Terminale spécialité / Variables aléatoires

benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 1re : loi, espérance, variance, écart type*

À retenir : $p_1 + \cdots + p_k = 1$; $E(X) = p_1x_1 + \cdots + p_kx_k$ (moyenne théorique) ; $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Ex. : $X = \pm 1$ équiprobable : $E(X)^2 = 0$ mais $E(X^2) = 1$. Gain : mise retirée ; jeu équitable si $E(G) = 0$.

Ex. 1 ★☆☆ **Le retard du bus** — Le retard X, en minutes, du bus à l'arrêt du lycée suit la loi ci-dessous. Arrondis au centième si besoin.

x_i	0	4	10
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

(a) Calcule $P(X \geqslant 4)$.

(b) Calcule $E(X)$.

(c) Le bus peut-il avoir exactement ce retard moyen lors d'un trajet ? Justifie.

(d) Calcule $E(X^2)$.

(e) Déduis-en $V(X)$.

(f) Calcule $\sigma(X)$ et précise son unité.

Ex. 2 ★☆☆ **Compléter une loi** — Les variables Y, Z, T et W sont étudiées séparément.

(a) Y prend les valeurs -3, 1 et 2 avec les probabilités 0,15 ; 0,6 et p. Calcule p.

(b) Avec la loi de Y complétée, calcule $E(Y)$.

(c) Z prend les valeurs 0, 1, 2, 3 avec les probabilités a, $2a$, $3a$, $4a$. Calcule a.

(d) Avec la loi de Z, calcule $E(Z)$ puis $V(Z)$.

(e) Pour T de valeurs 1, 2, 3, Malo propose les probabilités 0,5 ; 0,4 ; 0,2. Est-ce une loi de probabilité ? Justifie.

(f) W prend les valeurs -1 et 4, avec $P(W = 4) = q$ et $E(W) = 0$. Calcule q.

Ex. 3 ★★☆ **Le dé de la kermesse** — À la kermesse, Lina mise 3 € puis lance un dé équilibré à six faces. Avec un 6, elle reçoit 10 € ; avec un 4 ou un 5, elle reçoit 3 € ; sinon, rien. On note G son gain algébrique, en euros.

(a) Donne les valeurs prises par G, en expliquant le rôle de la mise.

(b) Donne la loi de G sous forme de tableau.

(c) Calcule $E(G)$, puis interprète le résultat.

Ex. 3 (suite)

(d) L'organisateur remplace les 10 € du 6 par une somme s, le reste étant inchangé. Trouve s pour que le jeu soit équitable.

Ex. 4 ★★☆ **Deux lancers francs** — Noé tire deux lancers francs. Il réussit le premier avec la probabilité 0,8. S'il l'a réussi, il réussit le second avec la probabilité 0,9 ; sinon, avec la probabilité 0,6. X est le nombre de paniers réussis. Arrondis au centième si besoin.

(a) Détermine la loi de X.

(b) Calcule $E(X)$.

(c) Calcule $E(X^2)$, puis compare-la à $E(X)^2$. Que peux-tu en conclure ?

(d) Rayan écrit $V(X) = E(X^2) - E(X)$. Explique son erreur, puis calcule $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Ex. 5 ★★★ **La mise juste du jeu des jetons** — Une urne contient 2 jetons dorés et 4 jetons argentés. Yanis paie une mise de a euros, puis tire successivement et sans remise deux jetons. Avec deux jetons dorés, il reçoit 15 € ; avec un seul, il reçoit 3 € ; sinon, rien. On note N le nombre de jetons dorés tirés et G le gain algébrique de Yanis, en euros.

(a) Décris en mots l'arbre de l'expérience, puis détermine la loi de N.

(b) Donne les valeurs prises par G en fonction de a, puis exprime $E(G)$ en fonction de a.

(c) Pour quelle mise le jeu est-il équitable ? Yanis en déduit qu'il ne gagne ni ne perd jamais rien. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Avec la mise trouvée à la question précédente, calcule $V(G)$ puis $\sigma(G)$, arrondi au centième, en précisant l'unité.

(e) L'organisateur veut gagner en moyenne 0,40 € par partie. Quelle mise doit-il fixer ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Les points au tir à l'arc** — Au stand de tir à l'arc, Sacha marque X points par volée (un tir raté hors cible coûte 2 points). La loi de X est donnée ci-dessous, avec a et b deux réels positifs. On sait que $E(X) = 0{,}9$.

x_i	-2	1	3	5
P(X = x_i)	a	b	0,2	0,1

(a) Écris deux équations vérifiées par a et b, puis calcule a et b.

(b) Calcule $V(X)$ avec la définition $V(X) = E\big((X - 0{,}9)^2\big)$, puis $\sigma(X)$ arrondi au centième, en précisant l'unité.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Nouvelle règle : chaque point compte double et chaque volée rapporte un point de bonus. Élise affirme que la variance du nouveau score vaut $2V(X)+1$. A-t-elle raison ? Justifie, puis donne l'écart type du nouveau score.

(d) Avec un autre arc, le score de Sacha a encore pour espérance 0,9 point, mais un écart type de 1,2 point. Avec quel arc ses scores sont-ils les plus réguliers ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Le quiz d'Inès** — Inès répond à un quiz de trois questions. Elle répond juste à la 1re, à la 2e et à la 3e question avec les probabilités respectives 0,9 ; 0,6 et 0,5, de façon indépendante. On note N le nombre de bonnes réponses. Une bonne réponse rapporte 3 points, une mauvaise en retire 1.

