1. *Rappels de 1re : loi, espérance, variance, écart type*

Ex. 1 ★☆☆ Le retard du bus

(a) $P(X \geqslant 4) = P(X=4) + P(X=10) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$.

(b) $E(X) = 0 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}2 = 1{,}2 + 2 = 3{,}2$ min.

(c) Non : X ne prend que les valeurs 0, 4 et 10. $E(X) = 3{,}2$ est une moyenne théorique : sur un grand nombre de trajets, le retard moyen est proche de 3,2 min.

(d) $E(X^2) = 0^2 \times 0{,}5 + 4^2 \times 0{,}3 + 10^2 \times 0{,}2 = 4{,}8 + 20 = 24{,}8$.

(e) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 24{,}8 - 3{,}2^2 = 24{,}8 - 10{,}24 = 14{,}56$.

(f) $\sigma(X) = \sqrt{14{,}56} \approx 3{,}82$ minutes : l'écart type a la même unité que X.

Ex. 2 ★☆☆ Compléter une loi

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $p = 1 - 0{,}15 - 0{,}6 = 0{,}25$.

(b) $E(Y) = -3 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}6 + 2 \times 0{,}25 = -0{,}45 + 0{,}6 + 0{,}5 = 0{,}65$.

(c) $a + 2a + 3a + 4a = 1$, donc $10a = 1$ et $a = 0{,}1$.

(d) $E(Z) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}4 = 2$; $E(Z^2) = 0{,}2 + 1{,}2 + 3{,}6 = 5$, donc $V(Z) = 5 - 2^2 = 1$.

(e) Non : $0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1{,}1 \neq 1$. La somme des probabilités d'une loi doit valoir 1.

(f) $P(W=-1) = 1 - q$, donc $-(1-q) + 4q = 0$, soit $5q = 1$ et $q = 0{,}2$.

Ex. 3 ★★☆ Le dé de la kermesse

(a) On retire la mise à la somme reçue : $10 - 3 = 7$; $3 - 3 = 0$; $0 - 3 = -3$.
Donc G prend les valeurs -3, 0 et 7.

(b) Le dé est équilibré : $P(G=7) = \frac{1}{6}$, $P(G=0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(G=-3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (somme égale à 1).

g_i	-3	0	7
P(G = g_i)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(c) $E(G) = -3 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 7 \times \frac{1}{6} = -\frac{9}{6} + \frac{7}{6} = -\frac{1}{3} \approx -0{,}33$ €. Sur un grand nombre de parties, Lina perd en moyenne environ 0,33 € par partie : le jeu lui est défavorable.

Ex. 3 (suite)

(d) Avec un 6, $G = s - 3$. Équitable $\iff E(G) = 0$: $\frac{s-3}{6} - \frac{3}{2} = 0$, donc $s - 3 = 9$ et $s = 12$ €.

Ex. 4 ★★☆ Deux lancers francs

(a) En suivant les branches de l'arbre décrit : $P(X=2) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$; $P(X=1) = 0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}2$; $P(X=0) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$. Somme : 1.

x_i	0	1	2
P(X = x_i)	0,08	0,2	0,72

(b) $E(X) = 0 \times 0{,}08 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}72 = 1{,}64$ panier.

(c) $E(X^2) = 1^2 \times 0{,}2 + 2^2 \times 0{,}72 = 3{,}08$, alors que $E(X)^2 = 1{,}64^2 = 2{,}6896$.
Donc $E(X^2) \neq E(X)^2$: on ne peut pas « sortir » le carré de l'espérance.

(d) Il faut soustraire le carré de l'espérance : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3{,}08 - 2{,}6896 = 0{,}3904$. Puis $\sigma(X) = \sqrt{0{,}3904} \approx 0{,}62$ panier.

Ex. 5 ★★★ La mise juste du jeu des jetons

(a) Premier tirage : doré avec la probabilité $\frac{2}{6}$, argenté avec $\frac{4}{6}$. Au second tirage il reste 5 jetons : après un doré, doré avec $\frac{1}{5}$; après un argenté, doré avec $\frac{2}{5}$. $P(N=2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$; $P(N=0) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$; $P(N=1) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$. Vérification : $\frac{1+8+6}{15} = 1$.

(b) On retire la mise de ce qu'il reçoit : G prend les valeurs $15 - a$, $3 - a$ et $-a$, avec les probabilités $\frac{1}{15}$, $\frac{8}{15}$ et $\frac{6}{15}$. $E(G) = \frac{1}{15}(15 - a) + \frac{8}{15}(3 - a) + \frac{6}{15}(-a) = \frac{15+24}{15} - a = 2{,}6 - a$.

(c) Le jeu est équitable si et seulement si $E(G) = 0$, c'est-à-dire $a = 2{,}60$ €. Yanis a tort : G vaut alors 12,40 €, 0,40 € ou $-2{,}60$ €, jamais 0. $E(G) = 0$ est une moyenne théorique : sur un grand nombre de parties, le gain moyen est proche de 0.

(d) Avec $a = 2{,}6$, $E(G) = 0$ et $E(G^2) = \frac{1}{15} \times 12{,}4^2 + \frac{8}{15} \times 0{,}4^2 + \frac{6}{15} \times 2{,}6^2 = \frac{195{,}6}{15} = 13{,}04$.
Donc $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 13{,}04$ (en €²) et $\sigma(G) = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61$ €.

(e) Le gain moyen de l'organisateur est $-E(G) = a - 2{,}6$. On veut $a - 2{,}6 = 0{,}4$, donc $a = 3$ € : il faut fixer la mise à 3 €. Le jeu est alors défavorable au joueur, puisque $E(G) = -0{,}40$ €.

Ex. 6 ★★★ **Les points au tir à l'arc**

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $a+b+0{,}2+0{,}1=1$, soit $a+b=0{,}7$. L'espérance donne $-2a+b+3\times 0{,}2+5\times 0{,}1=0{,}9$, soit $-2a+b=-0{,}2$. En soustrayant : $3a=0{,}9$, donc $a=0{,}3$ et $b=0{,}4$.

(b) $V(X)=0{,}3\times(-2{,}9)^2+0{,}4\times 0{,}1^2+0{,}2\times 2{,}1^2+0{,}1\times 4{,}1^2=2{,}523+0{,}004+0{,}882+1{,}681=5{,}09$. Donc $\sigma(X)=\sqrt{5{,}09}\approx 2{,}26$ points (σ s'exprime dans l'unité de X).

(c) Le nouveau score est $Y=2X+1$. Élise a tort : $V(aX+b)=a^2V(X)$, donc $V(Y)=2^2\times 5{,}09=20{,}36$, et non $2\times 5{,}09+1=11{,}18$. Le bonus décale tous les scores sans changer leur dispersion ; le doublement multiplie la variance par 4. Alors $\sigma(Y)=|2|\,\sigma(X)=2\sqrt{5{,}09}\approx 4{,}51$ points.

(d) Les deux arcs donnent la même espérance, 0,9 point. Le second a un écart type plus petit ($1{,}2<2{,}26$) : ses scores sont moins dispersés autour de 0,9. Les scores de Sacha sont donc plus réguliers avec le second arc.

Ex. 7 ★★★ **Le quiz d'Inès**

(a) Pour $i\in\{1;2;3\}$, on pose $X_i=1$ si Inès répond juste à la question i, 0 sinon. Alors $N=X_1+X_2+X_3$ et $E(X_i)$ est la probabilité de répondre juste. Par linéarité de l'espérance, $E(N)=0{,}9+0{,}6+0{,}5=2$: en moyenne, 2 bonnes réponses.

(b) Par indépendance, on multiplie les probabilités le long d'un chemin. $P(N=0)=0{,}1\times 0{,}4\times 0{,}5=0{,}02$. $P(N=1)=0{,}9\times 0{,}4\times 0{,}5+0{,}1\times 0{,}6\times 0{,}5+0{,}1\times 0{,}4\times 0{,}5=0{,}23$. $P(N=3)=0{,}9\times 0{,}6\times 0{,}5=0{,}27$. $P(N=2)=1-0{,}02-0{,}23-0{,}27=0{,}48$.

(c) $E(N^2)=1\times 0{,}23+4\times 0{,}48+9\times 0{,}27=4{,}58$. Donc $V(N)=E(N^2)-E(N)^2=4{,}58-2^2=0{,}58$ et $\sigma(N)=\sqrt{0{,}58}\approx 0{,}76$ bonne réponse.

