48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

À retenir : Loi de X : liste toutes les valeurs x_i (sans oublier 0 ni les pertes, qui sont négatives), puis calcule $p_i = P(X = x_i)$ en regroupant les issues ; $\sum p_i = 1$. « Au moins 2 » : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$; « moins de 2 » : $X < 2$, inégalité stricte.

Ex. 1 ★☆☆ **Lire une loi : au plus, au moins, moins de** — X est le nombre de buts marqués par l'équipe de foot de Hugo lors d'un match pris au hasard dans la saison. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	0	1	2	3	4
P(X = x_i)	0,15	0,3	0,25	0,2	0,1

(a) Calcule $P(X = 2)$.

(b) Calcule $P(X \leqslant 2)$.

(c) Traduis « l'équipe marque moins de 2 buts » par un événement lié à X, puis calcule sa probabilité.

(d) Traduis « l'équipe marque au moins 2 buts » par un événement, puis calcule sa probabilité à l'aide de l'événement contraire.

(e) Vrai ou faux : $P(X > 2) = P(X \geqslant 2)$. Justifie.

(f) Calcule la probabilité que l'équipe marque au plus 3 buts.

Ex. 2 ★☆☆ **Compléter une loi, trouver un paramètre** — Dans chaque cas, utilise le fait que la somme des probabilités d'une loi vaut 1. Donne les résultats en valeur exacte.

(a) La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-1	0	3
P(X = x_i)	0,45	?	0,2

Calcule $P(X = 0)$.

(b) X prend les valeurs 1, 2 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et p. Calcule p.

(c) Pour chaque valeur k de X ($k = 0$, 1, 2 ou 3), $P(X = k) = (k + 1)a$, où a est un réel. Calcule a.

(d) X prend les valeurs 10, 20 et 50 avec les probabilités respectives 0,6, $2a$ et $0{,}5 - a$. Montre qu'aucun réel a ne convient.

(e) Lina affirme que 0,25, 0,5 et 0,2 peuvent être les probabilités respectives des valeurs 0, 1 et 2 d'une variable aléatoire. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 3 ★★☆ **Écart entre deux dés à la fête foraine** — À un stand de fête foraine, Inès lance deux dés équilibrés à six faces, un rouge et un vert. Une issue est un couple (rouge ; vert) ; les 36 issues sont équiprobables. X est la différence entre le plus grand et le plus petit des deux numéros.

(a) Quelle valeur la fonction X associe-t-elle à l'issue (2 ; 6) ? à l'issue (4 ; 4) ? Donne toutes les valeurs prises par X.

(b) Établis la loi de probabilité de X dans un tableau, avec des fractions de dénominateur 36.

(c) Inès gagne une peluche si l'écart vaut au moins 3. Calcule la probabilité qu'elle gagne une peluche.

(d) Calcule $P(1 \leqslant X \leqslant 4)$ sous forme de fraction irréductible.

Ex. 4 ★★☆ **Kermesse : tirage avec ou sans remise** — À la kermesse, un sac contient 3 jetons bleus (B) et 2 jetons jaunes (J). Lucas paie 3 € et tire deux jetons l'un après l'autre ; chaque jeton jaune obtenu lui rapporte 3 €. X est son gain net (gain moins mise), en euros. Une issue s'écrit (1er jeton ; 2e jeton).

(a) Quelle valeur la fonction X associe-t-elle à l'issue (J ; B) ? Donne toutes les valeurs prises par X.

(b) Le premier jeton est remis dans le sac avant le second tirage. Établis la loi de X en décrivant les chemins de l'arbre.

(c) Même question si le premier jeton n'est pas remis dans le sac.

(d) Dans quel cas Lucas a-t-il la plus grande probabilité de ne pas perdre d'argent ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **Loi lue dans un tableau croisé** — On interroge 80 usagers d'une ligne de bus sur leur titre de transport et sur le nombre de correspondances de leur trajet :

Usagers	0 corresp.	1 corresp.	2 corresp.	Total
Abonnés	18	20	12	50
Tickets	14	10	6	30
Total	32	30	18	80

Donne les résultats sous forme de fractions irréductibles.

(a) On choisit un usager au hasard parmi les 80. X est son nombre de correspondances. Établis la loi de probabilité de X.

(b) Calcule la probabilité que cet usager ait au moins une correspondance.

Ex. 5 **(suite)**

(c) On choisit maintenant un usager au hasard parmi les abonnés seulement. Z est son nombre de correspondances. Établis la loi de Z.

(d) Calcule la probabilité que cet abonné ait moins de 2 correspondances.

Ex. 6 ★★★ **Assurance auto : une loi à paramètre** — Un assureur étudie ses contrats auto. X est le nombre de sinistres déclarés en un an par un assuré pris au hasard. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant, où a est un réel :

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,5	$2a$	0,06	a^2

(a) Montre que a vérifie l'équation $a^2 + 2a - 0{,}44 = 0$.

(b) Résous cette équation, puis justifie quelle solution peut convenir.

(c) Donne la loi de probabilité de X dans un tableau et vérifie-la.

(d) Calcule la probabilité qu'un assuré déclare au moins un sinistre, puis la probabilité qu'il en déclare au plus deux.

(e) Yanis écrit : « $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $P(X \geqslant 2)$.

Ex. 7 ★★★ **Train et correspondance : durée du trajet** — Chloé va au lycée en train puis en bus. Le train est en retard avec la probabilité 0,2. Elle attrape son bus avec la probabilité 0,9 si le train est à l'heure, et 0,4 s'il est en retard. Son trajet dure 45 min, plus 15 min par imprévu (train en retard, bus raté). X est la durée du trajet, en minutes.

