $= \sqrt{(-2)^2 + 6^2}$
   $= \sqrt{40}$
   $= 2\sqrt{10}$

   Le chemin mesure $2\sqrt{10} \approx 6{,}325$ km, soit environ $6\,325$ m.

4. H est le milieu de $[MM']$: $x_{M'} = 2x_H - x_M$ et $y_{M'} = 2y_H - y_M$.
   $x_{M'} = 2 \times 3 - 5 = 1$ et $y_{M'} = 2 \times 3 - (-3) = 9$: $M'(1\,;\,9)$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige. Le repère est orthonormé.

a) $(-b\,;\,a) = (5\,;\,3)$ *est un vecteur directeur ; le vecteur normal se lit directement :* $(a\,;\,b)$.
Un vecteur normal est $\vec{n}\,(3\,;\,-5)$.

b) $x - x_A = x - (-4) = x + 4$ *: le signe change avec une coordonnée négative.*
$3(x + 4) + 2(y - 1)$
$= 3x + 12 + 2y - 2$
$= 3x + 2y + 10$

$d : 3x + 2y + 10 = 0$.
Contrôle : $3 \times (-4) + 2 \times 1 + 10 = 0$.

c) *Garder le même vecteur normal* $(2\,;\,7)$ *donne une parallèle, pas une perpendiculaire.*
Le vecteur normal de la perpendiculaire est un vecteur directeur de d : $(7\,;\,-2)$.
Équation : $7x - 2y = 0$.
Contrôle : $(2\,;\,7) \cdot (7\,;\,-2) = 14 - 14 = 0$.

d) *Le contrôle avec A échoue :* $2 + 4 \times (-1) - 2 = -4 \neq 0$.
L'équation est fausse.
$(x - 2) + 4(y + 1)$
$= x - 2 + 4y + 4$
$= x + 4y + 2$

$d : x + 4y + 2 = 0$.
Contrôle : $2 - 4 + 2 = 0$.

e) $H(0\,;\,1)$ *est bien sur* d*, mais* $\overrightarrow{MH}\,(0\,;\,-4)$ *n'est pas orthogonal à* d *: ce n'est pas le projeté.*
$\vec{n}\,(1\,;\,1)$ est normal à d.
On cherche $H = M + t\,\vec{n} : H(t\,;\,5+t)$.
H est sur d :
$(t) + (5+t) - 1 = 0$
$\iff 2t + 4 = 0$ *(on développe et on réduit)*
$\iff t = -2$

Donc $H(-2\,;\,3)$.
Contrôle : $1 \times (-2) + 1 \times 3 + (-1) = 0$.
MH
$= |t| \times \|\vec{n}\|$
$= 2 \times \sqrt{2}$
$= 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} \approx 2{,}83 < 4$: le vrai projeté est plus proche.

f) *Une distance n'est jamais négative :* $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$.
$\vec{n}\,(3\,;\,4)$ est normal à d.
On cherche $H = M + t\,\vec{n} : H(1+3t\,;\,1+4t)$.
H est sur d :
$3\,(1+3t) + 4\,(1+4t) - 2 = 0$
$\iff 25t + 5 = 0$ *(on développe et on réduit)*
$\iff t = -\dfrac{1}{5}$

Donc $H(\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{1}{5})$.
Contrôle : $3 \times \dfrac{2}{5} + 4 \times \dfrac{1}{5} + (-2) = 0$.
MH
$= |t| \times \|\vec{n}\|$
$= \dfrac{1}{5} \times 5$
$= 1$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un vecteur normal à la droite $5x - 2y + 7 = 0$ est :

Réponse A : $(5\,;\,-2)$
On lit les coefficients de x et de y : $(a\,;\,b) = (5\,;\,-2)$.

2. La droite passant par $A(1\,;\,-3)$, de vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;\,1)$, a pour équation :

Réponse C : $2x + y + 1 = 0$
$2(x-1) + (y+3) = 2x + y + 1$.

3. Les droites $4x - y + 1 = 0$ et $x + 4y - 3 = 0$ sont :

Réponse D : perpendiculaires
$(4\,;\,-1) \cdot (1\,;\,4) = 4 - 4 = 0$.

4. La perpendiculaire à $x - 3y + 2 = 0$ passant par l'origine a pour équation :

Réponse B : $3x + y = 0$
Son vecteur normal est le vecteur directeur $(3\,;\,1)$ de la droite.

5. Le projeté orthogonal de $M(1\,;\,5)$ sur la droite $x - y = 0$ est :

Réponse D : $(3\,;\,3)$
$H = M + t(1\,;\,-1) = (1 + t\,;\,5 - t)$ et $1 + t - 5 + t = 0$ donne $t = 2$.

6. La médiatrice de $[AB]$, avec $A(1\,;\,2)$ et $B(5\,;\,-2)$, a pour équation :

Réponse A : $x - y - 3 = 0$
Milieu $(3\,;\,0)$ et vecteur normal $\overrightarrow{AB}\,(4\,;\,-4)$: $4(x - 3) - 4y = 0$, puis on divise par 4.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).