Corrigé – Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Mathématiques – Première spécialité

Variables aléatoires réelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Variance par la définition ★

Calcule $E(X)$, puis $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2$, puis $\sigma(X)$ (arrondi au centième si besoin).

a) $E(X) = 0 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}5$
$= 0 + 2$
$= 2$
$V(X) = 0{,}5 \times (0-2)^2 + 0{,}5 \times (4-2)^2$
$= 0{,}5 \times (-2)^2 + 0{,}5 \times 2^2$
$= 2 + 2$
$= 4$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$

b) $E(X) = -1 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}25$
$= -0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}75$
$= 1$
$V(X) = 0{,}25 \times (-1-1)^2 + 0{,}5 \times (1-1)^2 + 0{,}25 \times (3-1)^2$
$= 0{,}25 \times (-2)^2 + 0{,}5 \times 0^2 + 0{,}25 \times 2^2$
$= 1 + 0 + 1$
$= 2$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

c) $E(X) = 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}25 + 6 \times 0{,}25$
$= 0{,}5 + 0{,}5 + 1{,}5$
$= 2{,}5$
$V(X) = 0{,}5 \times (1-2{,}5)^2 + 0{,}25 \times (2-2{,}5)^2 + 0{,}25 \times (6-2{,}5)^2$
$= 0{,}5 \times (-1{,}5)^2 + 0{,}25 \times (-0{,}5)^2 + 0{,}25 \times 3{,}5^2$
$= 1{,}125 + 0{,}0625 + 3{,}0625$
$= 4{,}25$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4{,}25} = \dfrac{\sqrt{17}}{2} \approx 2{,}06$

d) $E(X) = -2 \times 0{,}6 + 3 \times 0{,}4$
$= -1{,}2 + 1{,}2$
$= 0$
$V(X) = 0{,}6 \times (-2-0)^2 + 0{,}4 \times (3-0)^2$
$= 0{,}6 \times (-2)^2 + 0{,}4 \times 3^2$
$= 2{,}4 + 3{,}6$
$= 6$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

e) $E(X) = 7 \times 1$
$= 7$
$V(X) = 1 \times (7-7)^2$
$= 1 \times 0^2$
$= 0$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0} = 0$
X est constante : aucune dispersion, la variance est nulle.

f) $E(X) = 10 \times 0{,}2 + 20 \times 0{,}6 + 30 \times 0{,}2$
$= 2 + 12 + 6$
$= 20$
$V(X) = 0{,}2 \times (10-20)^2 + 0{,}6 \times (20-20)^2 + 0{,}2 \times (30-20)^2$
$= 0{,}2 \times (-10)^2 + 0{,}6 \times 0^2 + 0{,}2 \times 10^2$
$= 20 + 0 + 20$
$= 40$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$

g) $E(X) = -6 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}5$
$= -1{,}5 + 0 + 1$
$= -0{,}5$
$V(X) = 0{,}25 \times (-6+0{,}5)^2 + 0{,}25 \times (0+0{,}5)^2 + 0{,}5 \times (2+0{,}5)^2$
$= 0{,}25 \times (-5{,}5)^2 + 0{,}25 \times 0{,}5^2 + 0{,}5 \times 2{,}5^2$
$= 7{,}5625 + 0{,}0625 + 3{,}125$
$= 10{,}75$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10{,}75} = \dfrac{\sqrt{43}}{2} \approx 3{,}28$

h) $E(X) = 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}1$
$= 0{,}1 + 0{,}8 + 1{,}2 + 0{,}4$
$= 2{,}5$
$V(X) = 0{,}1 \times (1-2{,}5)^2 + 0{,}4 \times (2-2{,}5)^2 + 0{,}4 \times (3-2{,}5)^2 + 0{,}1 \times (4-2{,}5)^2$
$= 0{,}1 \times (-1{,}5)^2 + 0{,}4 \times (-0{,}5)^2 + 0{,}4 \times 0{,}5^2 + 0{,}1 \times 1{,}5^2$
$= 0{,}225 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}225$
$= 0{,}65$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}65} = \dfrac{\sqrt{65}}{10} \approx 0{,}81$

Exercice 2 – Formule de König-Huygens ★

Calcule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, puis $\sigma(X)$. Un cas est impossible : lequel ?