(a) Décris les quatre chemins de l'arbre pondéré et la valeur que la fonction X associe à chacun. Quelles valeurs X prend-elle ?

(b) Établis la loi de probabilité de X et vérifie-la.

(c) Calcule la probabilité que Chloé mette moins d'une heure, puis la probabilité qu'elle mette au plus une heure.

(d) On note p la probabilité de retard du train, les autres données restant les mêmes. Avec $p = 0{,}05$, calcule $P(X = 60)$.

(e) La région veut obtenir $P(X \geqslant 75) \leqslant 0{,}05$. Est-ce le cas aujourd'hui ? Quelles valeurs de p conviennent ?

Ex. 8 ★★★ **Tombola de la classe : gain net et loi corrigée** — Pour financer un voyage, une classe vend les 40 billets d'une tombola, à 2 € l'un. Un billet porte un lot de 30 €, trois billets un lot de 10 €, huit billets un lot de 2 € ; les autres ne gagnent rien. Noé achète un billet au hasard ; X est son gain net, en euros (valeur du lot moins prix du billet).

(a) Quelle valeur X associe-t-elle à un billet portant un lot de 10 € ? à un billet sans lot ? Donne toutes les valeurs prises par X.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Mathis propose cette loi pour X :

x_i	0	2	10	30
P(X = x_i)	0,8	0,2	0,075	0,025

Montre qu'elle est fausse sans refaire la loi, puis trouve ses deux erreurs.

(c) Établis la loi de probabilité exacte de X, en fractions irréductibles.

(d) Calcule la probabilité que Noé ne perde pas d'argent, puis celle qu'il gagne plus de 5 €.

(e) Les organisateurs veulent $P(X \geqslant 0) \geqslant \frac{1}{2}$ en transformant des billets sans lot en billets à lot de 2 €. Combien doivent-ils en transformer, au minimum ?

2. *Espérance : calculer et interpréter*

À retenir : $E(X) = \sum p_i x_i$: somme des « valeur × probabilité », signes compris, pas la moyenne simple des valeurs. Ex. : $-1 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}5 = 1{,}5$. Interprétation : « en moyenne, sur un grand nombre de répétitions », avec l'unité.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : calculer une espérance** — Dans chaque cas, calcule $E(X)$. Donne la valeur exacte.

(a) X prend les valeurs 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,2 ; 0,5 et 0,3.

(b) X prend les valeurs -4, 1 et 6 avec les probabilités 0,25 ; 0,5 et 0,25.

(c) X prend les valeurs -3 et 2, avec $P(X = -3) = 0{,}4$ et $P(X = 2) = 0{,}6$.

(d) Un ticket à gratter rapporte 0 €, 5 € ou 30 € avec les probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{10}$. X est le gain en euros.

(e) On lance un dé équilibré à 6 faces. X vaut -6 si le dé donne 1, vaut 1 s'il donne 2, 3 ou 4, et vaut 3 sinon.

(f) La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-5	-1	2	8
P(X = x_i)	0,1	0,3	0,4	0,2

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : retrouver une valeur ou une probabilité** — Dans chaque cas, trouve l'inconnue pour que $E(X)$ ait la valeur indiquée.

(a) X prend les valeurs 0, 2 et x avec les probabilités 0,5 ; 0,3 et 0,2, et $E(X) = 1{,}4$. Trouve x.

(b) $P(X = -1) = 0{,}4$, $P(X = 3) = 0{,}4$, $P(X = x) = 0{,}2$ et $E(X) = 2$. Trouve x.

(c) X prend les valeurs x, 5 et 10 avec les probabilités 0,5 ; 0,25 et 0,25, et $E(X) = 3$. Trouve x.

Ex. 10 **(suite)**

(d) La loi de X est donnée par le tableau

x_i	1	3	x
P(X = x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

et $E(X) = 3$. Trouve x.

(e) $P(X = 0) = p$, $P(X = 1) = 0{,}5$ et $P(X = 4) = 0{,}5 - p$, avec $E(X) = 1{,}3$. Trouve p.

Ex. 11 ★★☆ **La roue de la fête foraine** — Une roue de fête foraine a 10 secteurs identiques : 6 rouges, 3 verts et 1 doré. Le gain algébrique X (en euros) vaut -3 sur un rouge, 2 sur un vert et 10 sur le doré. Yanis affirme : « $E(X) = \frac{-3+2+10}{3} = 3$, donc je gagne 3 € à chaque partie. »

(a) Donne la loi de probabilité de X dans un tableau.

(b) Yanis fait deux erreurs. Explique-les.

(c) Calcule $E(X)$.

(d) Interprète $E(X)$ avec son unité, puis estime le résultat de Yanis sur 200 parties.

Ex. 12 ★★☆ **Deux stands à la kermesse** — Inès hésite entre deux stands. Jeu A : on lance une pièce équilibrée ; pile fait gagner 1 €, face fait lancer un dé équilibré à 6 faces : un 6 fait gagner 10 €, sinon on perd 3 €. Jeu B : on tire au hasard une boule parmi 2 vertes ($+3$ €) et 3 blanches (-2 €). X et Y sont les gains (en euros) des jeux A et B.

(a) Donne la loi de probabilité de X dans un tableau.

(b) Calcule $E(X)$: valeur exacte, puis arrondie au centime.

(c) Calcule $E(Y)$.

(d) Quel jeu Inès doit-elle choisir si elle joue un grand nombre de fois ? Justifie par une phrase avec l'unité.

