1. Variable aléatoire et loi de probabilité

Ex. 1 ★☆☆ **Lire une loi : au plus, au moins, moins de**

(a) On lit directement dans le tableau : $P(X = 2) = 0{,}25$.

(b) $\{X \leqslant 2\}$ contient les valeurs 0, 1 et 2 : $P(X \leqslant 2) = 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}7$. Attention, ce n'est pas $P(X = 2)$.

(c) « Moins de 2 » se traduit par $\{X < 2\}$, c'est-à-dire $X = 0$ ou $X = 1$ (inégalité stricte) : $P(X < 2) = 0{,}15 + 0{,}3 = 0{,}45$.

(d) « Au moins 2 » se traduit par $\{X \geqslant 2\}$. Son contraire est $\{X \leqslant 1\}$, donc $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

(e) Faux. $\{X > 2\}$ ne contient que les valeurs 3 et 4 : $P(X > 2) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$. $\{X \geqslant 2\}$ contient aussi la valeur 2 : $P(X \geqslant 2) = 0{,}55$. On a donc $P(X > 2) \neq P(X \geqslant 2)$.

(f) « Au plus 3 » se traduit par $\{X \leqslant 3\}$, dont le contraire est $\{X = 4\}$: $P(X \leqslant 3) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Ex. 2 ★☆☆ **Compléter une loi, trouver un paramètre**

(a) $P(X = 0) = 1 - 0{,}45 - 0{,}2 = 0{,}35$.

(b) $p = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{12-3-4}{12} = \frac{5}{12}$.

(c) $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = a + 2a + 3a + 4a = 10a$. Or cette somme vaut 1, donc $a = \frac{1}{10}$, qui est bien positif.

(d) $0{,}6 + 2a + 0{,}5 - a = 1$ donne $1{,}1 + a = 1$, donc $a = -0{,}1$. On aurait alors $P(X = 20) = 2a = -0{,}2 < 0$: c'est impossible pour une probabilité. Aucun réel a ne convient.

(e) Elle a tort : $0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}95 \neq 1$. Ces nombres ne peuvent pas former une loi de probabilité.

Ex. 3 ★★☆ **Écart entre deux dés à la fête foraine**

(a) $X(2;6) = 6 - 2 = 4$ et $X(4;4) = 0$. Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5 ; il ne faut pas oublier la valeur 0, obtenue avec un double.

Ex. 3 (suite)

(b) On regroupe les issues qui donnent la même valeur. $X = 0$: les 6 doubles. $X = 1$: $(1\,;2)$, $(2\,;3)$, …, $(5\,;6)$ et les couples inversés, soit 10 issues. De même, 8 issues pour $X = 2$, 6 pour $X = 3$, 4 pour $X = 4$ et 2 pour $X = 5$.

x_i	0	1	2	3	4	5
P(X = x_i)	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Contrôle : $\frac{6+10+8+6+4+2}{36} = 1$.

(c) « Au moins 3 » se traduit par $\{X \geqslant 3\}$: $P(X \geqslant 3) = \frac{6+4+2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Inès a une chance sur trois de gagner une peluche.

(d) $P(1 \leqslant X \leqslant 4) = \frac{10+8+6+4}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$ (les valeurs 1 et 4 sont comprises).

Ex. 4 ★★☆ **Kermesse : tirage avec ou sans remise**

(a) Avec (J ; B), Lucas gagne 3 € et a payé 3 € : $X(\text{J};\text{B}) = 3 - 3 = 0$. Avec 0, 1 ou 2 jetons jaunes, X prend les valeurs -3, 0 et 3 (une perte est une valeur négative).

(b) Avec remise, chaque tirage donne J avec la probabilité $\frac{2}{5}$. $P(X = -3) = P(\text{BB}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; $P(X = 0) = P(\text{BJ}) + P(\text{JB}) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$; $P(X = 3) = P(\text{JJ}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Contrôle : $\frac{9+12+4}{25} = 1$.

(c) Sans remise, il ne reste que 4 jetons au second tirage. $P(X = -3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$; $P(X = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$; $P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$. Contrôle : $\frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = 1$.

(d) « Ne pas perdre d'argent » se traduit par $\{X \geqslant 0\}$. Avec remise : $P(X \geqslant 0) = \frac{12}{25} + \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64$. Sans remise : $P(X \geqslant 0) = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$. C'est donc sans remise que Lucas a le plus de chances de ne pas perdre d'argent.