(d) Avec N bonnes réponses et $3-N$ mauvaises : $S=3N-(3-N)=4N-3$. Par linéarité, $E(S)=4\times 2-3=5$ points. $V(S)=4^2V(N)=9{,}28$ et $\sigma(S)=4\sigma(N)=4\sqrt{0{,}58}\approx 3{,}05$ points.

2. *Linéarité de l'espérance*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : transformer une variable**

(a) $E(X)=0{,}2\times(-3)+0{,}5\times 1+0{,}3\times 4=-0{,}6+0{,}5+1{,}2=1{,}1$.

Ex. 8 (suite)

(b) Par linéarité de l'espérance : $E(4X+3)=4E(X)+3=4\times 1{,}1+3=7{,}4$.

(c) Par linéarité : $E(5-2X)=-2E(X)+5=-2{,}2+5=2{,}8$.

(d) $E(X^2)=0{,}2\times 9+0{,}5\times 1+0{,}3\times 16=1{,}8+0{,}5+4{,}8=7{,}1$.

(e) $E(X)^2=1{,}1^2=1{,}21$, alors que $E(X^2)=7{,}1$. La linéarité marche pour les sommes et les produits par un nombre, mais pas pour les carrés. L'égalité de Lina est donc fausse.

(f) $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=7{,}1-1{,}21=5{,}89$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : sommes et différences**

(a) Par linéarité de l'espérance : $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=3{,}5-(-1{,}2)=4{,}7$.

(b) Par linéarité : $E(2X-3Y+1)=2E(X)-3E(Y)+1=7+3{,}6+1=11{,}6$.

(c) Faux. La linéarité de l'espérance n'a besoin d'aucune hypothèse d'indépendance : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3{,}5-1{,}2=2{,}3$.

(d) Par linéarité : $E(aX+7Y)=3{,}5a+7\times(-1{,}2)=3{,}5a-8{,}4$. Cette espérance est nulle si et seulement si $a=\frac{8{,}4}{3{,}5}=2{,}4$.

Ex. 10 ★★☆ **Roue et pièce truquée**

(a) Par indépendance, $P(X=x_i \text{ et } Y=y_j)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$. Pour $Y=1$: $S=1,2,3$ avec les probabilités 0,30 ; 0,18 ; 0,12. Pour $Y=3$: $S=3,4,5$ avec les probabilités 0,20 ; 0,12 ; 0,08.

(b) On regroupe les cases où $S=3$: $P(S=3)=0{,}12+0{,}20=0{,}32$. Loi de S : $P(S=1)=0{,}30$, $P(S=2)=0{,}18$, $P(S=3)=0{,}32$, $P(S=4)=0{,}12$, $P(S=5)=0{,}08$. La somme vaut bien 1.

(c) $E(S)=1\times 0{,}30+2\times 0{,}18+3\times 0{,}32+4\times 0{,}12+5\times 0{,}08=2{,}5$. En moyenne, Jade obtient 2,5 points.

(d) $E(X)=0{,}3+0{,}4=0{,}7$ et $E(Y)=0{,}6+1{,}2=1{,}8$. Par linéarité de l'espérance : $E(S)=0{,}7+1{,}8=2{,}5$. On retrouve le même résultat, sans avoir eu besoin de la loi de S.

(e) $P(S\geqslant 4)=0{,}12+0{,}08=0{,}2$. Jade gagne un lot une fois sur cinq en moyenne.

Ex. 11 ★★☆ Escape game en trois épreuves

(a) $N = X_1 + X_2 + X_3$. Chaque X_i suit une loi de Bernoulli : $E(X_1) = 0{,}9$, $E(X_2) = 0{,}6$ et $E(X_3) = 0{,}35$.

(b) La linéarité de l'espérance ne demande pas l'indépendance : $E(N) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 0{,}9 + 0{,}6 + 0{,}35 = 1{,}85$. Il est inutile de chercher la loi de N.

(c) Par linéarité : $E(G) = 5E(N) - 12 = 9{,}25 - 12 = -2{,}75$. En moyenne, l'équipe perd 2,75 € par partie : le jeu lui est défavorable.

(d) Le gain total est $T = G_1 + \cdots + G_6$, où G_k est le gain de la partie k. Par linéarité : $E(T) = 6 \times (-2{,}75) = -16{,}50$. Sur 6 parties, l'équipe perd en moyenne 16,50 €.

Ex. 12 ★★★ Échange de cadeaux entre amis

(a) Le cadeau reçu par la personne i est, au hasard, l'un des 5 cadeaux. On peut aussi compter : parmi les $5! = 120$ répartitions, $4! = 24$ redonnent à i son cadeau.
Donc $P(X_i = 1) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

(b) $N = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Chaque X_i suit une loi de Bernoulli, donc $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{5}$. Par linéarité de l'espérance, $E(N) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$. En moyenne, sur un grand nombre d'échanges, une personne récupère son propre cadeau.

(c) Non. La linéarité de l'espérance $E(X_1 + \cdots + X_5) = E(X_1) + \cdots + E(X_5)$ ne demande aucune hypothèse d'indépendance. Le calcul de $E(N)$ est donc juste. C'est la formule de la variance d'une somme qui exige l'indépendance.

(d) Le cadeau reçu par la personne i est l'un des n cadeaux, chacun avec la même probabilité, donc $P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$. Par linéarité de l'espérance, $E(N) = n \times \frac{1}{n} = 1$. En moyenne, une personne récupère son cadeau, quel que soit le nombre de participants.

(e) Si 4 personnes récupèrent leur cadeau, il ne reste qu'un cadeau pour la cinquième : c'est le sien.
Donc $N = 4$ est impossible et $P(N = 4) = 0$. Pour une loi $\mathcal{B}\left(5\,;\frac{1}{5}\right)$, on aurait $P(N = 4) = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{625} \neq 0$.
Donc N ne suit pas cette loi binomiale, même si son espérance vaut aussi $5 \times \frac{1}{5} = 1$. Les X_i ne sont pas indépendantes.

Ex. 13 ★★★ Stand de fléchettes

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}35 + 2 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}05 = 0{,}8 + 1 + 0{,}5 = 2{,}3$ points.

(b) $G = 1{,}5X - 4$. Par linéarité de l'espérance, $E(G) = 1{,}5 \times 2{,}3 - 4 = 3{,}45 - 4 = -0{,}55$. En moyenne, sur un grand nombre de parties, Malo perd 0,55 € par partie : le jeu lui est défavorable.

(c) Avec une mise m, $G = 1{,}5X - m$, donc $E(G) = 3{,}45 - m$ par linéarité. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, c'est-à-dire pour $m = 3{,}45$ €.

(d) On note G_k le gain de la partie k : $T = G_1 + \cdots + G_{20}$, et chaque G_k a pour espérance $-0{,}55$. Par linéarité de l'espérance (sans avoir besoin de l'indépendance), $E(T) = 20 \times (-0{,}55) = -11$. En moyenne, Malo perd 11 € sur ses 20 parties.

(e) La linéarité ne s'applique pas aux carrés : $E(X^2) \neq E(X)^2$. Avec la loi : $E(X^2) = 0 \times 0{,}35 + 4 \times 0{,}4 + 25 \times 0{,}2 + 100 \times 0{,}05 = 11{,}6$, alors que $E(X)^2 = 5{,}29$. Le gain vaut $0{,}3X^2 - 3{,}5$, donc par linéarité son espérance est $0{,}3 \times 11{,}6 - 3{,}5 = -0{,}02$. Le jeu est légèrement défavorable au joueur. Léo trouvait $0{,}3 \times 5{,}29 - 3{,}5 \approx -1{,}91$, ce qui est faux.

Ex. 14 ★★★ Deux jetons tirés sans remise

(a) Les cases de la diagonale ($x = y$) sont impossibles. Les 12 autres cases ont chacune la probabilité $\frac{1}{12}$ et donnent : $S = 3$ pour (1 ; 2) et (2 ; 1) ; $S = 4$ pour (1 ; 3) et (3 ; 1) ; $S = 5$ pour (1 ; 4), (4 ; 1), (2 ; 3) et (3 ; 2) ; $S = 6$ pour (2 ; 4) et (4 ; 2) ; $S = 7$ pour (3 ; 4) et (4 ; 3).
Loi de S : $P(S = 3) = P(S = 4) = P(S = 6) = P(S = 7) = \frac{1}{6}$ et $P(S = 5) = \frac{1}{3}$.