Ex. 13 ★★☆ **Contrôle qualité en usine** — Dans une usine, on note X le nombre de défauts d'une pièce prise au hasard. X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3, avec $P(X = 0) = 0{,}6$, $P(X = 1) = 2a$, $P(X = 2) = a$ et $P(X = 3) = 0{,}1$, où a est un réel positif.

(a) Détermine a, puis donne la loi de X dans un tableau.

(b) Calcule $E(X)$.

(c) Interprète $E(X)$, puis estime le nombre total de défauts sur un lot de 1 000 pièces.

(d) Une stagiaire affirme : « Le calcul de $E(X)$ est forcément faux, car le résultat n'est pas un nombre entier de défauts. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **L'assurance des vélos électriques** — Une compagnie assure des vélos électriques pour une prime annuelle de 80 €. Son résultat R (en euros) sur un contrat pris au hasard vaut 80 sans sinistre, -70 pour une petite réparation, -520 pour une grosse réparation et $-1\,120$ en cas de vol. La loi de probabilité de R est donnée par le tableau :

r_i	80	-70	-520	−1 120
P(R = r_i)	0,85	0,1	p	0,01

(a) Détermine p.

(b) Calcule $P(R < 0)$, puis interprète ce résultat pour la compagnie.

(c) Léo écrit : $E(R) = 80 \times 0{,}85 + 70 \times 0{,}1 + 520 \times p + 1\,120 \times 0{,}01$. Repère son erreur, puis calcule $E(R)$.

(d) Vrai ou faux ? « Sur chaque contrat, la compagnie gagne exactement $E(R)$ euros. » Justifie, puis interprète $E(R)$ par une phrase.

(e) La compagnie a 2 000 contrats. Estime son résultat total sur un an.

Ex. 15 ★★★ **Deux points ou trois points ?** — Au basket, Noah hésite entre deux tirs. Tir A (2 points) : réussi avec la probabilité 0,5 ; s'il est réussi, Noah subit une faute dans 20 % des cas et tente alors un lancer franc, réussi avec la probabilité 0,8 (1 point de plus). Tir B (3 points) : réussi avec la probabilité p. X_A et X_B sont les nombres de points marqués avec chaque tir.

(a) Donne la loi de probabilité de X_A dans un tableau.

(b) Calcule $E(X_A)$. Noah peut-il marquer $E(X_A)$ points sur un tir ? Justifie, puis interprète $E(X_A)$ avec son unité.

(c) Donne la loi de X_B, puis exprime $E(X_B)$ en fonction de p.

(d) Pour quelles valeurs de p le tir B rapporte-t-il plus de points en moyenne que le tir A ?

(e) Pour Noah, $p = 0{,}34$. Sur 50 tirs, estime le nombre de points marqués avec chaque tir. Quel tir lui conseilles-tu ?

Ex. 16 ★★★ **Le gros lot de la tombola du judo** — Un club de judo vend 500 billets de tombola. Il y a 1 gros lot d'une valeur de x €, 4 bons d'achat de 50 € et 20 places de cinéma à 10 € ; les autres billets sont perdants. On note X la valeur (en euros) du lot gagné avec un billet pris au hasard.

(a) Donne la loi de probabilité de X dans un tableau, avec des probabilités décimales.

(b) Exprime $E(X)$ en fonction de x.

(c) Le club veut que $E(X) = 1{,}50$ €. Détermine x, puis interprète $E(X)$ par une phrase.

Ex. 16 (suite)

(d) Maëlle programme :

```
def moyenne(x, p):
    s = 0
    for v in x:
        s = s + v
    return s / len(x)
```

Avec x trouvé, que renvoie `moyenne` appelée avec les listes de la loi de X ? Pourquoi n'est-ce pas $E(X)$?

(e) Écris une fonction `esperance(x, p)` correcte, puis donne ce qu'elle renvoie avec ces mêmes listes.

3. *Variance et écart type*

À retenir : $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2 \geqslant 0$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, dans l'unité de X. $V(X) = 0$ seulement si X est constante. Ex. : $X = -2$ ou 2 (proba $\frac{1}{2}$) : $V(X) = 4$, $\sigma(X) = 2$. On arrondit à la fin.

Ex. 17 ★☆☆ **Variance avec la ligne des écarts** — La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous. Arrondis au centième si besoin.

x_i	-1	2	5	8
P(X = x_i)	0,2	0,3	0,4	0,1

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Écris la ligne des écarts $x_i - E(X)$, puis celle de leurs carrés.

(c) Calcule $V(X)$ avec la définition $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$.

(d) Léo additionne les carrés des écarts sans les multiplier par les probabilités. Quel nombre trouve-t-il ? Explique son erreur.

(e) Donne $\sigma(X)$ arrondi au centième.

Ex. 18 ★☆☆ **Vrai ou faux express sur la dispersion** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie en une ligne.

(a) « Si $V(X) = 9$, alors $\sigma(X) = 81$. »

(b) « Si X est une durée en minutes, $\sigma(X)$ s'exprime en minutes et $V(X)$ en minutes au carré. »

(c) « On peut avoir $E(X) = 4$ et $E(X^2) = 13$. »

(d) « Si X prend la seule valeur 7, avec la probabilité 1, alors $V(X) = 0$. »

(e) « Si X prend les valeurs 3 et 5, chacune avec la probabilité $\frac{1}{2}$, alors $V(X) = 0$. »

(f) « Avec $E(X) = 1{,}25$ et $E(X^2) = 3$, arrondir d'abord $E(X)$ à 1,3 donne $V(X)$ correcte au centième. »

Ex. 19 ★★☆ **Livret sûr ou placement risqué** — Inès place 1\,000 € pendant un an. Avec le placement A, elle gagne 30 € à coup sûr : on note A ce gain. Avec le placement B, son gain B (en euros) suit la loi ci-dessous. Arrondis au centième.