a) $V(X) = 13 - 3^2$
$= 13 - 9$
$= 4$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$

b) $V(X) = 5 - (-2)^2$
$= 5 - 4$
$= 1$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$
Le carré d'un négatif est positif : $(-2)^2 = 4$.

c) $V(X) = 2{,}5 - 0{,}5^2$
$= 2{,}5 - 0{,}25$
$= 2{,}25$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

d) $V(X) = 136 - 10^2$
$= 136 - 100$
$= 36$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{36} = 6$

e) $V(X) = 11{,}25 - (-1{,}5)^2$
$= 11{,}25 - 2{,}25$
$= 9$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9} = 3$
Le carré d'un négatif est positif : $(-1{,}5)^2 = 2{,}25$.

f) $V(X) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$= 1 - \frac{1}{9}$
$= \frac{8}{9}$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94$

g) $V(X) = 15 - 4^2$
$= 15 - 16$
$= -1$
Une variance ne peut pas être négative : ces données sont impossibles (il y a une erreur dans l'énoncé ou dans un calcul).

h) $V(X) = 7 - 0^2$
$= 7 - 0$
$= 7$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7} \approx 2{,}65$

Exercice 3 – Transformation $aX + b$ ★

X vérifie $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$, donc $\sigma(X) = 2$. Pour chaque variable Y, calcule $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

a) $Y = X + 3$: $a = 1$ et $b = 3$.
$E(Y) = aE(X) + b = 1 \times 5 + 3 = 8$.
$V(Y) = a^2 V(X) = (1)^2 \times 4 = 1 \times 4 = 4$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 1 \times 2 = 2$.

b) $Y = 3X$: $a = 3$ et $b = 0$.
$E(Y) = aE(X) + b = 3 \times 5 + 0 = 15$.
$V(Y) = a^2V(X) = (3)^2 \times 4 = 9 \times 4 = 36$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 3 \times 2 = 6$.

c) $Y = -X$: $a = -1$ et $b = 0$.
$E(Y) = aE(X) + b = (-1) \times 5 + 0 = -5$.
$V(Y) = a^2V(X) = (-1)^2 \times 4 = 1 \times 4 = 4$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 1 \times 2 = 2$.
Le signe de a disparaît dans a^2 et dans $|a|$.

d) $Y = 2X - 7$: $a = 2$ et $b = -7$.
$E(Y) = aE(X) + b = 2 \times 5 - 7 = 3$.
$V(Y) = a^2V(X) = (2)^2 \times 4 = 4 \times 4 = 16$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 2 \times 2 = 4$.

e) $Y = 1 - 3X$: $a = -3$ et $b = 1$.
$E(Y) = aE(X) + b = (-3) \times 5 + 1 = -14$.
$V(Y) = a^2V(X) = (-3)^2 \times 4 = 9 \times 4 = 36$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 3 \times 2 = 6$.
Le signe de a disparaît dans a^2 et dans $|a|$.

f) $Y = 0{,}5X + 1$: $a = 0{,}5$ et $b = 1$.
$E(Y) = aE(X) + b = 0{,}5 \times 5 + 1 = 3{,}5$.
$V(Y) = a^2V(X) = (0{,}5)^2 \times 4 = 0{,}25 \times 4 = 1$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 0{,}5 \times 2 = 1$.

g) $Y = X - 5$: $a = 1$ et $b = -5$.
$E(Y) = aE(X) + b = 1 \times 5 - 5 = 0$.
$V(Y) = a^2V(X) = (1)^2 \times 4 = 1 \times 4 = 4$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 1 \times 2 = 2$.
$Y = X - E(X)$ est la variable centrée : espérance nulle, même dispersion que X.

h) $Y = -2X + 4$: $a = -2$ et $b = 4$.
$E(Y) = aE(X) + b = (-2) \times 5 + 4 = -6$.
$V(Y) = a^2V(X) = (-2)^2 \times 4 = 4 \times 4 = 16$.
$\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = 2 \times 2 = 4$.
Le signe de a disparaît dans a^2 et dans $|a|$.

Exercice 4 – Le tableau de calcul ★★

x_i	0	1	2	5
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1
x_ip_i	0	0,4	0,4	0,5
x_i^2	0	1	4	25
$x_i^2p_i$	0	0,4	0,8	2,5

1. Ligne x_ip_i : chaque valeur multipliée par sa probabilité.
   Ligne x_i^2 : les carrés des valeurs ; ligne $x_i^2p_i$: chaque carré multiplié par sa probabilité.