(b) $E(S) = \frac{3+4+6+7}{6} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{6} + \frac{10}{6} = \frac{30}{6} = 5$.

(c) Dans le tableau, chaque valeur de x apparaît dans 3 cases, et chaque valeur de y aussi.
Donc X et Y suivent la même loi : chaque valeur 1, 2, 3, 4 a la probabilité $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. $E(X) = E(Y) = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$, et $E(X) + E(Y) = 5 = E(S)$. Pourtant, X et Y ne sont pas indépendantes : $P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = 0$ alors que $P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{16}$. La linéarité de l'espérance ne demande pas l'indépendance.

(d) Par linéarité de l'espérance, $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 2{,}5 - 2{,}5 = 0$. L'espérance du gain est nulle : le jeu est équitable.

Ex. 14 **(suite)**

(e) $E(X^2) = \frac{1+4+9+16}{4} = 7{,}5$, donc $V(X) = 7{,}5 - 2{,}5^2 = 1{,}25$, et de même $V(Y) = 1{,}25$. $E(S^2) = \frac{9+16+36+49}{6} + 25 \times \frac{1}{3} = \frac{160}{6} = \frac{80}{3}$, donc $V(S) = \frac{80}{3} - 25 = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$. Or $V(X) + V(Y) = 2{,}5 \neq V(S)$. La formule $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ demande que X et Y soient indépendantes, ce qui n'est pas le cas ici. L'espérance est additive dans tous les cas, mais la variance ne l'est pas forcément.

3. *Variance de aX + b*

Ex. 15 ★☆☆ **Transformations affines en ligne**

(a) Par linéarité de l'espérance : $E(2X + 6) = 2 \times (-1{,}5) + 6 = 3$.

(b) La constante disparaît : $V(X + 10) = V(X) = 2{,}25$ (et pas 12,25).

(c) Le coefficient passe au carré : $V(3X) = 3^2 \times 2{,}25 = 20{,}25$ (et pas $3 \times 2{,}25$).

(d) $\sigma(X) = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$, donc $\sigma(-4X) = |-4| \times 1{,}5 = 6$: un écart type n'est jamais négatif.

(e) $V(-2X + 1) = (-2)^2 \times 2{,}25 = 9$.

(f) $\sigma(0{,}5X - 7) = 0{,}5 \times 1{,}5 = 0{,}75$.

Ex. 16 ★☆☆ **Retrouver une variance ou un écart type**

(a) $V(X) = 3^2 = 9$, donc $V(5X - 2) = 5^2 \times 9 = 225$.

(b) $\sigma(-X + 4) = |-1| \times 3 = 3$: ni le signe, ni la constante ne changent l'écart type.

(c) $\sigma(Y) = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, donc $\sigma(10Y) = 10 \times 0{,}4 = 4$.

(d) $V(2Z) = 2^2\, V(Z) = 4V(Z) = 36$, donc $V(Z) = 9$ (et pas 18).

(e) $\sigma(Z) = \sqrt{9} = 3$, donc $\sigma(-3Z + 1) = |-3| \times 3 = 9$.

(f) Par linéarité : $E(-3Z + 1) = -3 \times 4 + 1 = -11$ (une espérance peut être négative, un écart type non).

Ex. 17 ★★☆ **Le gain aux fléchettes**

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 = 0{,}7$.

(b) $E(X^2) = 0^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 = 1{,}1$, donc $V(X) = 1{,}1 - 0{,}7^2 = 0{,}61$.

(c) Par linéarité : $E(G) = 5 \times 0{,}7 - 3 = 0{,}5$. Sur un grand nombre de parties, Noé gagne en moyenne 0,50 € par partie : le jeu lui est favorable.

Ex. 17 **(suite)**

(d) Léa a appliqué à la variance la règle de l'espérance. Or la constante disparaît et le coefficient passe au carré : $V(G) = 5^2 \times 0{,}61 = 15{,}25$, donc $\sigma(G) = \sqrt{15{,}25} \approx 3{,}91$ €.

Ex. 18 ★★☆ **Des euros aux dollars**

(a) Par linéarité : $E(Z) = 1{,}15 \times 80 + 6 = 98$ dollars.

(b) $\sigma(Z) = |1{,}15| \times 12 = 13{,}8$ dollars et $V(Z) = 13{,}8^2 = 190{,}44$. Les frais fixes ne changent pas la dispersion.

(c) Faux : $\sigma(1{,}15X + 10) = 1{,}15 \times 12 = 13{,}8$, la même valeur. Une constante décale toutes les valeurs sans changer leur dispersion.

(d) $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$, donc $E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = 190{,}44 + 98^2 = 190{,}44 + 9\,604 = 9\,794{,}44$. Ce n'est pas égal à $E(Z)^2 = 9\,604$: l'écart vaut $V(Z)$, qui est strictement positif car les montants sont dispersés.

Ex. 19 ★★★ **Harmoniser les notes d'un quiz**

(a) $E(X) = 4 \times 0{,}1 + 6 \times 0{,}3 + 8 \times 0{,}4 + 10 \times 0{,}2 = 0{,}4 + 1{,}8 + 3{,}2 + 2 = 7{,}4$. En moyenne, la note est de 7,4 sur 10.

(b) $E(X^2) = 16 \times 0{,}1 + 36 \times 0{,}3 + 64 \times 0{,}4 + 100 \times 0{,}2 = 58$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 58 - 7{,}4^2 = 58 - 54{,}76 = 3{,}24$. Puis $\sigma(X) = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$.

(c) On a $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X) = a \times 1{,}8$ car $a > 0$.
Donc $1{,}8a = 2{,}7$, d'où $a = 1{,}5$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = aE(X) + b = 1{,}5 \times 7{,}4 + b = 11{,}1 + b$.
Donc $11{,}1 + b = 12$, d'où $b = 0{,}9$. Ainsi $Y = 1{,}5X + 0{,}9$.

(d) Si $a < 0$: $\sigma(Y) = |a| \times 1{,}8 = 2{,}7$ donne $|a| = 1{,}5$, donc $a = -1{,}5$. Par linéarité, $-1{,}5 \times 7{,}4 + b = 12$, d'où $b = 23{,}1$: $Y = -1{,}5X + 23{,}1$. Un élève qui avait 4 obtient $-1{,}5 \times 4 + 23{,}1 = 17{,}1$, et un élève qui avait 10 obtient 8,1. L'ordre des notes est inversé : le meilleur élève aurait la moins bonne note. Avec $a > 0$, la transformation conserve l'ordre des notes : c'est pourquoi Ben impose cette condition.

Ex. 20 ★★★ **La roue de la kermesse**

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}35 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}05 = 0{,}9$.
$E(X^2) = 0{,}35 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}05 = 1{,}6$, donc $V(X) = 1{,}6 - 0{,}9^2 = 0{,}79$.

Ex. 20 **(suite)**

(b) $G = 4X - m$. Par linéarité de l'espérance, $E(G) = 4E(X) - m = 3{,}6 - m$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, c'est-à-dire si $m = 3{,}6$. Le jeu doit donc coûter 3,60 €.

(c) $V(G) = V(4X - m) = 4^2\,V(X) = 16 \times 0{,}79 = 12{,}64$, et $\sigma(G) = 4\,\sigma(X) = \sqrt{12{,}64} \approx 3{,}56$ €. La mise m est une constante : elle décale tous les gains de la même valeur sans changer leur dispersion. Elle disparaît donc dans la variance.

(d) $B = -G = -4X + 5$. Avec $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$, on obtient $\sigma(B) = |-4|\,\sigma(X) = 4\,\sigma(X)$. Un écart type n'est jamais négatif. Par linéarité, $E(B) = -4 \times 0{,}9 + 5 = 1{,}4$: le forain gagne en moyenne 1,40 € par partie. Et $\sigma(B) = \sqrt{12{,}64} \approx 3{,}56$ €, la même dispersion que pour G.