(a) Écris N comme une somme de trois variables qui valent 1 ou 0, puis calcule $E(N)$ par linéarité.

(b) En décrivant les chemins de l'arbre, détermine la loi de N.

(c) Calcule $E(N^2)$, puis $V(N)$ et $\sigma(N)$ arrondi au centième.

(d) Exprime le score S d'Inès en fonction de N, puis calcule $E(S)$ et $\sigma(S)$, arrondi au centième.

2. *Linéarité de l'espérance*

À retenir : $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$, même sans indépendance. Comptage : $N=X_1+\cdots+X_n$, où X_i vaut 1 si A_i a lieu, 0 sinon ; $E(X_i)=P(A_i)$. Piège : $E(X^2)\neq E(X)^2$ (si X vaut 0 ou 2 à chances égales : 2 contre 1).

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : transformer une variable** — La variable aléatoire X suit la loi ci-dessous.

x_i	-3	1	4
P(X = x_i)	0,2	0,5	0,3

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Calcule $E(4X+3)$ sans écrire la loi de $4X+3$.

(c) Calcule $E(5-2X)$.

(d) Calcule $E(X^2)$.

(e) Lina écrit « $E(X^2)=E(X)^2$ ». Compare les deux nombres et explique son erreur.

(f) Déduis-en $V(X)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : sommes et différences** — X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers, avec $E(X)=3{,}5$ et $E(Y)=-1{,}2$. On ne sait pas si elles sont indépendantes.

(a) Calcule $E(X-Y)$.

(b) Calcule $E(2X-3Y+1)$.

Ex. 9 **(suite)**

(c) Vrai ou faux : « On ignore si X et Y sont indépendantes, donc on ne peut pas calculer $E(X+Y)$. » Justifie.

(d) Détermine le réel a tel que $E(aX+7Y)=0$.

Ex. 10 ★★☆ **Roue et pièce truquée** — Jade fait tourner une roue qui donne X points, puis lance une pièce truquée qui donne Y points. Les deux expériences sont indépendantes. On note $S=X+Y$.

x_i	0	1	2
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

y_j	1	3
P(Y = y_j)	0,6	0,4

(a) Dresse un tableau à double entrée qui donne, pour chaque couple $(x_i\,;y_j)$, la valeur de S et sa probabilité.

(b) Déduis-en la loi de S.

(c) Calcule $E(S)$ à partir de la loi de S.

(d) Calcule $E(X)$ et $E(Y)$, puis vérifie ton résultat précédent par linéarité.

(e) Jade gagne un lot si $S\geqslant 4$. Calcule la probabilité qu'elle gagne un lot.

Ex. 11 ★★☆ **Escape game en trois épreuves** — L'équipe de Sarah enchaîne les trois épreuves d'un escape game. Elle réussit les épreuves 1, 2 et 3 avec les probabilités respectives 0,9 ; 0,6 et 0,35, mais ces réussites ne sont pas indépendantes (la fatigue joue). La partie coûte 12 € et chaque épreuve réussie rapporte 5 €. On note N le nombre d'épreuves réussies et $G=5N-12$ le gain en euros.

(a) Pour $i=1,2,3$, on pose $X_i=1$ si l'épreuve i est réussie et $X_i=0$ sinon. Exprime N à l'aide des X_i et donne $E(X_i)$.

(b) Justifie qu'on peut calculer $E(N)$ malgré la dépendance, puis calcule-la.

(c) Calcule $E(G)$ et interprète le résultat.

(d) L'équipe joue 6 parties, avec les mêmes probabilités à chaque fois. Calcule l'espérance de son gain total.

Ex. 12 ★★★ **Échange de cadeaux entre amis** — Inès et quatre amis apportent chacun un cadeau. On mélange les cinq cadeaux, puis on les redistribue au hasard, un par personne. Toutes les répartitions sont équiprobables. On note N le nombre de personnes qui récupèrent leur propre cadeau.

(a) Pour i allant de 1 à 5, on pose $X_i=1$ si la personne i récupère son propre cadeau, et $X_i=0$ sinon. Calcule $P(X_i=1)$.

(b) Exprime N à l'aide des X_i, puis calcule $E(N)$ sans chercher la loi de N. Interprète le résultat.

(c) Hugo affirme : « Les X_i ne sont pas indépendantes, donc ce calcul de $E(N)$ est faux. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 12 (suite)

(d) Le même échange a lieu avec n personnes ($n \geqslant 2$). Calcule l'espérance du nombre de personnes qui récupèrent leur propre cadeau.

(e) Explique pourquoi $P(N = 4) = 0$. Déduis-en que N ne suit pas la loi $\mathcal{B}\left(5\,;\frac{1}{5}\right)$, même si elle a la même espérance.

Ex. 13 ★★★ **Stand de fléchettes** — À un stand de fléchettes, Malo marque X points par partie. La loi de X est donnée ci-dessous. Le stand paie 1,50 € par point marqué, et une partie coûte 4 €. On note G le gain algébrique de Malo sur une partie (en euros).

x_i	0	2	5	10
P(X = x_i)	0,35	0,4	0,2	0,05

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Exprime G en fonction de X, puis calcule $E(G)$ sans écrire la loi de G. Interprète.

(c) Quelle mise m (en euros) faudrait-il demander pour que le jeu soit équitable ? Justifie.

(d) Avec une mise de 4 €, Malo joue 20 parties. On note T son gain total. Calcule $E(T)$ en justifiant.

(e) Un second stand paie $0{,}30 \times X^2$ euros (même X) pour une mise de 3,50 €. Léo prend $0{,}30 \times E(X)^2 - 3{,}50$ comme gain moyen. Corrige-le et conclus.