b_i	-60	30	75
P(B = b_i)	0,2	0,4	0,4

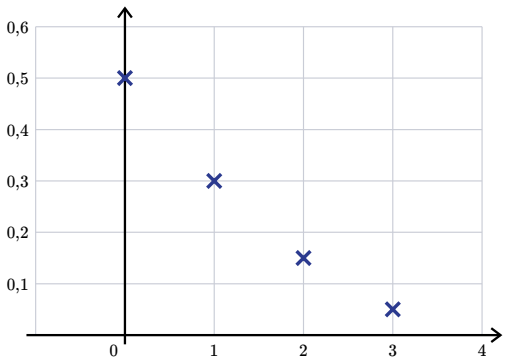
(a) Calcule $E(A)$ et $E(B)$. Que constates-tu ?

(b) Sans calcul, donne $V(A)$ et $\sigma(A)$. Justifie.

(c) Calcule $E(B^2)$, puis la valeur exacte de $V(B)$ et $\sigma(B)$ arrondi au centième.

(d) Interprète $\sigma(B)$. Inès ne veut prendre aucun risque : quel placement lui conseilles-tu ? Justifie.

Ex. 20 ★★☆ **Défauts de fabrication : l'erreur de Hugo** — Dans une usine, on prélève une pièce au hasard. X est son nombre de défauts : X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,5 ; 0,3 ; 0,15 et 0,05. Arrondis au centième.



(a) Calcule $E(X)$.

(b) Hugo écrit : « $E(X^2) = E(X)^2$, donc $V(X) = 0$. » Explique son erreur, puis calcule $E(X^2)$ et $V(X)$.

(c) Calcule $\sigma(X)$ et interprète-le dans le contexte.

Ex. 21 ★★☆ **La roue de la fête foraine et Python** — À la fête foraine, une roue est partagée en 8 secteurs identiques : 4 blancs, 3 bleus et 1 doré. Un secteur blanc ne rapporte rien, un bleu rapporte 2 € et le doré 10 €. On note X le gain (en euros) d'un lancer. Arrondis au centième.

(a) Donne la loi de probabilité de X dans un tableau, avec une ligne des x_i^2.

(b) Calcule $E(X)$ et $E(X^2)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$.

(c) Interprète $E(X)$ et $\sigma(X)$ dans le contexte.

Ex. 21 **(suite)**

(d) Complète les deux pointillés pour que la fonction renvoie l'écart type à partir des listes `x` et `p`.

```
from math import sqrt

def ecart_type(x, p):
    e = 0
    for i in range(len(x)):
        e = e + p[i]*x[i]
    v = 0
    for i in range(len(x)):
        v = v + ...
    return ...
```

(e) Que renvoie `ecart_type([0, 2, 10], [1/2, 3/8, 1/8])` (arrondi au centième) ? Compare avec $\sigma(X)$.

Ex. 22 ★★★ **Tir à l'arc : deux inconnues et la régularité** — Au tir à l'arc, le score X de Léna sur une flèche prend les valeurs 0, 2, 5 et 10. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous, où p et q sont deux réels. On sait que $E(X) = 5$. N'arrondis qu'à la fin, au centième.

x_i	0	2	5	10
P(X = x_i)	0,1	0,3	p	q

(a) Écris deux équations vérifiées par p et q, puis détermine p et q.

(b) Ajoute une ligne des x_i^2 au tableau et calcule $E(X^2)$. Donne ensuite la valeur exacte de $V(X)$ et une valeur arrondie de $\sigma(X)$.

(c) Léna affirme : « En moyenne, mon score s'écarte de 5 d'environ $V(X)$ points. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Le score de Malo a aussi une espérance de 5 points, avec un écart type de 2 points. Le coach veut le tireur le plus régulier. Lequel doit-il choisir ? Justifie.

Ex. 23 ★★★ **Le prix d'une course en taxi** — Un taxi facture 4 € de prise en charge, plus 1,50 € par kilomètre. La distance X (en km) d'une course prise au hasard a la loi de probabilité ci-dessous. Le prix C (en euros) de la course est donc $C = 1{,}5X + 4$. Arrondis au centième, à la fin seulement.

x_i	2	4	6	10
P(X = x_i)	0,4	0,3	0,2	0,1

(a) Calcule $E(X)$ et $E(X^2)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$ (en km).

(b) Donne la loi de C dans un tableau. Calcule $E(C)$ à partir de cette loi, puis vérifie ton résultat par linéarité.

(c) Approfondissement (hors programme) : soit $Y = aX + b$, qui prend les valeurs $y_i = ax_i + b$. Exprime $y_i - E(Y)$ en fonction de $x_i - E(X)$, puis démontre que $V(Y) = a^2 V(X)$.

(d) Déduis-en la valeur exacte de $V(C)$, puis $\sigma(C)$ arrondi au centième.

Ex. 23 **(suite)**

(e) Le chauffeur affirme : « $\sigma(C) = 1{,}5\,\sigma(X) + 4$ ». Vrai ou faux ? Justifie, puis interprète $\sigma(C)$.

Ex. 24 ★★★ **Kermesse : le lot de l'as et le risque** — À la kermesse, Nora propose le jeu A. On mise 2 €, puis on tire une carte au hasard parmi 10 : 1 as, 3 rois et 6 autres cartes. L'as rapporte un lot de L euros, un roi rapporte 2 € et une autre carte ne rapporte rien. On note G le gain net du joueur, en euros. Arrondis au centième.