2. $E(X)$ est la somme de la ligne $x_i p_i$, $E(X^2)$ celle de la ligne $x_i^2 p_i$.
   $E(X) = 0 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1{,}3$ et $E(X^2) = 0 + 0{,}4 + 0{,}8 + 2{,}5 = 3{,}7$.

3. $V(X) = 3{,}7 - 1{,}3^2$
   $= 3{,}7 - 1{,}69$
   $= 2{,}01$
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}01} = \dfrac{\sqrt{201}}{10} \approx 1{,}42$

Exercice 5 – Les deux méthodes ★★

1. $E(X) = -1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3$
   $= -0{,}2 + 1 + 1{,}2$
   $= 2$

2. $V(X) = 0{,}2 \times (-1 - 2)^2 + 0{,}5 \times (2 - 2)^2 + 0{,}3 \times (4 - 2)^2$
   $= 0{,}2 \times (-3)^2 + 0{,}5 \times 0^2 + 0{,}3 \times 2^2$
   $= 1{,}8 + 0 + 1{,}2$
   $= 3$

3. $E(X^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 2^2 \times 0{,}5 + 4^2 \times 0{,}3$
   $= 0{,}2 + 2 + 4{,}8$
   $= 7$
   $V(X) = 7 - 2^2$
   $= 7 - 4$
   $= 3$
   On retrouve le même résultat, sans calculer les écarts à l'espérance.

4. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$
   Sur un grand nombre de parties, le joueur gagne en moyenne 2 € par partie ; le gain s'écarte de cette moyenne d'environ $1{,}73$ € (c'est l'ordre de grandeur de la dispersion).

Exercice 6 – Deux jeux de même espérance ★★

1. $E(A) = -2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}5$
   $= -1 + 2$
   $= 1$
   $E(B) = -20 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}6 + 10 \times 0{,}3$
   $= -2 + 0 + 3$
   $= 1$
   Les deux jeux rapportent en moyenne 1 € par partie.

2. $E(A^2) = (-2)^2 \times 0{,}5 + 4^2 \times 0{,}5$
   $= 2 + 8$
   $= 10$
   $V(A) = 10 - 1^2$
   $= 9$
   $\sigma(A) = \sqrt{V(A)} = \sqrt{9} = 3$
   $E(B^2) = (-20)^2 \times 0{,}1 + 0^2 \times 0{,}6 + 10^2 \times 0{,}3$
   $= 40 + 0 + 30$
   $= 70$
   $V(B) = 70 - 1^2$
   $= 69$
   $\sigma(B) = \sqrt{V(B)} = \sqrt{69} \approx 8{,}31$

3. Même gain moyen, mais $\sigma(B) \approx 8{,}31 > \sigma(A) = 3$: les gains de B sont bien plus dispersés (on peut y perdre 20 €).
   Le jeu B est le plus risqué ; un joueur prudent choisit le jeu A.

Exercice 7 – Le salaire du vendeur ★★

1. $E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}2$
   $= 0 + 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}6$
   $= 1{,}7$
   $E(X^2) = 0^2 \times 0{,}1 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}4 + 3^2 \times 0{,}2$
   $= 0 + 0{,}3 + 1{,}6 + 1{,}8$
   $= 3{,}7$

2. $V(X) = 3{,}7 - 1{,}7^2$
   $= 3{,}7 - 2{,}89$
   $= 0{,}81$
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$

3. $S = 40X + 60$: $a = 40$ et $b = 60$.
   Par linéarité, $E(S) = 40E(X) + 60 = 40 \times 1{,}7 + 60 = 128$.
   Sur un grand nombre de jours, le vendeur gagne en moyenne 128 € par jour.

4. $V(S) = 40^2\, V(X) = 1600 \times 0{,}81 = 1\,296$.
   $\sigma(S) = |40|\, \sigma(X) = 40 \times 0{,}9 = 36$ €.
   Les 60 € fixes ne changent pas la dispersion.