Ex. 14 ★★★ **Deux jetons tirés sans remise** — Une urne contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. Noé tire un jeton au hasard, le garde, puis tire un second jeton. On note X le numéro du premier jeton, Y celui du second, et $S = X + Y$. Les 12 couples $(x\,;y)$ possibles sont équiprobables.

(a) Dresse un tableau à double entrée qui donne S pour chaque couple $(x\,;y)$. Déduis-en la loi de S.

(b) Calcule $E(S)$ à l'aide de la loi de S.

(c) Détermine les lois de X et de Y, puis vérifie que $E(S) = E(X) + E(Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Commente.

(d) Noé reçoit $X - Y$ euros (s'il obtient un nombre négatif, il paie). Ce jeu est-il équitable ? Justifie sans chercher la loi de $X - Y$.

(e) Calcule $V(X)$ et $V(S)$. Compare $V(S)$ à $V(X) + V(Y)$ et explique la différence.

3. *Variance de aX + b*

À retenir : $V(aX + b) = a^2\,V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$: la constante b disparaît, a passe au carré. Ex. : $V(-3X + 1) = 9V(X)$ et $\sigma(-3X) = 3\sigma(X)$, jamais négatif. Attention : $V(aX + b) \neq aV(X) + b$.

Ex. 15 ★☆☆ **Transformations affines en ligne** — Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = -1{,}5$ et $V(X) = 2{,}25$. Calcule directement.

(a) $E(2X + 6)$ (b) $V(X + 10)$ (c) $V(3X)$

(d) $\sigma(-4X)$ (e) $V(-2X + 1)$ (f) $\sigma(0{,}5X - 7)$

Ex. 16 ★☆☆ **Retrouver une variance ou un écart type** — Calcule directement chaque valeur demandée.

(a) On sait que $\sigma(X) = 3$. Calcule $V(5X - 2)$.

(b) On sait que $\sigma(X) = 3$. Calcule $\sigma(-X + 4)$.

(c) On sait que $V(Y) = 0{,}16$. Calcule $\sigma(10Y)$.

(d) On sait que $V(2Z) = 36$. Calcule $V(Z)$.

(e) Avec la même variable Z, calcule $\sigma(-3Z + 1)$.

(f) On sait de plus que $E(Z) = 4$. Calcule $E(-3Z + 1)$.

Ex. 17 ★★☆ **Le gain aux fléchettes** — Noé paie 3 € pour lancer deux fléchettes et reçoit 5 € par cible touchée. On note X le nombre de cibles touchées :

x_i	0	1	2
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

Son gain algébrique est $G = 5X - 3$, en euros.

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Calcule $V(X)$ avec la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(c) Calcule $E(G)$ et interprète le résultat pour Noé.

(d) Léa écrit : « $V(G) = 5 \times V(X) - 3$ ». Repère son erreur, puis calcule $V(G)$ et $\sigma(G)$ (arrondi au centime).

Ex. 18 ★★☆ **Des euros aux dollars** — Le montant X, en euros, dépensé par un client d'une agence de voyages vérifie $E(X) = 80$ et $\sigma(X) = 12$. Pour un client américain, l'agence affiche le montant en dollars, frais compris : $Z = 1{,}15X + 6$.

(a) Calcule $E(Z)$.

(b) Calcule $\sigma(Z)$, puis $V(Z)$.

(c) Vrai ou faux : « Si les frais passent de 6 à 10 dollars, l'écart type de Z augmente de 4. » Justifie.

(d) Déduis-en $E(Z^2)$ à l'aide de $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$. Est-ce égal à $E(Z)^2$? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Harmoniser les notes d'un quiz** — Ben fait passer un quiz noté sur 10. La note X d'un élève pris au hasard suit cette loi :

x_i	4	6	8	10
P(X = x_i)	0,1	0,3	0,4	0,2

Ben veut transformer les notes en $Y = aX + b$ avec $a > 0$, pour obtenir $E(Y) = 12$ et $\sigma(Y) = 2{,}7$.

(a) Calcule $E(X)$.

Ex. 19 (suite)

(b) Calcule $V(X)$ avec la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, puis $\sigma(X)$.

(c) Détermine a et b. Justifie chaque étape.

(d) Pourquoi Ben impose-t-il $a > 0$? Détermine a et b si l'on prend $a < 0$, puis la note transformée d'un élève qui avait 4 et d'un élève qui avait 10. Conclus.

Ex. 20 ★★★ **La roue de la kermesse** — À la kermesse, Inès paie m euros pour faire tourner une roue. Chaque case affiche de 0 à 3 étoiles, et elle reçoit 4 € par étoile de la case obtenue. On note X ce nombre d'étoiles et G son gain algébrique, en euros :

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,4	0,35	0,2	0,05

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Exprime G en fonction de X et de m. Détermine m pour que le jeu soit équitable.

(c) Calcule $V(G)$ et $\sigma(G)$ arrondi au centime. Explique pourquoi ces résultats ne dépendent pas de m.

(d) Le forain fixe $m = 5$. Son bénéfice par partie est $B = -G$. Hugo écrit $\sigma(B) = -4\,\sigma(X)$. Corrige-le, puis calcule $E(B)$ et $\sigma(B)$.

Ex. 21 ★★★ **Deux devis de plombier** — Sacha compare deux plombiers. La durée X d'une intervention, en minutes, suit cette loi :

x_i	30	45	60	75
P(X = x_i)	0,1	0,4	0,3	0,2

On note $H = \frac{X}{60}$ la durée en heures. Tarif A : 25 € de forfait plus 40 € de l'heure. Tarif B : 70 € de l'heure, sans forfait.