(a) Donne la loi de G en fonction de L, puis détermine L pour que le jeu A soit équitable.

(b) Dans la suite, L prend la valeur trouvée. Calcule $V(G)$ et $\sigma(G)$.

(c) Soit X une variable aléatoire dont toutes les probabilités p_i sont non nulles. Démontre que si $V(X) = 0$, alors X ne prend qu'une seule valeur.

(d) Tom calcule $E(G^2)$ en multipliant chaque valeur de G, sans la mettre au carré, par sa probabilité. Il trouve $V(G) = 0$. Explique son erreur, puis pourquoi ce résultat était forcément faux.

(e) Jeu B : on mise 2 € et on lance une pièce équilibrée. Pile rapporte 4 €, face ne rapporte rien. Montre que B est équitable, puis dis quel jeu est le plus risqué. Justifie.

4. *Formule de König-Huygens*

À retenir : Ajoute une ligne des x_i^2, puis calcule $E(X^2) = \sum p_i x_i^2$ et $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$, puis $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. On élève les valeurs au carré, pas les p_i. Ex. : $E(X) = 2$ et $E(X^2) = 7$ donnent $V(X) = 3$. Si $V(X) < 0$, il y a une erreur.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : König-Huygens en une ligne** — Calcule directement.

(a) On sait que $E(X) = 3$ et $E(X^2) = 13$. Calcule $V(X)$.

(b) On sait que $E(X) = -2$ et $V(X) = 5$. Calcule $E(X^2)$.

(c) On sait que $V(X) = 6{,}25$. Calcule $\sigma(X)$.

(d) X prend les valeurs -3 et 2 avec les probabilités 0,4 et 0,6. Calcule $E(X^2)$.

(e) Un élève trouve $E(X) = 4$ et $E(X^2) = 10$ pour une même variable X. Montre qu'il s'est forcément trompé.

(f) On sait que $E(X) = 0{,}5$ et $E(X^2) = 2$. Calcule $V(X)$.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : la ligne des carrés** — La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous. Arrondis au centième si besoin.

x_i	-3	-1	0	4
P(X = x_i)	0,1	0,3	0,4	0,2
x_i^2	…	…	…	…

(a) Complète la ligne des x_i^2 du tableau.

Ex. 26 **(suite)**

(b) Calcule $E(X)$.

(c) Calcule $E(X^2)$.

(d) Déduis-en $V(X)$.

(e) Donne $\sigma(X)$.

(f) Calcule $\big(E(X)\big)^2$ et compare ce nombre à $E(X^2)$.

Ex. 27 ★★☆ **Fête foraine : corrige Noé** — À la fête foraine, Noé joue au chamboule-tout. Son gain net X, en euros, prend les valeurs -2, 1 et 6. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-2	1	6
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,2

Arrondis au centième si besoin.

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Noé écrit $E(X^2) = -2 \times 0{,}5^2 + 1 \times 0{,}3^2 + 6 \times 0{,}2^2$. Explique son erreur, puis calcule correctement $E(X^2)$.

(c) Noé écrit ensuite $V(X) = E(X^2) - E(X)$. A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $V(X)$.

(d) Donne $\sigma(X)$, puis interprète $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour Noé.

Ex. 28 ★★☆ **Contrôle qualité : un paramètre, deux calculs de variance** — Dans une usine, on contrôle des cadres de vélo. X est le nombre de défauts d'un cadre pris au hasard. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant, où p est un réel :

x_i	0	1	2
P(X = x_i)	0,4	2p	p

(a) Détermine p, puis donne la loi de probabilité de X dans un tableau.

(b) Calcule $E(X)$ et interprète ce résultat.

(c) Calcule $V(X)$ avec la formule de König-Huygens.

(d) Recalcule $V(X)$ avec la définition $V(X) = \sum p_i\big(x_i - E(X)\big)^2$ et vérifie que tu retrouves le même résultat.

Ex. 29 ★★☆ **Python : la variance par König-Huygens** — Lina écrit une fonction Python qui reçoit la liste `x` des valeurs de X et la liste `p` des probabilités, et qui doit renvoyer $V(X)$ par la formule de König-Huygens.

```
def variance(x, p):
    e = 0
    e2 = 0
    for i in range(len(x)):
        e = e + p[i]*x[i]
        e2 = ...
    return e2 - e**2
```

(a) Complète la ligne 6 pour que `e2` contienne $E(X^2)$ à la fin de la boucle.

(b) X prend les valeurs -3, 0 et 5 avec les probabilités $0{,}3$; $0{,}5$ et $0{,}2$. Calcule à la main la valeur renvoyée par `variance([-3, 0, 5], [0.3, 0.5, 0.2])`.

Ex. 29 **(suite)**

(c) Un élève remplace la dernière ligne par `return e**2 - e2`. Que renvoie sa fonction avec les mêmes listes ? Explique son erreur.

(d) Modifie la dernière ligne pour que la fonction renvoie $\sigma(X)$. Quelle valeur renvoie-t-elle avec les mêmes listes ? Arrondis au centième.

Ex. 30 ★★★ **Démontrer la formule de König-Huygens** — X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$. On note $\mu = E(X)$ et $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2$. On veut démontrer que $V(X) = E(X^2) - \mu^2$.

(a) Développe $(x_i - \mu)^2$ pour tout i.

(b) Multiplie par p_i, puis additionne pour i allant de 1 à n. Montre que $V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i$.

(c) Conclus que $V(X) = E(X^2) - \mu^2$. Cite les deux résultats que tu utilises.

(d) Explique pourquoi $V(X) \geqslant 0$. Déduis-en que $E(X^2) \geqslant \big(E(X)\big)^2$ pour toute variable X.