Ex. 5 ★★☆ **Loi lue dans un tableau croisé**

(a) X prend les valeurs 0, 1 et 2. On lit la ligne Total :

x_i	0	1	2
P(X = x_i)	$\frac{32}{80} = \frac{2}{5}$	$\frac{30}{80} = \frac{3}{8}$	$\frac{18}{80} = \frac{9}{40}$

Contrôle : $\frac{16+15+9}{40} = 1$.

(b) « Au moins une » se traduit par $\{X \geqslant 1\}$, dont le contraire est $\{X = 0\}$: $P(X \geqslant 1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Ex. 5 **(suite)**

(c) On lit uniquement la ligne Abonnés (50 usagers) : $P(Z=0)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$, $P(Z=1)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, $P(Z=2)=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$. Contrôle : $\frac{9+10+6}{25}=1$.

(d) « Moins de 2 » se traduit par $\{Z<2\}$, c'est-à-dire $Z=0$ ou $Z=1$: $P(Z<2)=\frac{18+20}{50}=\frac{38}{50}=\frac{19}{25}$.

Ex. 6 ★★★ **Assurance auto : une loi à paramètre**

(a) La somme des probabilités d'une loi vaut 1 : $0{,}5+2a+0{,}06+a^2=1$, soit $a^2+2a+0{,}56-1=0$, c'est-à-dire $a^2+2a-0{,}44=0$.

(b) $\Delta=2^2-4\times1\times(-0{,}44)=4+1{,}76=5{,}76$ et $\sqrt{5{,}76}=2{,}4$. Les solutions sont $a=\frac{-2-2{,}4}{2}=-2{,}2$ et $a=\frac{-2+2{,}4}{2}=0{,}2$. Si $a=-2{,}2$, alors $P(X=1)=2a=-4{,}4<0$: impossible pour une probabilité.
Donc $a=0{,}2$; on vérifie que $2a=0{,}4$ et $a^2=0{,}04$ sont bien entre 0 et 1.

(c)

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,5	0,4	0,06	0,04

Contrôle : $0{,}5+0{,}4+0{,}06+0{,}04=1$.

(d) « Au moins un sinistre » est $\{X\geqslant1\}$, contraire de $\{X=0\}$: $P(X\geqslant1)=1-0{,}5=0{,}5$. « Au plus deux » est $\{X\leqslant2\}$, contraire de $\{X=3\}$: $P(X\leqslant2)=1-0{,}04=0{,}96$.

(e) Non : le contraire de $\{X\leqslant2\}$ est $\{X>2\}$, qui ne contient pas la valeur 2 ; sa formule donne $P(X\geqslant3)=0{,}04$. Le contraire de $\{X\geqslant2\}$ est $\{X\leqslant1\}$: $P(X\geqslant2)=1-(0{,}5+0{,}4)=0{,}1$.

Ex. 7 ★★★ **Train et correspondance : durée du trajet**

(a) On note R « train en retard » et B « bus attrapé ». Chemins : $\overline{R}$ puis B : 45 ; $\overline{R}$ puis $\overline{B}$: 60 ; R puis B : 60 ; R puis $\overline{B}$: 75. Deux chemins donnent la même valeur : X prend les valeurs 45, 60 et 75.

(b) $P(X=45)=0{,}8\times0{,}9=0{,}72$; on regroupe les deux chemins de valeur 60 : $P(X=60)=0{,}8\times0{,}1+0{,}2\times0{,}4=0{,}08+0{,}08=0{,}16$; $P(X=75)=0{,}2\times0{,}6=0{,}12$.

x_i	45	60	75
P(X = x_i)	0,72	0,16	0,12

Contrôle : $0{,}72+0{,}16+0{,}12=1$.

Ex. 7 **(suite)**

(c) « Moins d'une heure » est l'inégalité stricte $\{X<60\}$: $P(X<60)=P(X=45)=0{,}72$. « Au plus une heure » contient 60 : $P(X\leqslant60)=0{,}72+0{,}16=0{,}88$ (ou $1-0{,}12$).

(d) $P(X=60)=(1-0{,}05)\times0{,}1+0{,}05\times0{,}4=0{,}095+0{,}02=0{,}115$.