Ex. 21 ★★★ **Deux devis de plombier**

(a) $E(X) = 30 \times 0{,}1 + 45 \times 0{,}4 + 60 \times 0{,}3 + 75 \times 0{,}2 = 54$ minutes. $E(X^2) = 900 \times 0{,}1 + 2025 \times 0{,}4 + 3600 \times 0{,}3 + 5625 \times 0{,}2 = 3105$, donc $V(X) = 3105 - 54^2 = 189$.

(b) $H = \frac{1}{60}X$. Par linéarité de l'espérance, $E(H) = \frac{54}{60} = 0{,}9$ h. Avec $V(aX) = a^2\,V(X)$, on obtient $V(H) = \frac{189}{60^2} = 0{,}0525$. Puis $\sigma(H) = \sqrt{0{,}0525} \approx 0{,}23$ h. Le coefficient $\frac{1}{60}$ passe au carré dans la variance.

(c) $P_A = 40H + 25$. Par linéarité, $E(P_A) = 40 \times 0{,}9 + 25 = 61$ €. $V(P_A) = 40^2 \times 0{,}0525 = 84$, donc $\sigma(P_A) = \sqrt{84} \approx 9{,}17$ €. Le forfait ne change pas la dispersion : $V(40H + 25) = V(40H)$, car ajouter 25 € décale tous les prix de la même valeur.

(d) $P_B = 70H$. $E(P_B) = 70 \times 0{,}9 = 63$ €. $V(P_B) = 70^2 \times 0{,}0525 = 257{,}25$, donc $\sigma(P_B) = \sqrt{257{,}25} \approx 16{,}04$ €. Le tarif A est moins cher en moyenne (61 € contre 63 €). Il est aussi plus prévisible : son écart type est plus faible. Je conseille donc le tarif A.

4. *Variance d'une somme de variables indépendantes*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : deux capteurs indépendants**

(a) Par linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = 4 + (-2) = 2$.

(b) Les capteurs fonctionnent indépendamment, donc X et Y sont indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 5 + 11 = 16$.

Ex. 22 **(suite)**

(c) $\sigma(X + Y) = \sqrt{16} = 4$, alors que $\sigma(X) + \sigma(Y) = \sqrt{5} + \sqrt{11} \approx 5{,}553$. Ils ne sont pas égaux : ce sont les variances qui s'ajoutent, pas les écarts types.

(d) Faux. Les capteurs fonctionnent indépendamment, donc $V(X - Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 5 + 11 = 16$, et non $11 - 5 = 6$. Une différence ne soustrait pas les variances : le coefficient -1 passe au carré.

(e) Par indépendance : $V(2X + 3Y) = 2^2 \times 5 + 3^2 \times 11 = 20 + 99 = 119$.

(f) Par linéarité : $E(2X - 3Y + 1) = 2 \times 4 - 3 \times (-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$.

(g) Par indépendance : $V(3X - Y + 7) = 3^2 \times 5 + (-1)^2 \times 11 = 45 + 11 = 56$ (la constante 7 ne change pas la variance), donc $\sigma(3X - Y + 7) = \sqrt{56} \approx 7{,}483$.

Ex. 23 ★★☆ **Automatismes : deux lancers ou un lancer doublé ?**

(a) $E(X) = 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}2 = 0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}8 = 1{,}9$.

(b) $E(X^2) = 1 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3 + 16 \times 0{,}2 = 4{,}9$, donc $V(X) = 4{,}9 - 1{,}9^2 = 4{,}9 - 3{,}61 = 1{,}29$.

(c) Par linéarité : $E(S) = 1{,}9 + 1{,}9 = 3{,}8$ et $E(T) = 2 \times 1{,}9 = 3{,}8$. Les deux espérances sont égales.

(d) Les deux lancers sont indépendants : $V(S) = V(X_1) + V(X_2) = 1{,}29 + 1{,}29 = 2{,}58$.

(e) $V(T) = V(2X) = 2^2 \times V(X) = 4 \times 1{,}29 = 5{,}16$. Ici on n'additionne pas deux variances : $X + X$ n'est pas $X_1 + X_2$.

(f) $\sigma(S) = \sqrt{2{,}58} \approx 1{,}606$ et $\sigma(T) = 2\sqrt{1{,}29} \approx 2{,}272$. Le score de Lou est le plus dispersé : doubler un seul lancer amplifie les écarts, alors que deux lancers indépendants se compensent en partie.

Ex. 24 ★★☆ **Assemblage de pièces : deux erreurs à corriger**

(a) Les pièces sortent de deux machines distinctes qui fonctionnent indépendamment, donc L_1 et L_2 sont indépendantes. Par linéarité : $E(L) = 50 + 30 = 80$ mm. Par indépendance : $V(L) = 0{,}3^2 + 0{,}4^2 = 0{,}09 + 0{,}16 = 0{,}25$.

(b) Non : les écarts types ne s'ajoutent pas. On additionne les variances puis on prend la racine : $\sigma(L) = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ mm, et non 0,7 mm. La longueur de la tige s'écarte en moyenne de 0,5 mm environ de 80 mm.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Léa obtient $0{,}09 - 0{,}16 = -0{,}07$: c'est impossible, car une variance est toujours positive. Le coefficient -1 passe au carré, donc par indépendance $V(D) = V(L_1) + (-1)^2 V(L_2) = 0{,}25$. Par linéarité, $E(D) = 50 - 30 = 20$ mm, et $\sigma(D) = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ mm : l'écart entre les pièces est aussi dispersé que leur somme.

Ex. 25 ★★☆ **Vrai ou faux : quand la formule s'applique-t-elle ?**

(a) $E(X) = -2 \times 0{,}6 + 3 \times 0{,}4 = -1{,}2 + 1{,}2 = 0$ et $V(X) = (-2)^2 \times 0{,}6 + 3^2 \times 0{,}4 - 0^2 = 2{,}4 + 3{,}6 = 6$.

(b) Faux. Si $Y = X$, alors $X + Y = 2X$, donc $V(X+Y) = 2^2 \times 6 = 24$, alors que $V(X) + V(Y) = 6 + 6 = 12$. X et $Y = X$ ne sont pas indépendantes : sans indépendance, la formule ne s'applique pas.

(c) Faux. Les parties sont indépendantes, donc $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 6 + 6 = 12$ et $\sigma(X_1 - X_2) = \sqrt{12} \approx 3{,}464$. Une différence ne soustrait pas les variances.

(d) Faux. Par indépendance, $V(X_1 + X_2) = 12$, donc $\sigma(X_1 + X_2) = \sqrt{12} \approx 3{,}464$, alors que $2\sigma(X) = 2\sqrt{6} \approx 4{,}899$. Les écarts types ne s'ajoutent pas : on additionne les variances, puis on prend la racine.

Ex. 26 ★★★ **Duel de fléchettes : l'écart de score**

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}5 + 5 \times 0{,}3 = 2{,}5$; $E(X^2) = 4 \times 0{,}5 + 25 \times 0{,}3 = 9{,}5$, donc $V(X) = 9{,}5 - 2{,}5^2 = 3{,}25$. $E(Y) = 1 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}6 = 2{,}2$; $E(Y^2) = 0{,}4 + 9 \times 0{,}6 = 5{,}8$, donc $V(Y) = 5{,}8 - 2{,}2^2 = 0{,}96$.

(b) Les deux joueurs lancent sans s'influencer : X et Y sont indépendantes. Par linéarité, $E(D) = 2{,}5 - 2{,}2 = 0{,}3$. Par indépendance, $V(D) = 1^2 \times V(X) + (-1)^2 \times V(Y) = 3{,}25 + 0{,}96 = 4{,}21$, donc $\sigma(D) = \sqrt{4{,}21} \approx 2{,}05$. En moyenne, Inès marque 0,3 point de plus que Malo.

(c) Par indépendance, chaque case vaut $P(X = x) \times P(Y = y)$. Pour $X = 0$: $D = -1$ (0,08) ou $D = -3$ (0,12) ; pour $X = 2$: $D = 1$ (0,2) ou $D = -1$ (0,3) ; pour $X = 5$: $D = 4$ (0,12) ou $D = 2$ (0,18). Loi de D : $P(D = -3) = 0{,}12$, $P(D = -1) = 0{,}38$, $P(D = 1) = 0{,}2$, $P(D = 2) = 0{,}18$, $P(D = 4) = 0{,}12$ (somme 1). $E(D) = -0{,}36 - 0{,}38 + 0{,}2 + 0{,}36 + 0{,}48 = 0{,}3$; $E(D^2) = 1{,}08 + 0{,}38 + 0{,}2 + 0{,}72 + 1{,}92 = 4{,}3$, donc $V(D) = 4{,}3 - 0{,}3^2 = 4{,}21$. On retrouve $V(X) + V(Y)$, et non $V(X) - V(Y) = 2{,}29$.

