Corrigé – Variations et extrémums

Mathématiques – Seconde

Variations et extrémums · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Variations lues sur une courbe ★

1. On lit la courbe de gauche à droite.
   De -4 à -2, elle monte : f est croissante sur $[-4\,;\,-2]$.
   De -2 à 2, elle descend : f est décroissante sur $[-2\,;\,2]$.
   De 2 à 4, elle remonte : f est croissante sur $[2\,;\,4]$.

2. Ligne des x : les bornes -4 et 4, et les abscisses où le sens change, -2 et 2.
   Ligne de f : les images lues sur la courbe, $f(-4) = -1.0$, $f(-2) = 3.0$, $f(2) = -1.0$ et $f(4) = 3.0$.
   Une flèche qui monte quand la courbe monte, qui descend quand elle descend.

x	-4		-2		2		4
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

3. Le maximum est la plus grande valeur de la 2e ligne du tableau : 3.
   Il est atteint **deux fois**, en -2 et en 4.
   Le minimum est la plus petite : -1, atteint en -4 et en 2.

4. On ne garde que la partie de la courbe entre 0 et 4.
   Elle descend de $f(0) = 1.0$ jusqu'à $f(2) = -1$, puis remonte jusqu'à $f(4) = 3$.
   Maximum : 3, atteint en 4 (une borne).
   Minimum : -1, atteint en 2.

5. Sur $[-2\,;\,2]$, f décroît : sa plus grande valeur est au début, $f(-2) = 3$, sa plus petite à la fin, $f(2) = -1$.
   Donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

Exercice 2 – Dresser un tableau de variations ★

1. On suit la courbe de gauche à droite : elle descend de -3 à -1, monte de -1 à 2, puis descend de 2 à 4.
   g est décroissante sur $[-3\,;\,-1]$, croissante sur $[-1\,;\,2]$, décroissante sur $[2\,;\,4]$.
   Dans le tableau, on écrit sous chaque abscisse son image lue sur la courbe : $g(-3) = 1$, $g(-1) = -2$, $g(2) = 3$, $g(4) = 0$.

x	-3		-1		2		4
g	1	↘	-2	↗	3	↘	0

2. Le point le plus haut de la courbe est $(2\,;\,3)$.
   Le maximum est son ordonnée, 3 ; il est atteint en son abscisse, $x = 2$.

3. Sur $[2\,;\,4]$, g décroît : sa plus petite valeur est à la fin, $g(4) = 0$.
   Minimum 0, en 4.
   Sur $[-3\,;\,0]$, la courbe descend jusqu'au point $(-1\,;\,-2)$, puis remonte : minimum -2, en -1.

4. On suit le tableau, flèche par flèche.
   Sur $[-3\,;\,-1]$, g descend de 1 à -2 : $g(x) \leqslant 1$, jamais 2.
   Sur $[-1\,;\,2]$, g monte de -2 à 3 : elle passe une fois par 2.
   Sur $[2\,;\,4]$, g descend de 3 à 0 : elle passe encore une fois par 2.
   L'équation a deux solutions.

Exercice 3 – Lire un tableau de variations ★

1. Une flèche qui monte indique où f croît.
   Il n'y en a qu'une, de -1 à 3 : f est croissante sur $[-1\,;\,3]$ seulement.
   Elle est décroissante sur $[-5\,;\,-1]$ et sur $[3\,;\,6]$.

2. Sous 3, le tableau porte 5 : $f(3) = 5$.
   On cherche -4 dans la 2e ligne : il est sous -1, donc $f(-1) = -4$.
   -1 est un antécédent de -4.

3. Le maximum est la plus grande valeur de la 2e ligne : 5, écrite sous 3.
   Il est atteint en 3.
   Le minimum est la plus petite : -4, atteint en -1.

4. Sur $[3\,;\,6]$, f décroît de 5 à 1 : sa plus petite valeur est à la fin.
   Minimum 1, en 6.
   Sur $[-5\,;\,-1]$, f décroît de 2 à -4 : sa plus grande valeur est au début.
   Maximum 2, en -5.