(e) 75 est la plus grande valeur, donc $P(X\geqslant75)=P(X=75)$, qui vaut aujourd'hui $0{,}12>0{,}05$: l'objectif n'est pas atteint. En général, $P(X=75)=p\times0{,}6$, et $0{,}6p\leqslant0{,}05$ équivaut à $p\leqslant\frac{0{,}05}{0{,}6}=\frac{1}{12}\approx0{,}083$. Il faut donc $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{12}$.

Ex. 8 ★★★ **Tombola de la classe : gain net et loi corrigée**

(a) Lot de 10 € : $X=10-2=8$. Billet sans lot : $X=0-2=-2$ (une perte). Lot de 2 € : $X=0$; lot de 30 € : $X=28$. X prend les valeurs -2, 0, 8 et 28.

(b) $0{,}8+0{,}2+0{,}075+0{,}025=1{,}1\neq1$: ce n'est pas une loi de probabilité. Première erreur : il a compté $40-8=32$ billets sans lot ($\frac{32}{40}=0{,}8$), en oubliant les 4 billets à 10 € et 30 € ; il y en a $40-1-3-8=28$. Seconde erreur : il a écrit la valeur des lots et non le gain net ; il faut retirer les 2 € du billet, ce qui donne les valeurs -2, 0, 8 et 28.

(c) $P(X=-2)=\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$, $P(X=0)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$, $P(X=8)=\frac{3}{40}$, $P(X=28)=\frac{1}{40}$.

x_i	-2	0	8	28
P(X = x_i)	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$

Contrôle : $\frac{28+8+3+1}{40}=1$.

(d) « Ne pas perdre d'argent » est $\{X\geqslant0\}$, contraire de $\{X=-2\}$: $P(X\geqslant0)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$. « Gagner plus de 5 € » est $\{X>5\}$, soit les valeurs 8 et 28 : $P(X>5)=\frac{3}{40}+\frac{1}{40}=\frac{1}{10}$.

(e) Si n billets sans lot deviennent des billets à 2 €, alors $P(X\geqslant0)=\frac{12+n}{40}$. Il faut $\frac{12+n}{40}\geqslant\frac{1}{2}$, soit $12+n\geqslant20$, donc $n\geqslant8$. Il faut en transformer au moins 8 (il y aura alors 16 billets à lot de 2 €).

2. *Espérance : calculer et interpréter*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : calculer une espérance**

(a) $E(X)=1\times0{,}2+2\times0{,}5+3\times0{,}3=0{,}2+1+0{,}9=2{,}1$. Ce n'est pas une valeur prise par X, et c'est normal.

Ex. 9 **(suite)**

(b) $E(X) = -4 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}5 + 6 \times 0{,}25 = -1 + 0{,}5 + 1{,}5 = 1$.

(c) $E(X) = -3 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}6 = -1{,}2 + 1{,}2 = 0$.

(d) $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{2}{5} + 30 \times \frac{1}{10} = 0 + 2 + 3 = 5$ €.

(e) $P(X = -6) = \frac{1}{6}$; $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(X = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. $E(X) = -6 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

(f) $E(X) = -5 \times 0{,}1 - 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 8 \times 0{,}2 = -0{,}5 - 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 = 1{,}6$.

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : retrouver une valeur ou une probabilité**

(a) $0 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}3 + 0{,}2x = 1{,}4$, donc $0{,}6 + 0{,}2x = 1{,}4$, $0{,}2x = 0{,}8$ et $x = 4$.

(b) $-1 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}4 + 0{,}2x = 2$, donc $0{,}8 + 0{,}2x = 2$, $0{,}2x = 1{,}2$ et $x = 6$.

(c) $0{,}5x + 5 \times 0{,}25 + 10 \times 0{,}25 = 3$, donc $0{,}5x + 3{,}75 = 3$, $0{,}5x = -0{,}75$ et $x = -1{,}5$. La valeur cherchée est négative.

(d) $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{x}{4} = 3$, donc $\frac{x}{4} = \frac{5}{4}$ et $x = 5$.

(e) $0 \times p + 1 \times 0{,}5 + 4(0{,}5 - p) = 1{,}3$, donc $2{,}5 - 4p = 1{,}3$ et $p = 0{,}3$. On vérifie : $P(X = 4) = 0{,}2 \geqslant 0$.