Ex. 26 **(suite)**

(d) $p = P(D = 1) + P(D = 2) + P(D = 4) = 0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}5$. Inès marque en moyenne 0,3 point de plus que Malo ($E(D) > 0$), mais ne gagne qu'une manche sur deux : ses victoires sont plus larges, pas plus fréquentes.

(e) On note $B_i = 1$ si Inès gagne la manche i, 0 sinon : B_i suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,5 et $N = B_1 + \cdots + B_{20}$. Les manches sont indépendantes, donc N suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}5)$: $E(N) = 20 \times 0{,}5 = 10$ et $V(N) = 20 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 5$, d'où $\sigma(N) = \sqrt{5} \approx 2{,}24$. Inès gagne en moyenne 10 manches sur 20, avec un écart type d'environ 2,24 manches.

Ex. 27 ★★★ **Le stand de Léna : bénéfice d'un jour, d'une semaine**

(a) Par linéarité de l'espérance : $E(B) = 2E(X) + 3E(Y) - 5 = 24 + 18 - 5 = 37$. Léna gagne en moyenne 37 € par jour.

(b) $V(X) = 3^2 = 9$ et $V(Y) = 2^2 = 4$. Les clientèles sont distinctes, donc X et Y sont indépendantes : $V(B) = 2^2 \times 9 + 3^2 \times 4 = 36 + 36 = 72$ (la constante -5 ne change rien).
Donc $\sigma(B) = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ €.

(c) Par linéarité, $E(B') = 2 \times 12 + 6k - 5 = 19 + 6k$, et $19 + 6k = 49 \iff k = 5$. Par indépendance, $V(B') = 2^2 \times 9 + 5^2 \times 4 = 36 + 100 = 136$, donc $\sigma(B') = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} \approx 11{,}66$ €. Le bénéfice moyen augmente, mais sa dispersion aussi.

(d) Les jours sont indépendants, donc $E(T) = 5 \times 37 = 185$ et $V(T) = 5 \times 72 = 360$, d'où $\sigma(T) = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \approx 18{,}97$ €.

(e) $V(5B) = 5^2 \times 72 = 1800$, donc $\sigma(5B) = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2} \approx 42{,}43$ €. $5B$ répète cinq fois le même jour, alors que T additionne 5 jours indépendants dont les écarts se compensent en partie : $V(T) = 5V(B)$, mais $V(5B) = 25V(B)$.

Ex. 28 ★★★ **Jeu de grattage : rendre le jeu équitable**

(a) $E(X) = -1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}2 = 0{,}6$; $E(X^2) = 0{,}5 + 0{,}3 + 16 \times 0{,}2 = 4$, donc $V(X) = 4 - 0{,}6^2 = 3{,}64$.

(b) Les tickets sont tirés au hasard dans un très grand stock : X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi que X. $E(G) = 0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2$ et, par indépendance, $V(G) = 3{,}64 + 3{,}64 = 7{,}28$, d'où $\sigma(G) = \sqrt{7{,}28} \approx 2{,}70$. Sur deux parties, Zoé gagne en moyenne 1,20 €.

Ex. 28 **(suite)**

(c) X et $-X$ ne sont pas indépendantes : connaître le gain de Zoé donne celui de Yanis. La formule ne s'applique donc pas. D'ailleurs, $X + (-X) = 0$ est constante, donc sa variance vaut 0, et non $2 \times 3{,}64 = 7{,}28$.

(d) $E(X - c) = 0{,}6 - c = 0$ pour $c = 0{,}6$: il faut retirer 0,60 € par partie. Comme $V(aX + b) = a^2 V(X)$ avec $a = 1$, on a $V(X - c) = V(X) = 3{,}64$.

(e) Les parties sont indépendantes, donc $V(M_n) = \frac{3{,}64}{n}$ et $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{3{,}64}{n}}$. $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}2 \iff \frac{3{,}64}{n} \leqslant 0{,}04 \iff n \geqslant 91$. Il faut au moins 91 parties pour que le gain moyen soit aussi peu dispersé.

5. *Somme et moyenne d'un échantillon*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : total ou moyenne ?**

(a) Échantillon de taille 40 : $E(S_{40}) = 40 \times 6 = 240$ min et $V(S_{40}) = 40 \times 9 = 360$.

(b) Échantillon de taille 40 : $E(M_{40}) = E(X) = 6$ min et $V(M_{40}) = \frac{9}{40} = 0{,}225$.

(c) On élève d'abord l'écart type au carré : $V(Y) = 12^2 = 144$, donc $V(T_{16}) = 16 \times 144 = 2\,304$.

(d) $\sigma(T_{16}) = \sqrt{2\,304} = 48$ g, soit $12\sqrt{16}$ (et non $16 \times 12 = 192$ g).

(e) La masse moyenne $\frac{T_{16}}{16}$ a pour écart type $\frac{12}{\sqrt{16}} = \frac{12}{4} = 3$ g.

(f) Échantillon de taille 64 : espérance $64 \times (-0{,}30) = -19{,}20$ € et écart type $2{,}5\sqrt{64} = 2{,}5 \times 8 = 20$ € (et non $64 \times 2{,}5$).

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : d'une fléchette à cinquante**

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}1 = 1{,}8$.

(b) $E(X^2) = 0{,}4 + 9 \times 0{,}3 + 25 \times 0{,}1 = 5{,}6$, donc $V(X) = 5{,}6 - 1{,}8^2 = 2{,}36$.

(c) Échantillon de taille 50 : $E(S_{50}) = 50 \times 1{,}8 = 90$ et $V(S_{50}) = 50 \times 2{,}36 = 118$.

(d) $\sigma(S_{50}) = \sqrt{118} \approx 10{,}86$.

(e) $E(M_{50}) = 1{,}8$ et $V(M_{50}) = \frac{2{,}36}{50} = 0{,}0472$.

(f) $\sigma(X) = \sqrt{2{,}36} \approx 1{,}54$ et $\sigma(M_{50}) = \sqrt{0{,}0472} \approx 0{,}22$.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur de Lina sur les baguettes**

(a) Oui. Les 36 masses forment un échantillon de la loi de X (baguettes indépendantes, même loi). Par linéarité de l'espérance, $E(S_{36}) = 36 \times 250 = 9\,000$ g.

(b) Non. C'est la variance qui est multipliée par n : $V(S_{36}) = 36 \times 6^2 = 1\,296$, donc $\sigma(S_{36}) = \sqrt{1\,296} = 36$ g $= 6\sqrt{36}$, et non 216 g.

(c) $\sigma(M_{36}) = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$ g, soit 6 fois moins que $\sigma(X) = 6$ g : la masse moyenne d'un lot fluctue beaucoup moins que celle d'une baguette isolée.

Ex. 32 ★★☆ **Note moyenne d'un concours**

(a) $E(M_9) = \mu = 11{,}5$ et $\sigma(M_9) = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$.

(b) $\frac{3}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}1 \iff \sqrt{n} \geqslant 30 \iff n \geqslant 900$. Il faut au moins 900 copies. Vérification : $\frac{3}{\sqrt{900}} = 0{,}1$.

(c) Non. $\sigma(M_{2n}) = \frac{3}{\sqrt{2n}} = \frac{\sigma(M_n)}{\sqrt{2}}$: par exemple $\sigma(M_{18}) \approx 0{,}707$ au lieu de 0,5. Il faut multiplier n par 4 : $\sigma(M_{36}) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

(d) $\sigma(S_{900}) = 3\sqrt{900} = 90$, alors que $\sigma(M_{900}) = 0{,}1$. Quand n augmente, le total se disperse ($\sigma\sqrt{n}$) mais la moyenne se concentre ($\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) : la note moyenne devient une estimation fiable.

Ex. 33 ★★★ **La roue de la kermesse**

(a) $\mu = -2 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 6 \times 0{,}2 = -1 + 0{,}3 + 1{,}2 = 0{,}5$ €. Ensuite $E(X^2) = 4 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 36 \times 0{,}2 = 9{,}5$, donc $\sigma^2 = 9{,}5 - 0{,}5^2 = 9{,}25$.