(e) Pour une variable Y, on sait que $E(Y) = 3$. Quelle est la plus petite valeur possible de $E(Y^2)$? Donne une variable Y pour laquelle elle est atteinte.

Ex. 31 ★★★ **Fléchettes : retrouver une loi à partir de E(X) et V(X)** — Lors d'un concours de fléchettes, le score X d'un lancer de Maëlys prend les valeurs -3, 1 et 4. On note $a = P(X = -3)$, $b = P(X = 1)$ et $c = P(X = 4)$. On sait que $E(X) = 1{,}1$ et $V(X) = 5{,}89$. Arrondis au centième si besoin.

(a) Calcule $E(X^2)$.

(b) Écris trois équations vérifiées par a, b et c.

(c) Résous ce système. Donne la loi de probabilité de X dans un tableau.

(d) Vérifie la valeur de $V(X)$ avec la définition $V(X) = \sum p_i\big(x_i - E(X)\big)^2$.

(e) Calcule $\sigma(X)$. Interprète $E(X)$.

Ex. 32 ★★★ **Tram : une variance qui dépend d'un paramètre** — Sur une ligne de tram, X est le retard, en minutes, d'une rame prise au hasard. X prend les valeurs 0, 1 et 3, avec $P(X = 3) = 0{,}1$ et $P(X = 1) = p$, où p est un réel. Arrondis au centième si besoin.

(a) Exprime $P(X = 0)$ en fonction de p. Quelles valeurs p peut-il prendre ? Justifie.

(b) Exprime $E(X)$ et $E(X^2)$ en fonction de p.

(c) Montre que $V(X) = -p^2 + 0{,}4p + 0{,}81$.

(d) Le réseau annonce un retard moyen de 0,5 minute. Détermine p, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$.

(e) Pour quelle valeur de p la variance $V(X)$ est-elle la plus grande ? Justifie.

5. *Transformation $aX + b$ et linéarité de l'espérance*

À retenir : $Y = aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les mêmes p_i ; $E(aX + b) = aE(X) + b$, par exemple $E(50 - 2X) = 50 - 2E(X)$. Approfondissement : $V(aX + b) = a^2V(X)$ (sans b) et $\sigma(-3X) = 3\sigma(X)$.

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : linéarité de l'espérance** — Une variable aléatoire X a pour espérance $E(X) = 4$.

(a) On pose $Y = 40 - 3X$. Donne a et b tels que $Y = aX + b$, avec leur signe.

(b) Calcule $E(Y)$.

(c) Calcule $E(X + 7)$.

(d) X est une durée en heures. Exprime cette durée en minutes en fonction de X, puis calcule son espérance.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : loi de aX + b aux fléchettes** — Aux fléchettes, Inès marque X points par lancer. La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	-1	2	4
P(X = x_i)	0,2	0,5	0,3

(a) On pose $Y = 3X + 1$. Donne les valeurs prises par Y.

(b) Calcule $P(Y = 7)$.

(c) Calcule $P(Y \geqslant 7)$.

(d) Calcule $E(X)$.

(e) Déduis-en $E(Y)$ sans écrire la loi de Y.

(f) On pose $Z = 10 - X$. Donne les valeurs prises par Z, puis calcule $P(Z \geqslant 8)$.

Ex. 35 ★★☆ **Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit** — À midi, en juin, la température d'une ville est X, en °C. Sa loi est donnée par le tableau :

x_i	18	20	22	25
P(X = x_i)	0,1	0,4	0,3	0,2

En °F, la température est $F = 1{,}8X + 32$. Arrondis au centième si besoin.

(a) Calcule $E(X)$ et interprète ce résultat.

(b) Calcule $E(X^2)$, puis $V(X)$ avec la formule de König-Huygens, puis $\sigma(X)$.

(c) Identifie a et b dans $F = aX + b$, puis calcule $E(F)$ sans écrire la loi de F.

(d) Approfondissement : exprime $F - E(F)$ en fonction de $X - E(X)$. Déduis-en $V(F)$ et $\sigma(F)$. Pourquoi le 32 n'intervient-il pas ?

Ex. 36 ★★☆ **Contrôle qualité : coût fixe et coût variable** — Dans un lot de pièces, X est le nombre de pièces défectueuses. Sa loi est donnée par le tableau :

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,5	0,3	0,15	0,05

Chaque pièce défectueuse coûte 15 € à réparer, et le contrôle coûte 40 € de frais fixes. Le coût du lot est $C = 15X + 40$, en euros.

(a) Calcule $E(X)$.

(b) Donne la loi de probabilité de C sous forme de tableau.

(c) Calcule $E(C)$ à partir de la loi de C, puis vérifie avec la linéarité. Interprète.

(d) Malik propose un nouveau contrat de coût $C' = aX + 30$. Détermine a pour que $E(C') = 60$ €.

Ex. 37 ★★☆ **Fête foraine : le bénéfice de l'organisateur** — À un stand de fête foraine, le joueur paie 3 € et reçoit un gain brut X, en euros. La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	0	2	5	10
P(X = x_i)	0,55	0,25	0,15	0,05

Le bénéfice de l'organisateur sur une partie est $B = 3 - X$. Arrondis au centième si besoin.

(a) Calcule $E(X)$ et $E(X^2)$, puis déduis-en $V(X)$.

(b) Identifie a et b dans $B = aX + b$, avec leur signe. Calcule $E(B)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifie.

(c) Établis la loi de B, puis recalcule $V(B)$ à partir de cette loi. Compare avec $V(X)$.

