Variance et écart-type d'une variable aléatoire – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Variables aléatoires réelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice autorisée. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $E(X^2)$ se calcule avec les **carrés des valeurs** : ce n'est pas $E(X)^2$.
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$: le carré de l'espérance, avec ses parenthèses : $(-2)^2 = 4$.
- Une variance est toujours positive ou nulle : un résultat négatif signale une erreur.
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$: l'écart-type a l'unité de X, la variance l'unité au carré.
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$: ni « $aV(X)$ », ni « $+b$ ».
- $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$: un écart-type n'est jamais négatif.

Exercice 1 – Variance par la définition ★

Calcule $E(X)$, puis $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2$, puis $\sigma(X)$ (arrondi au centième si besoin).

a)

x_i	0	4
$P(X = x_i)$	$0{,}5$	$0{,}5$

b)

x_i	-1	1	3
$P(X = x_i)$	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}25$

c)

x_i	1	2	6
$P(X = x_i)$	$0{,}5$	$0{,}25$	$0{,}25$

d)

x_i	-2	3
$P(X = x_i)$	$0{,}6$	$0{,}4$

e)

x_i	7
$P(X = x_i)$	1

f)

x_i	10	20	30
$P(X = x_i)$	$0{,}2$	$0{,}6$	$0{,}2$

g)

x_i	-6	0	2
$P(X=x_i)$	0,25	0,25	0,5

h)

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,1	0,4	0,4	0,1

Exercice 2 – Formule de König-Huygens ★

Calcule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, puis $\sigma(X)$. Un cas est impossible : lequel ?

a) $E(X) = 3$ et $E(X^2) = 13$

b) $E(X) = -2$ et $E(X^2) = 5$

c) $E(X) = 0{,}5$ et $E(X^2) = 2{,}5$

d) $E(X) = 10$ et $E(X^2) = 136$

e) $E(X) = -1{,}5$ et $E(X^2) = 11{,}25$

f) $E(X) = \dfrac{1}{3}$ et $E(X^2) = 1$

g) $E(X) = 4$ et $E(X^2) = 15$

h) $E(X) = 0$ et $E(X^2) = 7$

Exercice 3 – Transformation $aX + b$ ★

X vérifie $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$, donc $\sigma(X) = 2$. Pour chaque variable Y, calcule $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

a) $Y = X + 3$

b) $Y = 3X$

c) $Y = -X$

d) $Y = 2X - 7$

e) $Y = 1 - 3X$

f) $Y = 0{,}5X + 1$

g) $Y = X - 5$

h) $Y = -2X + 4$

Exercice 4 – Le tableau de calcul ★★

Le nombre X de buts marqués par une équipe lors d'un match suit la loi donnée dans les deux premières lignes du tableau.

1. Complète le tableau.
2. Déduis-en $E(X)$ et $E(X^2)$.
3. Calcule $V(X)$ et $\sigma(X)$, arrondi au centième.

x_i	0	1	2	5
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1
$x_i p_i$				
x_i^2				
$x_i^2 p_i$				

Exercice 5 – Les deux méthodes ★★

Le gain X (en euros) d'un jeu a la loi suivante.

x_i	-1	2	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

1. Calcule $E(X)$.
2. Calcule $V(X)$ avec la définition.
3. Calcule $E(X^2)$, puis $V(X)$ avec la formule de König-Huygens. Compare.
4. Donne $\sigma(X)$ et interprète $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 6 – Deux jeux de même espérance ★★

Deux jeux ont pour gains nets A et B (en euros). Jeu A : -2 ou 4, avec la probabilité 0,5 chacun. Jeu B : -20 avec la probabilité 0,1, 0 avec la probabilité 0,6, 10 avec la probabilité 0,3.

1. Montre que les deux jeux ont la même espérance.
2. Calcule $V(A)$, $V(B)$, puis les écarts-types.
3. Quel jeu est le plus risqué ? Lequel conseiller à un joueur prudent ?

Exercice 7 – Le salaire du vendeur ★★

Le nombre X de voitures vendues par un vendeur en une journée a la loi ci-dessous. Son salaire journalier, en euros, est $S = 40X + 60$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

1. Calcule $E(X)$ et $E(X^2)$.
2. Calcule $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calcule $E(S)$ sans écrire la loi de S. Interprète.
4. Calcule $V(S)$ et $\sigma(S)$.

Exercice 8 – Le jeu à paramètre ★★★

Le gain net X (en euros) d'un jeu vaut -2 avec la probabilité 0,5, 1 avec la probabilité 0,3 et 6 avec la probabilité p.

1. Calcule p.
2. Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
3. L'organisateur remplace le gain par $Y = 2X - 1$. Le jeu devient-il équitable ?
4. Que devient le risque pour le joueur ?

Exercice 9 – La durée du trajet ★★★

La durée T (en minutes) du trajet d'un livreur suit la loi ci-dessous.

t_i	20	30	40	60
$P(T = t_i)$	0,2	0,5	0,2	0,1

1. Calcule $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$.
2. Exprime la durée H en heures, puis donne $E(H)$ et $\sigma(H)$.
3. Chaque trajet coûte $C = 0{,}5T + 2$ euros. Calcule $E(C)$ et $\sigma(C)$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) X vaut -1 ou 3 avec la probabilité $0{,}5$ chacun. « $E(X) = 1$, donc $E(X^2) = 1^2 = 1$. »

b) $E(X) = 3$ et $E(X^2) = 12$. « $V(X) = 12 - 3 = 9$. »

c) $V(X) = 3$. « $V(2X + 5) = 2 \times 3 + 5 = 11$. »

d) $\sigma(X) = 2{,}5$. « $\sigma(-2X) = -2 \times 2{,}5 = -5$. »

e) $E(X) = -2$ et $E(X^2) = 7$. « $V(X) = 7 - (-4) = 11$. »

f) $V(X) = 0{,}25$. « $\sigma(X) = 0{,}25^2 = 0{,}0625$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $E(X) = -3$ et $E(X^2) = 10$. Alors $V(X)$ vaut :

   A 19 **B** 13 **C** 1 **D** 7

2. $V(X) = 5$. Alors $V(-2X + 3)$ vaut :

   A 20 **B** 23 **C** -7 **D** 10

3. $\sigma(X) = 1{,}5$. Alors $\sigma(4 - 2X)$ vaut :

   A -3 **B** 1 **C** 6 **D** 3

4. Deux jeux ont la même espérance, avec $\sigma_A = 2$ et $\sigma_B = 8$. On peut dire que :

   A A rapporte plus que B **B** B est plus risqué que A **C** B rapporte plus que A
   D A est plus risqué que B

5. X vaut 0 ou 10 avec la probabilité $0{,}5$ chacun. $V(X)$ vaut :

   A 5 **B** 50 **C** 100 **D** 25

6. $E(X) = 4$. Alors $E(3X - 5)$ vaut :

   A 7 **B** 12 **C** -1 **D** 17

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).