(b) Les 100 gains $X_1, \ldots, X_{100}$ sont indépendants (les parties sont indépendantes) et ont la même loi que X : ils forment un échantillon de taille 100. On a donc $E(S_{100}) = 100 \times 0{,}5 = 50$ € et $V(S_{100}) = 100 \times 9{,}25 = 925$, d'où $\sigma(S_{100}) = \sqrt{925} \approx 30{,}41$ €. Attention : ce n'est pas $100\,\sigma(X)$.

(c) Échantillon de taille 400 : $E(M_{400}) = \mu = 0{,}50$ € et $V(M_{400}) = \frac{9{,}25}{400} = 0{,}023125$, donc $\sigma(M_{400}) = \frac{\sqrt{9{,}25}}{\sqrt{400}} = \frac{\sqrt{9{,}25}}{20} \approx 0{,}15$ €.

(d) $\sigma(S_n) = \sqrt{9{,}25\,n} = \sqrt{9{,}25} \times \sqrt{n}$ augmente avec n : $\sigma(S_{100}) \approx 30{,}41$ € et $\sigma(S_{400}) = \sqrt{3\,700} \approx 60{,}83$ €. À l'inverse, $\sigma(M_n) = \frac{\sqrt{9{,}25}}{\sqrt{n}}$ diminue : $\sigma(M_{100}) \approx 0{,}30$ € et $\sigma(M_{400}) \approx 0{,}15$ €. Le gain total se disperse de plus en plus, mais le gain moyen fluctue de moins en moins autour de 0,50 € : le forain a raison.

Ex. 34 ★★★ **Une palette de colis**

(a) Les masses $X_1, \dots, X_{25}$ sont indépendantes (remplissages indépendants) et ont la même loi que X : elles forment un échantillon de taille 25. Par linéarité de l'espérance, $E(S_{25}) = 25 \times 4{,}2 = 105$ kg.

(b) L'énoncé donne l'écart type : on l'élève d'abord au carré, $V(X) = 1{,}5^2 = 2{,}25$. Pour un échantillon, $V(S_{25}) = 25 \times 2{,}25 = 56{,}25$, donc $\sigma(S_{25}) = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ kg, soit $1{,}5\sqrt{25}$ et non $25 \times 1{,}5 = 37{,}5$ kg.

(c) $\sigma(M_{25}) = \frac{1{,}5}{\sqrt{25}} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$ kg $> 0{,}25$ kg : le lot ne convient pas. La masse moyenne fluctue 5 fois moins que celle d'un colis isolé, mais pas encore assez pour le client.

(d) Par linéarité, $E(T) = E(S_{25}) + E(P) = 105 + 20 = 125$ kg. P est indépendante des colis, donc $V(T) = V(S_{25}) + V(P) = 56{,}25 + 2^2 = 60{,}25$. On obtient $\sigma(T) = \sqrt{60{,}25} \approx 7{,}76$ kg.

(e) $C = 0{,}8T + 15$. On a $E(C) = 0{,}8 \times 125 + 15 = 115$ € et $V(C) = 0{,}8^2 \times 60{,}25 = 38{,}56$, donc $\sigma(C) = 0{,}8 \times \sigma(T) = \sqrt{38{,}56} \approx 6{,}21$ €. Le forfait de 15 € ne change pas la dispersion.

Ex. 35 ★★★ **Sondage sur le vélo**

(a) X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,3 : $P(X_1 = 1) = 0{,}3$ et $P(X_1 = 0) = 0{,}7$. On a $E(X_1) = 1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}7 = 0{,}3$ et $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 0{,}3 - 0{,}3^2 = 0{,}21$.

(b) Les X_i sont n variables de Bernoulli de paramètre 0,3, indépendantes d'après l'énoncé. Leur somme S_n compte les succès, donc S_n suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}3)$. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = n \times 0{,}3 = 0{,}3n$. Par indépendance, $V(S_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = 0{,}21n$.

(c) F_n est la moyenne de l'échantillon, donc $E(F_n) = \mu = 0{,}3$ et $V(F_n) = \frac{1}{n^2} \times 0{,}21n = \frac{0{,}21}{n}$. On obtient $\sigma(F_n) = \sqrt{\frac{0{,}21}{n}}$.

(d) $E(S_{400}) = 0{,}3 \times 400 = 120$ et $V(S_{400}) = 0{,}21 \times 400 = 84$, donc $\sigma(S_{400}) = \sqrt{84} \approx 9{,}17$. Puis $\sigma(F_{400}) = \sqrt{\frac{0{,}21}{400}} \approx 0{,}023$. En moyenne, 120 personnes sur 400 vont travailler à vélo, et la fréquence fluctue peu autour de 0,3.

(e) Oui. $\sigma(S_{1600}) = \sqrt{0{,}21 \times 1\,600} = \sqrt{336} \approx 18{,}33 = 2\,\sigma(S_{400})$: le nombre de cyclistes est 2 fois plus dispersé. Mais $\sigma(F_{1600}) = \sqrt{\frac{0{,}21}{1\,600}} \approx 0{,}011$, soit la moitié de $\sigma(F_{400})$: avec 4 fois plus de personnes, la fréquence est 2 fois moins dispersée.

6. *Loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli*

Ex. 36 ★★☆ **Automatismes : espérance, variance, écart type**

(a) $E(X) = 1 \times 0{,}35 + 0 \times 0{,}65 = 0{,}35$ et $V(X) = p(1-p) = 0{,}35 \times 0{,}65 = 0{,}2275$.

(b) $E(Y) = np = 40 \times 0{,}15 = 6$.

(c) $V(Y) = np(1-p) = 40 \times 0{,}15 \times 0{,}85 = 5{,}1$, donc $\sigma(Y) = \sqrt{5{,}1} \approx 2{,}258$.

(d) $E(Z) = 0{,}2n = 12$, donc $n = \frac{12}{0{,}2} = 60$. Alors $V(Z) = 60 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 9{,}6$.

(e) $100 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 9$, mais c'est la variance : $V(T) = 9$. L'écart type vaut $\sigma(T) = \sqrt{9} = 3$.

(f) $E(F) = \frac{E(Y)}{40} = \frac{6}{40} = 0{,}15 = p$ et $\sigma(F) = \frac{\sigma(Y)}{40} = \frac{\sqrt{5{,}1}}{40} \approx 0{,}056$
(on divise par 40, pas par $\sqrt{40}$).

Ex. 37 ★★☆ **Automatismes : sommes de binomiales**

(a) X et Y sont indépendantes et ont le même paramètre 0,4 : on enchaîne $12 + 8$ épreuves identiques, donc $X + Y$ suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}4)$.

(b) Par linéarité, $E(X+Y) = 20 \times 0{,}4 = 8$. Par indépendance, $V(X+Y) = 20 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 4{,}8$.

(c) $\sigma(X+Y) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.

(d) Par linéarité, $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 12 \times 0{,}4 - 8 \times 0{,}4 = 4{,}8 - 3{,}2 = 1{,}6$. Par indépendance, $V(X-Y) = V(X) + V(Y) = 2{,}88 + 1{,}92 = 4{,}8$
(les variances s'additionnent).

(e) Faux. $X + X = 2X$ et X n'est pas indépendante d'elle-même : $V(2X) = 4V(X) = 4 \times 2{,}88 = 11{,}52$, alors que $\mathcal{B}(24\,;0{,}4)$ a pour variance $24 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 5{,}76$. En plus, $2X$ ne prend que des valeurs paires.

Ex. 38 ★★☆ **Démonstration guidée : les bulbes de Chloé**

(a) X_i vaut 1 avec la probabilité 0,85 et 0 avec la probabilité 0,15 (loi de Bernoulli). $E(X_i) = 1 \times 0{,}85 + 0 \times 0{,}15 = 0{,}85$; $E(X_i^2) = 1^2 \times 0{,}85 + 0^2 \times 0{,}15 = 0{,}85$; $V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 0{,}85 - 0{,}7225 = 0{,}1275$.

(b) $S = X_1 + \dots + X_{18}$. Par linéarité de l'espérance, $E(S) = 18 \times 0{,}85 = 15{,}3$: en moyenne, environ 15 bulbes fleurissent.