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Déduis-en $E(H)$, $V(H)$ et $\sigma(H)$ arrondi au centième. Cite la propriété utilisée.

(c) Exprime le prix P_A en fonction de H. Calcule $E(P_A)$ et $\sigma(P_A)$ arrondi au centime. Le forfait change-t-il la dispersion ? Justifie.

(d) Calcule $E(P_B)$ et $\sigma(P_B)$. Quel tarif conseilles-tu à Sacha ? Argumente avec ces deux indicateurs.

4. *Variance d'une somme de variables indépendantes*

À retenir : Si X et Y sont indépendantes (justifié par l'énoncé) : $V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y)$, donc $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$. On additionne les variances, puis racine : $\sigma(X + Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$. Et $V(2X) = 4V(X)$ mais $V(X_1 + X_2) = 2V(X)$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : deux capteurs indépendants** — Deux capteurs d'une serre fonctionnent indépendamment l'un de l'autre. On note X et Y leurs erreurs de mesure (en dixièmes de degré), avec $E(X) = 4$, $V(X) = 5$, $E(Y) = -2$ et $V(Y) = 11$. Arrondis au millième si besoin.

(a) Calcule $E(X + Y)$.

(b) Calcule $V(X + Y)$ en citant la propriété utilisée.

(c) Calcule $\sigma(X + Y)$, puis $\sigma(X) + \sigma(Y)$. Ces deux nombres sont-ils égaux ?

(d) Vrai ou faux : « $V(X - Y) = V(Y) - V(X)$ ». Justifie.

(e) Calcule $V(2X + 3Y)$.

(f) Calcule $E(2X - 3Y + 1)$.

(g) Calcule $\sigma(3X - Y + 7)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : deux lancers ou un lancer doublé ?** — Une roue de fête foraine affiche un nombre de points X dont la loi est :

x_i	1	2	4
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

Noé fait tourner la roue deux fois (lancers indépendants), obtient X_1 et X_2, et marque $S = X_1 + X_2$. Lou la fait tourner une seule fois et marque $T = 2X$. Arrondis au millième.

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Calcule $V(X)$.

(c) Calcule $E(S)$ et $E(T)$.

(d) Calcule $V(S)$.

(e) Calcule $V(T)$.

(f) Calcule $\sigma(S)$ et $\sigma(T)$. Quel score est le plus dispersé ?

Ex. 24 ★★☆ **Assemblage de pièces : deux erreurs à corriger** — Une tige est formée de deux pièces fabriquées par deux machines distinctes qui fonctionnent indépendamment. Leurs longueurs L_1 et L_2 (en mm) vérifient $E(L_1) = 50$, $\sigma(L_1) = 0{,}3$, $E(L_2) = 30$ et $\sigma(L_2) = 0{,}4$. La tige mesure $L = L_1 + L_2$.

(a) Justifie que L_1 et L_2 sont indépendantes, puis calcule $E(L)$ et $V(L)$.

(b) Tom écrit : « $\sigma(L) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$ mm ». A-t-il raison ? Justifie et corrige si besoin.

(c) On note $D = L_1 - L_2$ l'écart de longueur entre les deux pièces. Léa écrit $V(D) = V(L_1) - V(L_2)$. Calcule ce qu'elle obtient, explique son erreur, puis donne $E(D)$ et $\sigma(D)$.

Ex. 25 ★★☆ **Vrai ou faux : quand la formule s'applique-t-elle ?** — À un jeu de cartes, le gain X (en euros) d'une partie suit la loi :

x_i	-2	3
P(X = x_i)	0,6	0,4

Arrondis au millième.

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Affirmation 1 : « Si $Y = X$ (on compte deux fois la même partie), alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Affirmation 2 : « Pour deux parties indépendantes de gains X_1 et X_2, $\sigma(X_1 - X_2) = 0$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Affirmation 3 : « Pour deux parties indépendantes, $\sigma(X_1 + X_2) = 2\sigma(X)$. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **Duel de fléchettes : l'écart de score** — Inès et Malo lancent chacun une fléchette, sans s'influencer. Le score X d'Inès et le score Y de Malo suivent les lois :

x_i	0	2	5
P(X = x_i)	0,2	0,5	0,3

y_i	1	3
P(Y = y_i)	0,4	0,6

On note $D = X - Y$ l'écart de score. Arrondis à 0,01.

(a) Calcule $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

(b) Justifie que X et Y sont indépendantes, puis calcule $E(D)$, $V(D)$ et $\sigma(D)$.

(c) Construis le tableau à double entrée des valeurs de D et de leurs probabilités, déduis-en la loi de D, puis retrouve $E(D)$ et $V(D)$.

(d) Inès gagne la manche lorsque $D > 0$. Calcule la probabilité p qu'elle gagne une manche, puis compare avec le signe de $E(D)$.

(e) Ils jouent 20 manches indépendantes ; N est le nombre de manches gagnées par Inès. Écris N comme une somme de variables de Bernoulli, puis calcule $E(N)$ et $\sigma(N)$.

Ex. 27 ★★★ **Le stand de Léna : bénéfice d'un jour, d'une semaine** — Chaque jour de marché, Léna vend X bracelets et Y colliers à deux clientèles distinctes : les ventes sont indépendantes. On a $E(X) = 12$, $\sigma(X) = 3$, $E(Y) = 6$ et $\sigma(Y) = 2$. Son bénéfice du jour (en euros), frais de stand déduits, est $B = 2X + 3Y - 5$. Arrondis au centime.