Ex. 11 ★★☆ **La roue de la fête foraine**

(a) Les secteurs sont équiprobables :

x_i	-3	2	10
P(X = x_i)	0,6	0,3	0,1

Vérification : $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$.

(b) 1) Il fait la moyenne simple des valeurs, sans pondérer par les probabilités : le rouge sort 6 fois sur 10, le doré une fois sur 10 seulement. 2) Une espérance est une moyenne à long terme, pas le gain d'une partie. D'ailleurs, 3 n'est même pas une valeur de X.

(c) $E(X) = -3 \times 0{,}6 + 2 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}1 = -1{,}8 + 0{,}6 + 1 = -0{,}2$ €.

(d) En moyenne, sur un grand nombre de parties, Yanis perd environ 0,20 € par partie. Sur 200 parties, il peut s'attendre à perdre environ $200 \times 0{,}2 = 40$ €.

Ex. 12 ★★☆ **Deux stands à la kermesse**

(a) $P(X = 1) = \frac{1}{2}$; $P(X = 10) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$; $P(X = -3) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

x_i	-3	1	10
P(X = x_i)	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

Vérification : $\frac{5}{12} + \frac{6}{12} + \frac{1}{12} = 1$.

(b) $E(X) = -3 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{12} = \frac{-15+6+10}{12} = \frac{1}{12} \approx 0{,}08$ €.

(c) $P(Y = 3) = \frac{2}{5}$ et $P(Y = -2) = \frac{3}{5}$, donc $E(Y) = 3 \times \frac{2}{5} - 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6-6}{5} = 0$ €.

(d) Le jeu A. En moyenne, sur un grand nombre de parties, il rapporte environ 0,08 € par partie, alors que le jeu B rapporte en moyenne 0 €. Aucune partie du jeu A ne rapporte exactement $\frac{1}{12}$ € : c'est une moyenne.

Ex. 13 ★★☆ **Contrôle qualité en usine**

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}6 + 2a + a + 0{,}1 = 1$, donc $3a = 0{,}3$ et $a = 0{,}1$.

x_i	0	1	2	3
P(X = x_i)	0,6	0,2	0,1	0,1

(b) $E(X) = 0 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}1 = 0 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}7$.

(c) En moyenne, sur un grand nombre de pièces, on compte environ 0,7 défaut par pièce. Sur 1 000 pièces, on peut s'attendre à environ $1\,000 \times 0{,}7 = 700$ défauts au total.

(d) Non. $E(X)$ est une moyenne sur un grand nombre de pièces, pas le nombre de défauts d'une pièce donnée. Une espérance n'est pas forcément une valeur prise par X : chaque pièce a 0, 1, 2 ou 3 défauts, mais la moyenne vaut 0,7.

Ex. 14 ★★★ **L'assurance des vélos électriques**

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}85 + 0{,}1 + p + 0{,}01 = 1$, donc $p = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$.

(b) $P(R < 0) = P(R = -70) + P(R = -520) + P(R = -1\,120) = 0{,}1 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}15$. Sur un grand nombre de contrats, environ 15 % font perdre de l'argent à la compagnie.

(c) Léo a oublié les signes « − » des valeurs négatives : les pertes ont été comptées comme des gains. On trouve $E(R) = 80 \times 0{,}85 + (-70) \times 0{,}1 + (-520) \times 0{,}04 + (-1\,120) \times 0{,}01 = 68 - 7 - 20{,}8 - 11{,}2 = 29$ €.

Ex. 14 (suite)

(d) Faux : R prend seulement les valeurs 80, -70, -520 et $-1\,120$; 29 n'en fait pas partie, donc aucun contrat ne rapporte exactement 29 €. Interprétation : sur un grand nombre de contrats, la compagnie gagne en moyenne environ 29 € par contrat.

(e) Avec un grand nombre de contrats, le résultat moyen est proche de $E(R)$: $2\,000 \times 29 = 58\,000$. La compagnie peut espérer un bénéfice d'environ 58 000 € sur l'année.

Ex. 15 ★★★ Deux points ou trois points ?

(a) X_A prend les valeurs 0, 2 et 3. $P(X_A = 3) = 0{,}5 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}08$; $P(X_A = 2) = 0{,}5 - 0{,}08 = 0{,}42$; $P(X_A = 0) = 0{,}5$.

x_i	0	2	3
P(X_A = x_i)	0,5	0,42	0,08

Vérification : $0{,}5 + 0{,}42 + 0{,}08 = 1$.