(c) Les bulbes fleurissent indépendamment, donc les X_i sont indépendantes et $V(S) = 18 \times 0{,}1275 = 2{,}295$. D'où $\sigma(S) = \sqrt{2{,}295} \approx 1{,}51$.

Ex. 38 **(suite)**

(d) $E(S) = 15{,}3$ reste valable : la linéarité de l'espérance ne demande pas l'indépendance. En revanche, les X_i ne sont plus indépendantes. On ne peut plus additionner les variances : $V(S) = 2{,}295$ n'est plus justifié, et S n'est plus forcément binomiale.

Ex. 39 ★★☆ **Stand de palets à la kermesse**

(a) On répète 10 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « gagner la partie » ($p = 0{,}3$) : X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$. Noé gagne $3X$ € et paie 10 € : $G = 3X - 10$.

(b) $E(X) = 3$ et $V(X) = 10 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 2{,}1$. Par linéarité, $E(G) = 3 \times 3 - 10 = -1$;
$V(G) = 3^2 \times 2{,}1 = 18{,}9$, donc $\sigma(G) = \sqrt{18{,}9} \approx 4{,}35$.
En moyenne, Noé perd 1 € sur ses 10 parties.

(c) $E(G) = 3 \times 10p - 10 = 30p - 10$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, c'est-à-dire $p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

(d) Par linéarité, $E(T) = 3 + 10 \times 0{,}4 = 7$; par indépendance, $V(T) = 2{,}1 + 10 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 4{,}5$. Les paramètres 0,3 et 0,4 sont différents, donc T n'est pas binomiale. Par exemple, $\mathcal{B}(20\,;q)$ avec $E = 7$ donne $q = 0{,}35$ et $V = 20 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 4{,}55 \neq 4{,}5$.

Ex. 40 ★★★ **Deux machines dans un atelier**

(a) Pour i de 1 à 40, on pose $X_i = 1$ si la i-ième pièce de A est défectueuse, 0 sinon. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,05. Les X_i sont indépendantes (énoncé). $D_A = X_1 + \cdots + X_{40}$ suit donc $\mathcal{B}(40\,;0{,}05)$. De la même façon, D_B suit $\mathcal{B}(60\,;0{,}02)$. On obtient $E(D_A) = 40 \times 0{,}05 = 2$ et $E(D_B) = 60 \times 0{,}02 = 1{,}2$.

(b) Par linéarité de l'espérance, $E(D) = 2 + 1{,}2 = 3{,}2$. On a $V(D_A) = 40 \times 0{,}05 \times 0{,}95 = 1{,}9$ et $V(D_B) = 60 \times 0{,}02 \times 0{,}98 = 1{,}176$. D_A et D_B sont indépendantes (énoncé), donc $V(D) = 1{,}9 + 1{,}176 = 3{,}076$.

(c) Pour $\mathcal{B}(100\,;0{,}032)$, l'espérance vaut $100 \times 0{,}032 = 3{,}2$ et la variance $100 \times 0{,}032 \times 0{,}968 = 3{,}0976$. Cette variance est différente de $V(D) = 3{,}076$, donc D ne suit pas cette loi : Léa a tort. Les deux binomiales n'ont pas le même paramètre p, donc leur somme n'est pas binomiale. On peut seulement additionner les espérances et les variances.

Ex. 40 **(suite)**

(d) Par linéarité, $E(C) = 12 \times 3{,}2 + 20 = 58{,}4$ €. On a $V(C) = 12^2 \times 3{,}076 = 442{,}944$, donc $\sigma(C) = 12\,\sigma(D) = 12\sqrt{3{,}076} \approx 21{,}05$ €. Attention : 3,076 est une variance, pas un écart type. Interprétation : sur un grand nombre de productions (40 pièces par A et 60 par B), le coût moyen est d'environ 58,40 €.

Ex. 41 ★★★ **Le sondage d'Inès**

(a) Pour i de 1 à n, on pose $X_i = 1$ si la i-ième personne répond « oui », 0 sinon. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On a $E(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$ et $E(X_i^2) = p$, donc $V(X_i) = p - p^2 = p(1-p)$. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = np$. Les réponses sont indépendantes, donc les X_i le sont aussi. Par conséquent, $V(S_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = np(1-p)$.

(b) $E(S_{400}) = 400 \times 0{,}6 = 240$ et $V(S_{400}) = 400 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 96$.
Donc $\sigma(S_{400}) = \sqrt{96} \approx 9{,}798$. En moyenne, Inès obtient 240 « oui ».

(c) $F = \frac{1}{400} S_{400}$, donc $\sigma(F) = \frac{1}{400}\sigma(S_{400})$ car $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$. On divise par n, et non par $\sqrt{n}$: Tom trouverait 0,490, ce qui est faux. On obtient $E(F) = \frac{240}{400} = 0{,}6$ et $\sigma(F) = \frac{\sqrt{96}}{400} \approx 0{,}024$.

(d) On a $\sigma(F) = \sqrt{\frac{0{,}6 \times 0{,}4}{n}}$. Alors $\sigma(F) \leqslant 0{,}01$ équivaut à $\frac{0{,}24}{n} \leqslant 0{,}0001$, soit $n \geqslant 2400$. Inès doit interroger au moins 2400 personnes.

Ex. 42 ★★★ **Le défi du six entre Yanis et Margot**

(a) Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli, de succès « obtenir 6 », de paramètre $\frac{1}{6}$. Les lancers sont indépendants.
Donc Y suit $\mathcal{B}(12\,;\frac{1}{6})$ et M suit $\mathcal{B}(18\,;\frac{1}{6})$. Elles sont indépendantes et ont le même paramètre : T compte les succès de 30 épreuves indépendantes de paramètre $\frac{1}{6}$. Ainsi, T suit $\mathcal{B}(30\,;\frac{1}{6})$.

(b) Le duo paie $30 \times 2 = 60$ €, donc $G = aT - 60$. Par linéarité, $E(G) = a \times 30 \times \frac{1}{6} - 60 = 5a - 60$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, c'est-à-dire si $a = 12$.

(c) $\frac{25}{6}$ est la variance : $V(T) = 30 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$. L'écart type vaut donc $\sigma(T) = \sqrt{\frac{25}{6}} \approx 2{,}04$. Avec $G = 12T - 60$, on a $V(G) = 12^2 \times \frac{25}{6} = 600$ et $\sigma(G) = \sqrt{600} \approx 24{,}49$ €.

(d) Le nouveau gain est $G' = 20M - 60$. On a $E(M) = 18 \times \frac{1}{6} = 3$, donc par linéarité $E(G') = 20 \times 3 - 60 = 0$: le jeu est encore équitable.

Ex. 42 (suite)

(e) M suit $\mathcal{B}(18\,;\frac{1}{6})$, donc $V(M) = 18 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{2}$. Alors $V(G') = 20^2 \times \frac{5}{2} = 1000$ et $\sigma(G') = \sqrt{1000} \approx 31{,}62$ €. Comme $\sigma(G') > \sigma(G) \approx 24{,}49$ €, le gain de la nouvelle règle est plus dispersé : la première règle est la moins risquée.

7. *Problèmes type bac*

Ex. 43 ★☆☆ File d'attente au guichet

(a) Par linéarité de l'espérance : $E(S_{36}) = 36 \times 4 = 144$ min.

(b) La formule multiplie la variance, pas l'écart type : $V(X) = 1{,}5^2 = 2{,}25$, donc $V(S_{36}) = 36 \times 2{,}25 = 81$.

(c) $\sigma(S_{36}) = \sqrt{81} = 9$ min.

(d) $E(M_{36}) = E(X) = 4$ min et $\sigma(M_{36}) = \frac{1{,}5}{\sqrt{36}} = \frac{1{,}5}{6} = 0{,}25$ min.

(e) Les 100 temps forment un échantillon : $V(S_{100}) = 100 \times 2{,}25 = 225$, donc $\sigma(S_{100}) = \sqrt{225} = 15$ min (c'est bien $1{,}5\sqrt{100}$).

Ex. 44 ★☆☆ Sinistres d'un assuré

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}1 = 1$.

(b) $E(X^2) = 1 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}1 = 2$, donc $V(X) = 2 - 1^2 = 1$.

(c) Par linéarité : $E(C) = 200 \times 1 + 30 = 230$ €.