5. On regarde si chaque flèche passe par 0.
   Sur $[-5\,;\,-1]$, f descend de 2 à -4 : elle passe une fois par 0.
   Sur $[-1\,;\,3]$, f monte de -4 à 5 : encore une fois.
   Sur $[3\,;\,6]$, f descend de 5 à 1 : $f(x) \geqslant 1$, jamais 0.
   L'équation a deux solutions.

Exercice 4 – Comparer sans calculer ★★

Compare les deux nombres en citant le sens de variation utilisé. Pour a) à d), f est la fonction de l'exercice 3, dont le tableau est rappelé ci-contre.

a) -4 et -2 sont tous deux dans $[-5\,;\,-1]$, où f est décroissante : l'ordre s'inverse.
$-4 < -2$, donc $f(-4) > f(-2)$.

b) 0 et 2,5 sont tous deux dans $[-1\,;\,3]$, où f est croissante : l'ordre est conservé.
$0 < 2{,}5$, donc $f(0) < f(2{,}5)$.

c) 4 et 5,5 sont tous deux dans $[3\,;\,6]$, où f est décroissante : l'ordre s'inverse.
$4 < 5{,}5$, donc $f(4) > f(5{,}5)$.

d) -3 *est dans* $[-5\,;\,-1]$, 1 *dans* $[-1\,;\,3]$ *: pas le même intervalle de monotonie.*
On sait seulement que $f(-3)$ est entre -4 et 2, et $f(1)$ entre -4 et 5.
On ne peut pas conclure.

e) $-3{,}2$ et $-2{,}7$ sont négatifs.
La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$: l'ordre change.
$-3{,}2 < -2{,}7$, donc $(-3{,}2)^2 > (-2{,}7)^2$.

f) $2{,}4$ et $2{,}5$ sont positifs.
La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$: l'ordre change.
$2{,}4 < 2{,}5$, donc $\dfrac{1}{2{,}4} > \dfrac{1}{2{,}5}$.

g) $-0{,}5$ et $-0{,}3$ sont négatifs.
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$: l'ordre change.
$-0{,}5 < -0{,}3$, donc $\dfrac{1}{-0{,}5} > \dfrac{1}{-0{,}3}$.

h) g est affine, de coefficient directeur $m = -2 < 0$: elle est décroissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre change.
$\sqrt{2} \approx 1{,}41$, donc $\sqrt{2} < 1{,}5$ et $g(\sqrt{2}) > g(1{,}5)$.

Exercice 5 – Encadrer et compter ★★

1. Sur chacun de ces intervalles, f ne change pas de sens : sa plus petite et sa plus grande valeur sont aux deux bouts de la flèche.
   Sur $[-2\,;\,1]$, f décroît de 3 à -1 : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$.
   Sur $[1\,;\,4]$, f croît de -1 à 6 : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 6$.
   Sur $[4\,;\,7]$, f décroît de 6 à 2 : $2 \leqslant f(x) \leqslant 6$.

2. Ici f change de sens : on cherche le minimum et le maximum de f sur l'intervalle, parmi les nombres de la 2e ligne qui le concernent.
   Sur $[-2\,;\,7]$, la plus petite valeur de la 2e ligne est -1 et la plus grande est 6 : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 6$.
   Sur $[-2\,;\,4]$, f descend de 3 jusqu'à -1 (en 1), puis monte jusqu'à 6 (en 4) : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 6$.

3. On regarde, flèche par flèche, si f passe par la valeur cherchée.
   $f(x) = 0$: de 3 à -1, f passe une fois par 0 ; de -1 à 6, encore une fois ; de 6 à 2, $f(x) \geqslant 2$, jamais 0.
   2 solutions.
   $f(x) = 4$: de 3 à -1, $f(x) \leqslant 3$, jamais 4 ; de -1 à 6, f passe une fois par 4 ; de 6 à 2, encore une fois.
   2 solutions.

Exercice 6 – Vrai, faux ou on ne peut pas savoir ? ★★

1. **On ne peut pas savoir**.
   -1 est dans $[-3\,;\,0]$, où f décroît de $f(-3) = 4$ à $f(0) = -2$.
   On sait seulement que $f(-1)$ est entre -2 et 4 : il peut être positif ou négatif.