(a) Calcule $E(B)$ en citant la propriété utilisée.

(b) Calcule $V(B)$, puis $\sigma(B)$ (valeur exacte puis arrondie). Justifie chaque étape.

(c) Léna envisage un autre prix pour les colliers : son bénéfice serait $B' = 2X + kY - 5$. Détermine k pour que $E(B') = 49$, puis calcule $\sigma(B')$.

Ex. 27 (suite)

(d) On revient au bénéfice B. Sur 5 jours de marché indépendants, on note T la somme des 5 bénéfices. Calcule $E(T)$ et $\sigma(T)$.

(e) Léna estime son bénéfice de la semaine par $5B$ (un seul jour multiplié par 5). Calcule $\sigma(5B)$ et explique l'écart avec $\sigma(T)$.

Ex. 28 ★★★ **Jeu de grattage : rendre le jeu équitable** — À un jeu de grattage, le gain net X (en euros) d'une partie suit la loi :

x_i	-1	1	4
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

Les tickets sont tirés au hasard dans un très grand stock : les parties sont indépendantes. Yanis tient le stand : sur chaque partie, son gain est $-X$. Arrondis à 0,01.

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Zoé joue deux parties ; X_1 et X_2 sont ses gains. Justifie leur indépendance, puis calcule l'espérance et l'écart type de $G = X_1 + X_2$.

(c) Sami additionne les gains de Zoé et de Yanis sur une même partie et écrit : « $V(X + (-X)) = V(X) + V(-X)$ ». Explique son erreur.

(d) L'organisateur retire c euros au gain de chaque partie : le gain devient $X - c$. Détermine c pour que le jeu soit équitable, puis donne $V(X - c)$.

(e) Zoé joue n parties indépendantes de ce jeu équitable ; M_n est son gain moyen. Détermine le plus petit n tel que $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}2$.

5. *Somme et moyenne d'un échantillon*

À retenir : Total S_n : $E = n\mu$, $V = n\sigma^2$, $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$. Moyenne M_n : $E = \mu$, $V = \frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si l'énoncé donne l'écart type, je l'élève au carré. Ex. : $\sigma = 2$, $n = 25$: $V(S_n) = 100$, $\sigma(M_n) = 0{,}4$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : total ou moyenne ?** — Les répétitions sont indépendantes et de même loi. Appels : la durée X d'un appel vérifie $E(X) = 6$ min et $V(X) = 9$. Pommes : la masse Y d'une pomme vérifie $E(Y) = 180$ g et $\sigma(Y) = 12$ g.

(a) Calcule l'espérance et la variance de la durée totale S_{40} de 40 appels.

(b) Calcule l'espérance et la variance de la durée moyenne M_{40} de 40 appels.

(c) Calcule la variance de la masse totale T_{16} de 16 pommes.

(d) Calcule l'écart type de la masse totale T_{16} de 16 pommes.

Ex. 29 **(suite)**

e) Calcule l'écart type de la masse moyenne d'une pomme sur un lot de 16 pommes.

f) Une action varie chaque jour de G € avec $E(G) = -0{,}30$ et $\sigma(G) = 2{,}5$. Calcule l'espérance et l'écart type de sa variation totale sur 64 jours.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : d'une fléchette à cinquante** — Le score X d'une fléchette lancée par Inès suit la loi ci-dessous. Inès lance 50 fléchettes de façon indépendante ; S_{50} est son score total et M_{50} son score moyen. Arrondis à 0,01 près si besoin.

x_i	0	1	3	5
P(X = x_i)	0,2	0,4	0,3	0,1

a) Calcule $E(X)$.

b) Calcule $V(X)$.

c) Calcule $E(S_{50})$ et $V(S_{50})$.

d) Calcule $\sigma(S_{50})$.

e) Calcule $E(M_{50})$ et $V(M_{50})$.

f) Calcule $\sigma(X)$ et $\sigma(M_{50})$.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur de Lina sur les baguettes** — La masse X d'une baguette vérifie $E(X) = 250$ g et $\sigma(X) = 6$ g ; les baguettes sont produites indépendamment. Un lot contient 36 baguettes, de masse totale S_{36}. Lina écrit : « $E(S_{36}) = 36 \times 250 = 9\,000$ g et $\sigma(S_{36}) = 36 \times 6 = 216$ g ».

a) Lina a-t-elle raison pour $E(S_{36})$? Justifie en citant la propriété utilisée.

b) Lina a-t-elle raison pour $\sigma(S_{36})$? Justifie, puis corrige.

c) Calcule l'écart type de la masse moyenne M_{36} des 36 baguettes, compare-le à $\sigma(X)$ et interprète.

Ex. 32 ★★☆ **Note moyenne d'un concours** — À un concours, la note X d'une copie prise au hasard vérifie $E(X) = 11{,}5$ et $\sigma(X) = 3$. Un correcteur prélève n copies ; leurs notes sont indépendantes et de même loi que X. On note S_n le total des notes et $M_n = \frac{S_n}{n}$ la note moyenne.

a) Pour $n = 9$, calcule $E(M_9)$ et $\sigma(M_9)$.

b) Détermine le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}1$.

c) Noé affirme : « Pour diviser $\sigma(M_n)$ par 2, il suffit de doubler n. » A-t-il raison ? Justifie.

d) Pour la valeur de n trouvée à la question b), calcule $\sigma(S_n)$, compare-le à $\sigma(M_n)$ et interprète.