(d) Lina affirme : « $\sigma(B) = -\sigma(X)$, car $a = -1$ ». Vrai ou faux ? Justifie et donne $\sigma(B)$.

Ex. 38 ★★★ **Démontrer les règles de aX + b, puis corriger Lucas** — Une variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. On note a et b deux réels. Dans un jeu de plateau, Lucas avance de X cases à chaque tour ($X = -1$: il recule d'une case). La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	-1	0	2
P(X = x_i)	0,25	0,5	0,25

Le score du tour est $Y = 5 - 3X$. Arrondis au centième si besoin.

(a) Démontre que $E(aX + b) = a\,E(X) + b$. Précise à quel moment tu utilises $\sum p_i = 1$.

(b) Déduis-en l'espérance de la variable centrée $X - E(X)$. Donne d'abord a et b.

(c) Approfondissement. Démontre que $V(aX + b) = a^2\,V(X)$, puis que $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$.

Ex. 38 (suite)

(d) Pour la loi du jeu de plateau, calcule $E(X)$, $E(X^2)$, puis $V(X)$.

(e) Lucas écrit : « $V(Y) = -3\,V(X) + 5$ ». Calcule sa valeur. Recalcule $V(Y)$ à partir de la loi de Y, puis donne $\sigma(Y)$. Explique ses deux erreurs.

Ex. 39 ★★★ **Gymnastique : harmoniser les notes d'un jury** — À une compétition de gymnastique, on choisit une gymnaste au hasard. X est sa note donnée par un juge. La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	6	8	10	12
P(X = x_i)	0,1	0,3	0,4	0,2

Les organisateurs veulent transformer les notes en $Z = aX + b$.

(a) Calcule $E(X)$, puis $V(X)$ avec la formule de König-Huygens, et $\sigma(X)$.

(b) Approfondissement. On veut $a > 0$, $E(Z) = 14$ et $\sigma(Z) = 3{,}6$. Détermine a, puis b.

(c) Établis la loi de Z dans un tableau. Recalcule $V(Z)$ à partir de cette loi, puis vérifie que $\sigma(Z) = 3{,}6$.

(d) Chloé propose $Z' = -2X + b'$: « même écart type que Z ». Trouve b' tel que $E(Z') = 14$, vérifie $\sigma(Z')$, puis explique pourquoi ce choix est inacceptable.

Ex. 40 ★★★ **Kermesse : mise équitable et gains doublés** — À la kermesse, Nora tire une boule : elle est rouge avec la probabilité 0,4. Si elle est rouge, Nora fait tourner une roue et gagne 20 € avec la probabilité 0,25, sinon 2 €. Si la boule n'est pas rouge, elle ne gagne rien. X est le gain brut, en euros. Arrondis au centième.

```
def esperance(valeurs, probas):
    e = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        e = e + valeurs[i] * probas[i]
    return e

def variance(valeurs, probas):
    m = esperance(valeurs, probas)
    v = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        v = v + ...
    return v
```

(a) Établis la loi de probabilité de X dans un tableau.

(b) Complète la ligne `v = v + ...`. Écris l'instruction qui affiche $V(X)$ arrondie au dix-millième, puis donne ce qu'elle affiche.

(c) On note m la mise et $G = X - m$ le gain net. Calcule $E(X)$, puis la mise qui rend le jeu équitable. L'organisateur choisit $m = 3$ € : estime son bénéfice sur 500 parties.

(d) L'organisateur double les gains bruts et veut gagner 0,50 € par partie en moyenne. Trouve la nouvelle mise m', puis, en approfondissement, l'écart type du gain net. Interprète.

6. *Jeu équitable : gain net, mise et paramètre*

À retenir : Gain net $G = Y - m$: la mise est payée même quand on gagne, et une issue perdante donne $G = -m$, pas 0. $E(G) = E(Y) - m$; le jeu est équitable si $E(G) = 0$. Exemple : $E(Y) = 3$ et $m = 3{,}5$ donnent $E(G) = -0{,}5$, jeu défavorable.

Ex. 41 ★☆☆ **Gain net en un coup d'œil** — Dans chaque question, un joueur paie une mise m à chaque partie et reçoit un gain brut Y. Son gain net est $G = Y - m$.

(a) $m = 3$ € et le joueur reçoit 10 €. Quel est son gain net ?

(b) $m = 3$ € et le joueur perd la partie : il ne reçoit rien. Quel est son gain net ?

(c) $E(Y) = 2{,}40$ € et $m = 3$ €. Calcule $E(G)$.

(d) $E(Y) = 3{,}20$ € et $m = 2{,}50$ €. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifie.

(e) $E(Y) = 4{,}75$ €. Quelle mise m rend le jeu équitable ?

(f) $E(G) = -0{,}35$ €. Combien l'organisateur peut-il espérer gagner sur 400 parties ?

Ex. 42 ★★☆ **Lot, mise ou nombre de cases à trouver** — Dans chaque cas, trouve la valeur demandée.

(a) Une partie coûte 2 €. On gagne un lot de g euros avec la probabilité 0,1, rien sinon. Quelle valeur de g rend le jeu équitable ?

(b) Une roue a 20 cases égales : k cases rapportent 5 €, les autres rien. La mise est de 1 €. Quelle valeur de k rend le jeu équitable ?

(c) Un ticket rapporte 40 € avec la probabilité 0,03, 8 € avec la probabilité 0,1, rien sinon. Quelle mise rend le jeu équitable ?

(d) Une urne contient 3 boules ; une seule est gagnante et rapporte 5 €. Au centime près, quelle mise maximale évite un jeu défavorable au joueur ?