(b) $E(X_A) = 0 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}42 + 3 \times 0{,}08 = 0{,}84 + 0{,}24 = 1{,}08$. Non : un tir rapporte 0, 2 ou 3 points, jamais 1,08. Sur un grand nombre de tirs A, Noah marque en moyenne environ 1,08 point par tir.

(c) X_B prend les valeurs 0 et 3, avec $P(X_B = 3) = p$ et $P(X_B = 0) = 1 - p$.
Donc $E(X_B) = 0 \times (1-p) + 3 \times p = 3p$.

(d) On veut $E(X_B) > E(X_A)$, soit $3p > 1{,}08$, donc $p > 0{,}36$. Comme p est une probabilité, le tir B rapporte plus de points en moyenne pour $0{,}36 < p \leqslant 1$.

(e) Tir A : $50 \times 1{,}08 = 54$ points environ. Tir B : $E(X_B) = 3 \times 0{,}34 = 1{,}02$, donc $50 \times 1{,}02 = 51$ points environ. Comme $0{,}34 < 0{,}36$, on conseille le tir A : sur un grand nombre de tirs, il rapporte plus de points en moyenne.

Ex. 16 ★★★ Le gros lot de la tombola du judo

(a) X prend les valeurs 0, 10, 50 et x. $P(X = x) = \frac{1}{500} = 0{,}002$; $P(X = 50) = \frac{4}{500} = 0{,}008$; $P(X = 10) = \frac{20}{500} = 0{,}04$; $P(X = 0) = \frac{475}{500} = 0{,}95$.

x_i	0	10	50	x
P(X = x_i)	0,95	0,04	0,008	0,002

(b) $E(X) = 0 \times 0{,}95 + 10 \times 0{,}04 + 50 \times 0{,}008 + x \times 0{,}002 = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}002x = 0{,}8 + 0{,}002x$.

(c) $0{,}8 + 0{,}002x = 1{,}5$, donc $0{,}002x = 0{,}7$ et $x = \frac{0{,}7}{0{,}002} = 350$: le gros lot vaut 350 €. Sur un grand nombre de billets, la valeur des lots gagnés est en moyenne de 1,50 € par billet.

Ex. 16 (suite)

(d) Elle renvoie $\frac{0+10+50+350}{4} = 102{,}5$. C'est la moyenne simple des valeurs : la liste `p` n'est jamais utilisée. Le gros lot compte autant qu'un billet perdant, alors qu'il sort 1 fois sur 500 et les perdants 475 fois.

(e)
```
def esperance(x, p):
    e = 0
    for i in range(len(x)):
        e = e + x[i] * p[i]
    return e
```

L'appel `esperance([0, 10, 50, 350], [0.95, 0.04, 0.008, 0.002])` renvoie 1,5 (à l'arrondi près des flottants), c'est-à-dire $E(X) = 1{,}50$ €.

3. Variance et écart type

Ex. 17 ★☆☆ Variance avec la ligne des écarts

(a) $E(X) = -1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}4 + 8 \times 0{,}1 = -0{,}2 + 0{,}6 + 2 + 0{,}8 = 3{,}2$.

(b)

x_i	-1	2	5	8
écart	-4,2	-1,2	1,8	4,8
écart²	17,64	1,44	3,24	23,04

(c) $V(X) = 0{,}2 \times 17{,}64 + 0{,}3 \times 1{,}44 + 0{,}4 \times 3{,}24 + 0{,}1 \times 23{,}04 = 3{,}528 + 0{,}432 + 1{,}296 + 2{,}304 = 7{,}56$.

(d) Léo trouve $17{,}64 + 1{,}44 + 3{,}24 + 23{,}04 = 45{,}36$. C'est faux : la variance est une moyenne **pondérée**, et chaque carré d'écart doit être multiplié par sa probabilité p_i.

(e) $\sigma(X) = \sqrt{7{,}56} \approx 2{,}75$ (on garde $V(X)$ exacte et on n'arrondit qu'à la fin).

Ex. 18 ★☆☆ Vrai ou faux express sur la dispersion

(a) Faux : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9} = 3$. L'écart type n'est pas la variance, et encore moins son carré.