Ex. 33 ★★★ **La roue de la kermesse** — À la kermesse, Yanis joue à la roue. Son gain algébrique X, en euros, suit la loi ci-dessous. Les parties sont indépendantes. Sur n parties, S_n est le gain total et $M_n = \frac{S_n}{n}$ le gain moyen par partie. Arrondis au centième si besoin.

x_i	-2	1	6
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

a) Calcule $\mu = E(X)$, puis $\sigma^2 = V(X)$ avec la formule $E(X^2) - E(X)^2$.

b) Yanis joue 100 parties. Justifie que l'on peut appliquer les formules d'un échantillon, puis calcule $E(S_{100})$ et $\sigma(S_{100})$.

c) Pour $n = 400$, calcule $E(M_{400})$ et $\sigma(M_{400})$.

d) Le forain affirme : « Plus Yanis joue, plus son gain total est imprévisible, mais plus son gain moyen est prévisible. » Justifie en exprimant $\sigma(S_n)$ et $\sigma(M_n)$ en fonction de n.

Ex. 34 ★★★ **Une palette de colis** — La masse X d'un colis vérifie $E(X) = 4{,}2$ kg et $\sigma(X) = 1{,}5$ kg. Les colis sont remplis indépendamment. On charge 25 colis sur une palette, dont la masse P vérifie $E(P) = 20$ kg et $\sigma(P) = 2$ kg, indépendante des colis. On note S_{25} la masse totale des colis et M_{25} leur masse moyenne. Arrondis au centième.

a) Justifie que les masses des 25 colis forment un échantillon, puis calcule $E(S_{25})$.

b) Calcule $V(S_{25})$, puis $\sigma(S_{25})$.

c) Le client exige que la masse moyenne d'un colis du lot ait un écart type d'au plus 0,25 kg. Un lot de 25 colis convient-il ? Justifie.

d) On note $T = S_{25} + P$ la masse de la palette chargée. Calcule $E(T)$ et $\sigma(T)$ en justifiant.

e) Le transporteur facture 0,80 € par kg et ajoute un forfait de 15 €. Exprime le prix C en fonction de T, puis calcule $E(C)$ et $\sigma(C)$.

Ex. 35 ★★★ **Sondage sur le vélo** — Dans une grande ville, 30 % des actifs vont travailler à vélo. On interroge n actifs au hasard. La population est assez grande pour que les réponses soient indépendantes. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, X_i vaut 1 si la i-ème personne va travailler à vélo et 0 sinon. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $F_n = \frac{S_n}{n}$.

a) Donne la loi de X_1, puis calcule $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

b) Justifie que S_n suit une loi binomiale, puis exprime $E(S_n)$ et $V(S_n)$ en fonction de n en citant les propriétés utilisées.

c) F_n est la fréquence des cyclistes dans l'échantillon. Exprime $E(F_n)$ et $\sigma(F_n)$ en fonction de n.

d) On interroge $n = 400$ actifs. Calcule $E(S_{400})$ et $\sigma(S_{400})$, puis $\sigma(F_{400})$ à 0,001 près.

Ex. 35 **(suite)**

(e) Un autre institut interroge 1 600 actifs. Mila affirme : « Son nombre de cyclistes est plus dispersé, mais sa fréquence l'est moins. » A-t-elle raison ? Justifie.

6. *Loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli*

À retenir : $X_i = 1$ si succès, 0 sinon : $E(X_i) = p$, $V(X_i) = p(1-p)$. Pour $\mathcal{B}(n\,;p)$: $E = np$ (linéarité), $V = np(1-p)$ (indépendance), ex. $\mathcal{B}(50\,;0{,}2)$: $V = 8$, $\sigma = \sqrt{8}$. La somme n'est binomiale que si le p est le même.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : espérance, variance, écart type** — Arrondis à 0,001 près si nécessaire.

(a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,35. Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Y suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}15)$. Calcule $E(Y)$.

(c) Y suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}15)$. Calcule $V(Y)$ puis $\sigma(Y)$.

(d) Z suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}2)$ et $E(Z) = 12$. Trouve n, puis calcule $V(Z)$.

(e) T suit $\mathcal{B}(100\,;0{,}1)$. Lina affirme que $\sigma(T) = 9$. Repère son erreur et corrige-la.

(f) Y suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}15)$ et $F = \frac{Y}{40}$. Calcule $E(F)$ et $\sigma(F)$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : sommes de binomiales** — X et Y sont indépendantes ; X suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}4)$ et Y suit $\mathcal{B}(8\,;0{,}4)$.

(a) Donne la loi de $X + Y$ en justifiant.

(b) Calcule $E(X+Y)$ et $V(X+Y)$.

(c) Calcule $\sigma(X+Y)$ à 0,01 près.

(d) Calcule $E(X-Y)$ et $V(X-Y)$.

(e) Vrai ou faux : $X + X$ suit $\mathcal{B}(24\,;0{,}4)$. Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Démonstration guidée : les bulbes de Chloé** — Chloé plante 18 bulbes de tulipes. Chacun fleurit avec la probabilité 0,85, indépendamment des autres. On note S le nombre de bulbes qui fleurissent.

(a) Pour i de 1 à 18, $X_i = 1$ si le i-ième bulbe fleurit, 0 sinon. Calcule $E(X_i)$, $E(X_i^2)$, puis $V(X_i)$.

(b) Écris S à l'aide des X_i, puis calcule $E(S)$ en citant la propriété utilisée.

(c) Calcule $V(S)$, puis $\sigma(S)$ à 0,01 près, en précisant l'hypothèse de l'énoncé utilisée.

(d) Une gelée pourrait détruire tous les bulbes d'un coup, et chaque bulbe fleurirait toujours avec la probabilité 0,85. Le calcul de $E(S)$ reste-t-il valable ? Et celui de $V(S)$? Justifie.