2. **Vrai**.
   0 et 1 sont dans $[0\,;\,2]$, où f est croissante : l'ordre est conservé.
   $0 < 1$, donc $f(0) < f(1)$, c'est-à-dire $-2 < f(1)$.

3. **Faux**.
   Le tableau donne $f(5) = -3$, et $-3 < -2$.
   Le minimum est la plus petite valeur de la 2e ligne : -3, atteint en 5.

4. **Vrai**.
   -2 et -1 sont dans $[-3\,;\,0]$, où f est décroissante : l'ordre s'inverse.
   $-2 < -1$, donc $f(-2) > f(-1)$.

5. **On ne peut pas savoir**.
   1 est dans $[0\,;\,2]$, 4 dans $[2\,;\,5]$: pas le même intervalle de monotonie.
   $f(1)$ est entre -2 et 1, $f(4)$ entre -3 et 1 : l'un ou l'autre peut être le plus grand.

6. **Vrai**.
   Sur $[0\,;\,5]$, f monte de -2 à 1, puis descend de 1 à -3.
   Sa plus grande valeur est $f(2) = 1$, donc $f(x) \leqslant 1$.

Exercice 7 – L'enclos des chèvres ★★★

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(x)$	0	18	32	42	48	50	48	42	32	18	0

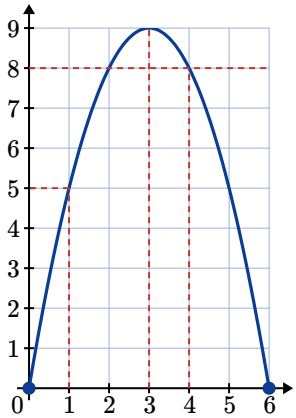
1. Le grillage (20 m) fait trois côtés : les deux côtés perpendiculaires au mur, de x m chacun, et le côté parallèle.
   Les deux côtés perpendiculaires utilisent $2x$ m : il reste $20 - 2x$ m pour le côté parallèle.
   Aire d'un rectangle = longueur $\times$ largeur : $A(x) = x(20 - 2x)$.
   Les longueurs sont positives : $x \geqslant 0$ et $20 - 2x \geqslant 0$, soit $x \leqslant 10$.
   Donc $x \in [0\,;\,10]$.

2. Tableau ci-dessus : on remplace x par chaque entier dans $A(x) = x(20 - 2x)$.
   Par exemple $A(3) = 3 \times (20 - 2 \times 3) = 3 \times 14 = 42$ et $A(7) = 7 \times (20 - 2 \times 7) = 7 \times 6 = 42$.

3. Dans le tableau, $A(x)$ augmente de 0 à 50 quand x va de 0 à 5, puis diminue de 50 à 0 quand x va de 5 à 10.
   A semble croissante sur $[0\,;\,5]$, puis décroissante sur $[5\,;\,10]$.
   La plus grande valeur du tableau est 50 : l'aire maximale semble être 50 m², pour $x = 5$.
   Un tableau de valeurs ne le démontre pas.

4. On développe chaque membre séparément.
   D'un côté : $50 - A(x) = 50 - x(20 - 2x) = 50 - 20x + 2x^2$.
   De l'autre : $2(x - 5)^2 = 2(x^2 - 10x + 25) = 2x^2 - 20x + 50$.
   Les deux expressions sont égales.
   Conclusion : un carré est positif ou nul, donc $2(x - 5)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $50 - A(x) \geqslant 0$, soit $A(x) \leqslant 50$.
   Et $A(5) = 50$: la valeur 50 est atteinte.
   L'aire est maximale, égale à 50 m², pour deux côtés de 5 m et un côté de $20 - 2 \times 5 = 10$ m le long du mur.

Exercice 8 – La recette du boulanger ★★★



1. On part de 1 sur l'axe horizontal, on monte jusqu'à la courbe, on lit l'ordonnée : $R(1) = 5$.
   R est en centaines d'euros : $5 \times 100 = 500$ €.
   De même, $R(4) = 8$, soit 800 €.