(d) $\sigma(C) = |200| \times \sigma(X) = 200 \times 1 = 200$ € (la constante 30 ne change pas la dispersion).

(e) X et Y sont indépendantes (énoncé), donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 1 + 1 = 2$.

(f) $C + C' = 200(X + Y) + 60$. Par linéarité : $E(C + C') = 200 \times 2 + 60 = 460$ €. Avec $V(aZ + b) = a^2 V(Z)$ et la question précédente (X, Y indépendantes) : $V(C + C') = 200^2 \times 2 = 80\,000$.

Ex. 45 ★★☆ Roue de la fête foraine

(a) $E(G) = 5 \times 0{,}3 + 20 \times 0{,}1 = 3{,}5$ €. $E(G^2) = 25 \times 0{,}3 + 400 \times 0{,}1 = 47{,}5$, donc $V(G) = 47{,}5 - 3{,}5^2 = 35{,}25$.

(b) Par linéarité : $E(N) = 3{,}5 - 4 = -0{,}5$ € et $V(N) = V(G) = 35{,}25$ (une constante ne change pas la variance). En moyenne, le joueur perd 0,50 € par partie.

(c) Le jeu est équitable si l'espérance du gain net est nulle : $E(G) - m = 0$, donc $m = 3{,}50$ €.

Ex. 45 (suite)

(d) Le forain gagne en moyenne $4 - E(G)$ par partie. On veut $4 - E(G) = 1$, soit $E(G) = 3$. Avec un gros lot de L euros : $5 \times 0{,}3 + 0{,}1L = 3$, donc $L = 15$ €. Alors $E(G^2) = 25 \times 0{,}3 + 225 \times 0{,}1 = 30$ et $V(G) = 30 - 3^2 = 21$: les gains du joueur sont moins dispersés.

Ex. 46 ★★☆ Trajet en trois étapes

(a) $E(T_3) = \frac{0+2+4+6}{4} = 3$ min. $E(T_3^2) = \frac{0+4+16+36}{4} = 14$, donc $V(T_3) = 14 - 9 = 5$.

(b) Par linéarité : $E(T) = 8 + 15 + 3 = 26$ min. En moyenne, le trajet dure 26 minutes.

(c) Non : ce sont les variances qui s'ajoutent, pas les écarts types. Les étapes sont indépendantes (énoncé), donc $V(T) = 1^2 + 3^2 + 5 = 15$ et $\sigma(T) = \sqrt{15} \approx 3{,}873$ min, et non $4 + \sqrt{5} \approx 6{,}236$.

(d) Les 20 durées forment un échantillon de la loi de T : $E(D) = 20 \times 26 = 520$ min et $V(D) = 20 \times 15 = 300$, donc $\sigma(D) = \sqrt{300} \approx 17{,}321$ min.

(e) $V(M_{20}) = \frac{15}{20} = 0{,}75$, donc $\sigma(M_{20}) = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}866$ min : la durée moyenne est beaucoup moins dispersée qu'un trajet isolé.

Ex. 47 ★★★ Contrôle qualité de boîtes de vis

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}05 = 0{,}75$. $E(X^2) = 0{,}3 + 4 \times 0{,}15 + 9 \times 0{,}05 = 1{,}35$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1{,}35 - 0{,}5625 = 0{,}7875$.

(b) Par linéarité de l'espérance, $E(C) = 2E(X) + 0{,}5 = 2$ €. Avec $V(aX + b) = a^2 V(X)$, on a $V(C) = 4 \times 0{,}7875 = 3{,}15$, donc $\sigma(C) = \sqrt{3{,}15} \approx 1{,}77$ €. En moyenne, contrôler une boîte coûte 2 €.

(c) Les boîtes sont contrôlées indépendamment et ont toutes la même loi. Leurs coûts forment donc un échantillon de taille 400 de la loi de C, et $T = S_{400}$. On obtient $E(T) = 400 \times 2 = 800$ € et $V(T) = 400 \times 3{,}15 = 1\,260$, d'où $\sigma(T) = \sqrt{1\,260} \approx 35{,}50$ €.

(d) Elle a tort. $E(M_{400}) = 2$ €, mais $\sigma(M_{400}) = \frac{\sigma(C)}{\sqrt{400}} = \frac{\sqrt{3{,}15}}{20} \approx 0{,}09$ €. Le coût moyen est 20 fois moins dispersé que le coût d'une seule boîte.

(e) $V(M_n) = \frac{3{,}15}{n} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{3{,}15}{0{,}01} = 315$. Le lot doit compter au moins 315 boîtes. Vérification : $\frac{3{,}15}{315} = 0{,}01$.

Ex. 48 ★★★ **Stand de penalties du club de handball**

(a) X_1 suit une loi de Bernoulli : $P(X_1 = 1) = 0{,}35$ et $P(X_1 = 0) = 0{,}65$.
Donc $E(X_1) = 0{,}35$ et $V(X_1) = 0{,}35 \times 0{,}65 = 0{,}2275$.

(b) $N = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$. Par linéarité de l'espérance, $E(N) = 10 \times 0{,}35 = 3{,}5$. Les tirs sont indépendants d'après l'énoncé, donc les variances s'ajoutent : $V(N) = 10 \times 0{,}2275 = 2{,}275$. On retrouve np et $np(1-p)$ pour N, qui suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}35)$.

(c) Par linéarité, $E(B) = m - 3E(N) = m - 10{,}5$. On veut $m - 10{,}5 \geqslant 2$, soit $m \geqslant 12{,}50$. La mise minimale est $12{,}50$ €.

(d) $E(B) = 13 - 3 \times 3{,}5 = 2{,}50$ €. Avec $V(aX+b) = a^2V(X)$: $V(B) = (-3)^2 \times 2{,}275 = 20{,}475$, donc $\sigma(B) = \sqrt{20{,}475} \approx 4{,}52$ €. Attention, $a = -3$ mais $a^2 = 9$. En moyenne, le club gagne 2,50 € par joueur.

(e) Les bénéfices sur les 50 joueurs forment un échantillon de taille 50 de la loi de B. L'espérance du bénéfice total est $50 \times 2{,}5 = 125$ € et sa variance vaut $50 \times 20{,}475 = 1\,023{,}75$, donc son écart type est $\sqrt{1\,023{,}75} \approx 32{,}00$ €. En moyenne, le stand rapporte 125 € par jour au club : il est rentable.

Ex. 49 ★★★ **Atelier de réparation de vélos**

(a) $E(X) = 0{,}2 + 1 + 0{,}9 = 2{,}1$ et $E(X^2) = 0{,}2 + 2 + 2{,}7 = 4{,}9$, donc $V(X) = 4{,}9 - 4{,}41 = 0{,}49$. $E(Y) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$ et $E(Y^2) = 0{,}4 + 0{,}8 = 1{,}2$, donc $V(Y) = 1{,}2 - 0{,}64 = 0{,}56$.

(b) Par indépendance, $P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$. On obtient $P(T=1) = 0{,}08$; $P(T=2) = 0{,}08 + 0{,}2 = 0{,}28$; $P(T=3) = 0{,}04 + 0{,}2 + 0{,}12 = 0{,}36$; $P(T=4) = 0{,}1 + 0{,}12 = 0{,}22$; $P(T=5) = 0{,}06$. La somme fait bien 1.

(c) $E(T) = 0{,}08 + 0{,}56 + 1{,}08 + 0{,}88 + 0{,}3 = 2{,}9$ et $E(T^2) = 9{,}46$, donc $V(T) = 9{,}46 - 8{,}41 = 1{,}05$. Avec les propriétés du cours : par linéarité, $E(T) = 2{,}1 + 0{,}8 = 2{,}9$; comme X et Y sont indépendantes, $V(T) = 0{,}49 + 0{,}56 = 1{,}05$.

(d) Par linéarité, $E(R) = 25 \times 2{,}9 - 30 = 42{,}50$ €. Ensuite, $\sigma(R) = 25\,\sigma(T) = 25\sqrt{1{,}05} \approx 25{,}62$ €. En moyenne, l'atelier gagne 42,50 € par jour.

(e) Le calcul de Hugo donne $0{,}49 - 0{,}56 = -0{,}07$. C'est impossible, car une variance est toujours positive. Comme X et Y sont indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + V(Y) = 1{,}05$. Par linéarité, $E(D) = 2{,}1 - 0{,}8 = 1{,}3$.