Ex. 39 ★★☆ **Stand de palets à la kermesse** — Noé joue 10 parties de palets. Chaque partie coûte 1 € et est gagnée avec la probabilité 0,3, indépendamment des autres. Chaque partie gagnée rapporte 3 €. On note X le nombre de parties gagnées et G le gain algébrique de Noé, en euros.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres, puis exprime G en fonction de X.

(b) Calcule $E(G)$ et $\sigma(G)$ à 0,01 près, puis interprète $E(G)$.

(c) Quelle probabilité de gagner une partie rendrait le jeu équitable ?

(d) Maëlle gagne chacune de ses 10 parties avec la probabilité 0,4, indépendamment de Noé. T est le total des parties gagnées par les deux. Calcule $E(T)$ et $V(T)$. T est-elle binomiale ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Deux machines dans un atelier** — La machine A fabrique 40 pièces, chacune défectueuse avec la probabilité 0,05. La machine B en fabrique 60, chacune défectueuse avec la probabilité 0,02. Les pièces sont défectueuses indépendamment les unes des autres. D_A et D_B sont les nombres de pièces défectueuses de A et de B, et $D = D_A + D_B$. Arrondis à 0,01 près.

(a) Décompose D_A en une somme de variables de Bernoulli. Déduis-en la loi de D_A et celle de D_B, puis calcule $E(D_A)$ et $E(D_B)$.

(b) Calcule $E(D)$ et $V(D)$ en citant les propriétés utilisées.

(c) Léa affirme : « D suit $\mathcal{B}(100\,;0{,}032)$ ». Calcule l'espérance et la variance de cette loi, puis dis si Léa a raison. Justifie.

(d) Réparer une pièce défectueuse coûte 12 €, et il faut ajouter 20 € de frais fixes. On note $C = 12D + 20$ le coût total. Calcule $E(C)$ et $\sigma(C)$, puis interprète $E(C)$.

Ex. 41 ★★★ **Le sondage d'Inès** — Inès réalise un sondage. Chaque personne interrogée répond « oui » avec la probabilité p, indépendamment des autres. On note S_n le nombre de « oui » parmi n personnes, et $F = \frac{S_n}{n}$ la fréquence de « oui ». Arrondis à 0,001 près si nécessaire.

(a) Démontre que $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$. Rédige complètement : définis les variables utilisées et cite chaque propriété.

(b) Inès interroge 400 personnes et $p = 0{,}6$. Calcule $E(S_{400})$, $V(S_{400})$ et $\sigma(S_{400})$.

(c) Tom écrit : « $\sigma(F) = \frac{\sigma(S_{400})}{\sqrt{400}}$ ». Explique son erreur, puis calcule $E(F)$ et $\sigma(F)$.

(d) Toujours avec $p = 0{,}6$, combien de personnes Inès doit-elle interroger au minimum pour que $\sigma(F) \leqslant 0{,}01$?

Ex. 42 ★★★ **Le défi du six entre Yanis et Margot** — Yanis lance 12 fois un dé équilibré et Margot 18 fois. Tous les lancers sont indépendants. Y et M sont les nombres de « 6 » de chacun, et $T = Y + M$. Chaque lancer coûte 2 € et chaque « 6 » rapporte a €. G est le gain total du duo. Arrondis à 0,01 près.

(a) Donne la loi de Y et celle de M. Déduis-en la loi de T en justifiant.

(b) Exprime G en fonction de T et de a. Détermine a pour que le jeu soit équitable.

(c) Avec cette valeur de a, Margot affirme : « $\sigma(T) = \frac{25}{6}$ ». Corrige-la, puis calcule $V(G)$ et $\sigma(G)$.

(d) Margot propose une autre règle : seuls ses « 6 » comptent, à 20 € chacun, et le duo paie toujours 60 €. Ce jeu est-il équitable ? Justifie.

(e) Les deux règles ont la même espérance. Laquelle est la moins risquée pour le duo ? Justifie à l'aide des écarts types.

7. *Problèmes type bac*

À retenir : Échantillon de taille n : $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = n\sigma^2$; $E(M_n) = \mu$, $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$. Dans $aX + b$, la constante b ne change pas la variance. Si $\sigma = 2$ et $n = 9$: $V(S_9) = 9 \times 4 = 36$, et non 18.

Ex. 43 ★☆☆ **File d'attente au guichet** — À un guichet de la poste, le temps de service X d'un client (en minutes) vérifie $E(X) = 4$ et $\sigma(X) = 1{,}5$. Les temps de service de 36 clients forment un échantillon de taille 36 de la loi de X. On note S_{36} le temps total de service et $M_{36} = \frac{S_{36}}{36}$ le temps moyen.

(a) Calcule $E(S_{36})$.

(b) Lucas écrit $V(S_{36}) = 36 \times 1{,}5 = 54$. Corrige son calcul.

(c) Déduis-en $\sigma(S_{36})$.

(d) Calcule $E(M_{36})$ et $\sigma(M_{36})$.

(e) On observe maintenant 100 clients ; S_{100} est leur temps total de service. Calcule $\sigma(S_{100})$.

Ex. 44 ★☆☆ **Sinistres d'un assuré** — Le nombre X de sinistres déclarés en un an par un client d'une assurance suit la loi ci-dessous. Le coût annuel de gestion de ce client est $C = 200X + 30$ (en euros). Le nombre Y de sinistres d'un second client est indépendant de X et suit la même loi.