2. La courbe monte de $x = 0$ à $x = 3$, puis descend jusqu'à $x = 6$.
   On lit $R(0) = 0$, $R(3) = 9$ et $R(6) = 0$, en centaines d'euros : soit 0 €, 900 € et 0 €.

x	0		3		6
R	0	↗	900	↘	0

3. Le point le plus haut de la courbe est $(3\,;\,9)$: la recette est maximale pour $x = 3$, c'est-à-dire un prix de 3 €.
   Calcul : à 3 €, il vend $600 - 100 \times 3 = 300$ pains.
   Recette = prix × nombre de pains $= 3 \times 300 = 900$ €.
   On retrouve $R(3) = 9$ centaines d'euros.

4. 800 € font 8 centaines d'euros : on résout $R(x) \geqslant 8$.
   On trace la droite $y = 8$: elle coupe la courbe en $x = 2$ et $x = 4$.
   Entre les deux, la courbe est au-dessus de la droite ; « au moins » : bornes comprises.
   $x \in [2\,;\,4]$: pour un prix compris entre 2 € et 4 €.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige. Pour b) et e), f est la fonction de l'exercice 3, dont le tableau est rappelé ci-contre.

a) *On ne sait rien entre* 2 *et* 5.

Croissante sur deux intervalles séparés ne dit rien de ce qui se passe entre eux.
f peut décroître sur $[2\,;\,5]$ (par exemple $f(2) = 3$ et $f(5) = -1$).

b) 3 *est l'abscisse où le maximum est atteint, pas le maximum.*

Le maximum est une image : la plus grande valeur de la 2e ligne du tableau, $f(3) = 5$.
Il est atteint en $x = 3$.

c) *La fonction carré décroît sur* $]-\infty\,;\,0]$ *: l'ordre s'inverse.*

-5 et -2 sont négatifs, donc $-5 < -2$ donne $(-5)^2 > (-2)^2$.
Vérification : $(-5)^2 = 25$ et $(-2)^2 = 4$.

d) -1 *et* 2 *sont de part et d'autre de* 0 *: la règle ne s'applique pas.*

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ séparément, pas sur les deux à la fois.

On calcule : $\dfrac{1}{-1} = -1$, négatif, donc plus petit que $\dfrac{1}{2}$.

e) -3 *et* 1 *ne sont pas dans le même intervalle de monotonie.*

-3 est dans $[-5\,;\,-1]$, 1 dans $[-1\,;\,3]$.

On sait seulement que $f(-3)$ est entre -4 et 2, $f(1)$ entre -4 et 5 : on ne peut pas comparer avec le tableau seul.

f) *Trois valeurs ne prouvent rien.*

h peut monter jusqu'à 3 en $0{,}5$, puis redescendre à 2 en 1.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. f est strictement croissante sur $[1\,;\,4]$, et $1 \leqslant a < b \leqslant 4$. Alors :

Réponse C : $f(a) < f(b)$

Croissante : $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que a et b.

2. f est définie sur $[-2\,;\,5]$: décroissante de $f(-2) = 4$ à $f(1) = -3$, puis croissante jusqu'à $f(5) = 2$. Le minimum de f est :

Réponse A : -3, atteint en 1

Le minimum est une image : -3, atteinte en $x = 1$.

3. Avec la même fonction, le maximum de f est :

Réponse D : 4, atteint en -2

$4 > 2$: le maximum est atteint à la borne -2.

4. Avec la même fonction, l'équation $f(x) = 0$ a :

Réponse B : deux solutions

Une en descendant de 4 à -3, une en remontant de -3 à 2.

5. On compare $(-1{,}5)^2$ et $(-1{,}2)^2$:

Réponse D : $(-1{,}5)^2 > (-1{,}2)^2$

Carré décroissant sur $]-\infty\,;\,0]$ et $-1{,}5 < -1{,}2$: l'ordre s'inverse.

6. Avec la fonction des questions 2 à 4, pour $x \in [1\,;\,5]$:

Réponse A : $-3 \leqslant f(x) \leqslant 2$

Sur $[1\,;\,5]$, f croît de -3 à 2.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).