Exercice 8 – Le jeu à paramètre ★★★

1. La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}5 + 0{,}3 + p = 1$
   $\iff 0{,}8 + p = 1$ *(on réduit)*
   $\iff p = 0{,}2$ *(on retranche 0,8)*
   $S = \left\{ \dfrac{1}{5} \right\}$

2. $E(X) = -2 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 6 \times 0{,}2$
   $= -1 + 0{,}3 + 1{,}2$
   $= 0{,}5$
   $E(X^2) = (-2)^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 6^2 \times 0{,}2$
   $= 2 + 0{,}3 + 7{,}2$
   $= 9{,}5$
   $V(X) = 9{,}5 - 0{,}5^2$
   $= 9{,}5 - 0{,}25$
   $= 9{,}25$
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9{,}25} = \dfrac{\sqrt{37}}{2} \approx 3{,}04$

3. Par linéarité, $E(Y) = 2E(X) - 1 = 2 \times 0{,}5 - 1 = 0$.
   L'espérance du gain net est nulle : le jeu devient équitable.

4. $\sigma(Y) = |2|\,\sigma(X) = 2\sigma(X) \approx 6{,}08$ (on garde la valeur exacte avant d'arrondir).
   L'écart-type double : le jeu est équitable, mais deux fois plus risqué.

Exercice 9 – La durée du trajet ★★★

1. $E(T) = 20 \times 0{,}2 + 30 \times 0{,}5 + 40 \times 0{,}2 + 60 \times 0{,}1$
   $= 4 + 15 + 8 + 6$
   $= 33$
   $E(T^2) = 20^2 \times 0{,}2 + 30^2 \times 0{,}5 + 40^2 \times 0{,}2 + 60^2 \times 0{,}1$
   $= 80 + 450 + 320 + 360$
   $= 1210$
   $V(T) = 1210 - 33^2$
   $= 1210 - 1089$
   $= 121$
   $\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{121} = 11$

2. Une minute vaut $\dfrac{1}{60}$ d'heure : $H = \dfrac{1}{60}T$.
   $E(H) = \dfrac{33}{60} = 0{,}55$ h et $\sigma(H) = \dfrac{11}{60} \approx 0{,}18$ h.

3. $a = 0{,}5$ et $b = 2$.
   $E(C) = 0{,}5 \times 33 + 2 = 16{,}5 + 2 = 18{,}5$ €.
   $\sigma(C) = 0{,}5 \times 11 = 5{,}5$ € : la constante 2 ne change pas la dispersion.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *$E(X^2)$ se calcule avec les carrés des valeurs, ce n'est pas $E(X)^2$.*
$E(X^2) = (-1)^2 \times 0{,}5 + 3^2 \times 0{,}5 = 0{,}5 + 4{,}5 = 5$.

b) *Le carré de l'espérance a été oublié.*
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 12 - 3^2 = 12 - 9 = 3$.

c) *Le coefficient s'élève au carré et la constante disparaît.*
$V(2X + 5) = 2^2 \times V(X) = 4 \times 3 = 12$.

d) *Un écart-type n'est jamais négatif : on prend $|a|$.*
$\sigma(-2X) = |-2| \times 2{,}5 = 2 \times 2{,}5 = 5$.

e) $(-2)^2 = 4$ *: le carré d'un négatif est positif.*
$V(X) = 7 - (-2)^2 = 7 - 4 = 3$.

f) *L'écart-type est la racine carrée de la variance, pas son carré.*
$\sigma(X) = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $E(X) = -3$ et $E(X^2) = 10$. Alors $V(X)$ vaut :

Réponse C : 1
$V(X) = 10 - (-3)^2 = 10 - 9 = 1$: le carré d'un négatif est positif.

2. $V(X) = 5$. Alors $V(-2X + 3)$ vaut :

Réponse A : 20
$V(-2X + 3) = (-2)^2 \times 5 = 20$: la constante 3 disparaît.

3. $\sigma(X) = 1{,}5$. Alors $\sigma(4 - 2X)$ vaut :

Réponse D : 3
$\sigma(4 - 2X) = |-2| \times 1{,}5 = 3$.

4. Deux jeux ont la même espérance, avec $\sigma_A = 2$ et $\sigma_B = 8$. On peut dire que :

Réponse B : B est plus risqué que A
Même gain moyen ; l'écart-type mesure la dispersion, donc le risque.

5. X vaut 0 ou 10 avec la probabilité 0,5 chacun. $V(X)$ vaut :

Réponse D : 25
$E(X) = 5$ et $E(X^2) = 100 \times 0{,}5 = 50$, donc $V(X) = 50 - 25 = 25$.

6. $E(X) = 4$. Alors $E(3X - 5)$ vaut :

Réponse A : 7
Linéarité : $E(3X - 5) = 3 \times 4 - 5 = 7$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).