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,4	0,3	0,2	0,1

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Calcule $V(X)$ à l'aide de $E(X^2) - E(X)^2$.

(c) Calcule $E(C)$.

(d) Calcule $\sigma(C)$.

Ex. 44 (suite)

(e) Calcule $V(X + Y)$.

(f) Le coût de gestion du second client est $C' = 200Y + 30$. Calcule $E(C + C')$ et $V(C + C')$.

Ex. 45 ★★☆ **Roue de la fête foraine** — À un stand de fête foraine, une partie coûte 4 €. La roue rapporte au joueur un gain brut G (en euros) dont la loi est donnée ci-dessous. On note $N = G - 4$ le gain net du joueur.

g_i	0	5	20
P(G = g_i)	0,6	0,3	0,1

(a) Calcule $E(G)$ et $V(G)$.

(b) Calcule $E(N)$ et $V(N)$. Interprète $E(N)$.

(c) Quelle mise rendrait le jeu équitable ?

(d) Sans changer la mise ni les probabilités, le forain veut gagner en moyenne 1 € par partie. Quel gain doit remplacer les 20 € ? Calcule alors $V(G)$.

Ex. 46 ★★☆ **Trajet en trois étapes** — Inès va au lycée en trois étapes de durées indépendantes (en minutes) : la marche T_1, avec $E(T_1) = 8$ et $\sigma(T_1) = 1$; le bus T_2, avec $E(T_2) = 15$ et $\sigma(T_2) = 3$; l'attente du bus T_3, de loi ci-dessous. On pose $T = T_1 + T_2 + T_3$. Arrondis au millième si besoin.

t_i	0	2	4	6
P(T_3 = t_i)	0,25	0,25	0,25	0,25

(a) Calcule $E(T_3)$ et $V(T_3)$.

(b) Calcule $E(T)$ et interprète-la.

(c) Inès affirme que $\sigma(T) = 1 + 3 + \sigma(T_3)$. A-t-elle raison ? Calcule $\sigma(T)$.

(d) Sur 20 trajets indépendants, on note D la durée totale. Calcule $E(D)$ et $\sigma(D)$.

(e) Calcule l'écart type de la durée moyenne d'un trajet sur ces 20 trajets.

Ex. 47 ★★★ **Contrôle qualité de boîtes de vis** — Une usine vend ses vis par boîtes. Le nombre X de vis défectueuses dans une boîte suit la loi ci-dessous. Remplacer une vis coûte 2 € et contrôler une boîte coûte 0,50 €. Le coût de contrôle d'une boîte est donc $C = 2X + 0{,}5$ (en euros). Les boîtes sont contrôlées de façon indépendante. Arrondis au centième si besoin.

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,15	0,05

(a) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Déduis-en $E(C)$ et $\sigma(C)$ en citant les propriétés utilisées.

(c) On contrôle un lot de 400 boîtes. On note T son coût total. Justifie le modèle, puis calcule $E(T)$ et $\sigma(T)$.

Ex. 47 **(suite)**

(d) La responsable affirme : « le coût moyen par boîte du lot, $M_{400} = \frac{T}{400}$, est aussi dispersé que le coût d'une seule boîte ». A-t-elle raison ? Justifie.

(e) On note M_n le coût moyen par boîte d'un lot de n boîtes. Détermine la plus petite valeur de n telle que $V(M_n) \leqslant 0{,}01$.

Ex. 48 ★★★ **Stand de penalties du club de handball** — Au stand d'un club de handball, un joueur paie une mise de m euros puis tire 10 penalties. Les tirs sont indépendants et chacun est réussi avec une probabilité de 0,35. Le joueur reçoit 3 € par but. On note N le nombre de buts. Pour i allant de 1 à 10, $X_i = 1$ si le i-ème tir est réussi et $X_i = 0$ sinon. Arrondis au centième si besoin.

(a) Donne la loi de X_1, puis calcule $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

(b) Écris N à l'aide des X_i. Déduis-en $E(N)$ et $V(N)$ en justifiant chaque propriété utilisée.

(c) Le bénéfice du club sur un joueur est $B = m - 3N$. Détermine la mise minimale m pour que le club gagne en moyenne au moins 2 € par joueur.

(d) Le club fixe finalement la mise à $m = 13$ €. Calcule $E(B)$ et $\sigma(B)$.

(e) Dans la journée, 50 joueurs jouent indépendamment les uns des autres. Calcule l'espérance et l'écart type du bénéfice total du club, puis interprète.

Ex. 49 ★★★ **Atelier de réparation de vélos** — Dans l'atelier de Yanis, le nombre X de vélos réparés le matin et le nombre Y de vélos réparés l'après-midi sont indépendants. Leurs lois sont données ci-dessous. On note $T = X + Y$ le nombre de vélos réparés dans la journée. Arrondis au centième si besoin.

x_i	1	2	3
P(X = x_i)	0,2	0,5	0,3

y_j	0	1	2
P(Y = y_j)	0,4	0,4	0,2

(a) Calcule $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

(b) À l'aide d'un tableau à double entrée, détermine la loi de T.

(c) Calcule $E(T)$ et $V(T)$ à partir de la loi de T, puis retrouve ces deux résultats avec les propriétés du cours.

(d) Chaque vélo réparé rapporte 25 € et les charges fixes s'élèvent à 30 € par jour. Le résultat du jour est $R = 25T - 30$. Calcule $E(R)$ et $\sigma(R)$.

(e) Hugo étudie $D = X - Y$ et écrit : « $V(D) = V(X) - V(Y)$ ». Montre que son résultat est absurde, puis calcule $E(D)$ et $V(D)$.