Ex. 43 ★★☆ **Une boule puis un dé à la fête foraine** — À la fête foraine, Inès paie 2 € pour jouer. Elle tire une boule dans une urne de 5 boules : 2 rouges et 3 noires. Si la boule est rouge, elle lance un dé équilibré : le 6 rapporte 12 €, les autres faces 3 €. Une boule noire ne rapporte rien. On note G le gain net d'Inès.

(a) Quelles valeurs prend G ? Donne sa loi de probabilité dans un tableau.

(b) Calcule $E(G)$. Le jeu est-il favorable à Inès ? Justifie.

(c) Combien le forain peut-il espérer gagner sur 300 parties ?

(d) Le forain ne change que le gain « rouge puis 6 », noté g. Quelle valeur de g rend le jeu équitable ?

Ex. 44 ★★☆ **La roue du club de hand** — Pour financer ses maillots, un club de hand propose une roue de 12 secteurs égaux. 1 secteur rapporte 30 €, 3 secteurs rapportent 6 €, les 8 autres rien. Une partie coûte 6 €. Léa écrit : « $E = 30 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{3}{12} + 0 \times \frac{8}{12} = 4 > 0$, donc le jeu est favorable au joueur. »

(a) Léa a-t-elle raison ? Justifie en nommant son erreur.

(b) Donne la loi du gain net G du joueur, puis calcule $E(G)$.

(c) Combien le club peut-il espérer gagner sur 800 parties ?

(d) La mise reste à 6 €. Quel lot maximal le club peut-il offrir à la place des 30 € pour gagner en moyenne au moins 1 € par partie ?

Ex. 45 ★★☆ **Deux stands équitables à la kermesse** — À la kermesse, une partie coûte 2 € sur chacun des deux stands. Stand A : on lance une pièce équilibrée, et pile rapporte 4 €. Stand B : on tire un ticket parmi 25 ; un seul est gagnant et rapporte 50 €. On note G_A et G_B les gains nets. Arrondis au centième si nécessaire.

(a) Donne la loi de G_A, puis celle de G_B.

(b) Montre que les deux jeux sont équitables.

(c) Calcule $\sigma(G_A)$ et $\sigma(G_B)$ avec la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(d) Noah affirme : « Les deux jeux sont équitables, donc ils sont aussi risqués l'un que l'autre. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 46 ★★★ **Le stand de jetons du marché de Noël** — Au marché de Noël, Malik tient un stand. Le joueur paie une mise de m euros, puis tire au hasard un jeton dans un sac de 9 jetons. Le jeton doré (1 seul) rapporte 12 €, chacun des 2 jetons argentés rapporte 4 €, et les 6 jetons blancs ne rapportent rien. On note G le gain net du joueur.

(a) Donne les valeurs prises par G en fonction de m, puis la loi de probabilité de G dans un tableau.

(b) Montre que $E(G) = \frac{20}{9} - m$. Une mise en euros et en centimes peut-elle rendre le jeu exactement équitable ? Justifie.

(c) Malik veut gagner en moyenne au moins 1 € par partie. Quelle mise minimale doit-il fixer, au centime près ?

(d) Le règlement du marché impose que le joueur perde en moyenne au plus 1,50 € par partie. Donne la mise maximale au centime, puis le bénéfice que Malik peut espérer sur 500 parties avec une mise de 3,50 €.

Ex. 47 ★★★ **La roue puis la pièce du club de voile** — Au forum des associations, le club de voile propose un jeu à 4 € la partie. On fait tourner une roue de 10 secteurs égaux, dont n sont gagnants (n entier entre 0 et 10). Si le secteur est gagnant, on lance une pièce équilibrée : pile rapporte 15 € et face rapporte 3 €. Si le secteur est perdant, on ne reçoit rien. On note G le gain net du joueur.

(a) Justifie que $P(G = 11) = \frac{n}{20}$, puis donne la loi de G en fonction de n dans un tableau.

(b) Exprime $E(G)$ en fonction de n. Le club peut-il choisir n pour que le jeu soit équitable ? Justifie.

(c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ? Justifie.

(d) Le club choisit la plus grande valeur de n pour laquelle le jeu lui est favorable. Quel bénéfice peut-il espérer sur 1 000 parties ?

(e) Avec cette valeur de n, on garde la mise et le gain de face. Quel gain g doit rapporter pile pour que le jeu devienne équitable ?

Ex. 48 ★★★ **Équitable, mais très risqué : les enveloppes du voyage scolaire** — Pour financer le voyage scolaire, le lycée propose un jeu. Zoé paie 5 €, puis tire au hasard une enveloppe parmi 20. Une seule enveloppe contient un bon de 100 €, les autres sont vides. On note Y le gain brut de Zoé et G son gain net. Arrondis au centième si besoin.

(a) Donne la loi de G dans un tableau, puis justifie que le jeu est équitable.

(b) Calcule $E(G^2)$, puis $V(G)$ avec la formule de König-Huygens, puis $\sigma(G)$.

(c) Une variante utilise 40 enveloppes, dont une de 200 €, pour une mise de 5 €. Complète la ligne 8 du programme, puis donne ce qu'il affiche.

```
from math import sqrt
def ecart_type(valeurs, probas):
    e = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        e = e + valeurs[i] * probas[i]
    v = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        v = v + ..........
    return sqrt(v)
print(round(ecart_type([195, -5], [0.025, 0.975]), 4))
```

(d) Zoé affirme : « Le jeu est équitable, donc je récupère ma mise à chaque partie. » Vrai ou faux ? Justifie en interprétant $\sigma(G)$.

(e) Établis la loi de Y, puis calcule $V(Y)$ à partir de cette loi. Compare avec $V(G)$ et explique le résultat.