(b) Vrai : $\sigma(X)$ est dans l'unité de X, et $V(X)$, qui est une moyenne de carrés, est dans l'unité au carré.

(c) Faux : on aurait $V(X) = 13 - 4^2 = -3 < 0$. Or une variance est toujours positive ou nulle.

(d) Vrai : $E(X) = 7$, donc le seul écart vaut $7 - 7 = 0$ et $V(X) = 1 \times 0^2 = 0$.

(e) Faux : $E(X) = 4$, donc $V(X) = \frac{1}{2} \times (3-4)^2 + \frac{1}{2} \times (5-4)^2 = 1$. Une variance nulle signifie que X est constante.

Ex. 18 **(suite)**

(f) Faux : la valeur exacte est $3 - 1{,}25^2 = 1{,}4375 \approx 1{,}44$, mais en arrondissant d'abord on obtient $3 - 1{,}3^2 = 1{,}31$. On n'arrondit qu'à la fin.

Ex. 19 ★★☆ **Livret sûr ou placement risqué**

(a) A vaut toujours 30, donc $E(A) = 30$. $E(B) = -60 \times 0{,}2 + 30 \times 0{,}4 + 75 \times 0{,}4 = -12 + 12 + 30 = 30$. Les deux placements ont la même espérance : 30 € de gain en moyenne.

(b) A est constante, donc tous ses écarts à $E(A)$ sont nuls : $V(A) = 1 \times (30 - 30)^2 = 0$ et $\sigma(A) = 0$ €. Le gain A ne varie pas.

(c) $E(B^2) = 3\,600 \times 0{,}2 + 900 \times 0{,}4 + 5\,625 \times 0{,}4 = 720 + 360 + 2\,250 = 3\,330$. $V(B) = 3\,330 - 30^2 = 2\,430$ et $\sigma(B) = \sqrt{2\,430} \approx 49{,}30$ €.

(d) Sur un grand nombre d'années de placement, le gain B vaut 30 € en moyenne mais s'en écarte d'environ 49,30 € : il est très dispersé, Inès peut même perdre 60 €. Comme les espérances sont égales, on choisit selon le risque : A ($\sigma = 0$) est le placement sans risque qui convient à Inès.

Ex. 20 ★★☆ **Défauts de fabrication : l'erreur de Hugo**

(a) $E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}05 = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}75$.

(b) Erreur : $E(X^2)$ est la moyenne des **carrés** des valeurs, pondérés par les probabilités. Ce n'est pas le carré de la moyenne $E(X)^2 = 0{,}5625$. $E(X^2) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}15 + 9 \times 0{,}05 = 1{,}35$, donc $V(X) = 1{,}35 - 0{,}75^2 = 1{,}35 - 0{,}5625 = 0{,}7875$. La variance n'est pas nulle : les pièces n'ont pas toutes le même nombre de défauts.

(c) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}7875} \approx 0{,}89$ défaut. Sur un grand nombre de pièces, le nombre moyen de défauts est de 0,75, et le nombre de défauts d'une pièce s'en écarte en moyenne d'environ 0,89 défaut.

Ex. 21 ★★☆ **La roue de la fête foraine et Python**

(a) X prend les valeurs 0, 2 et 10. Il y a équiprobabilité des 8 secteurs, donc :

x_i	0	2	10
P(X = x_i)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_i^2	0	4	100

On vérifie : $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

Ex. 21 **(suite)**

(b) $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{1}{8} = \frac{6+10}{8} = 2$. $E(X^2) = 0 + 4 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{1}{8} = \frac{112}{8} = 14$. $V(X) = 14 - 2^2 = 10$ et $\sigma(X) = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ €.

(c) Sur un grand nombre de lancers, on gagne en moyenne 2 € par lancer, et le gain s'écarte de cette moyenne d'environ 3,16 € : il est très dispersé (souvent 0 €, parfois 10 €).

(d) `v = v + p[i]*(x[i] - e)**2` (somme des carrés des écarts pondérés par les probabilités, c'est-à-dire la variance), puis `return sqrt(v)` (l'écart type est la racine carrée de la variance).

(e) La fonction renvoie environ 3,1623, soit 3,16 : c'est bien $\sigma(X) = \sqrt{10}$.

Ex. 22 ★★★ **Tir à l'arc : deux inconnues et la régularité**

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}1 + 0{,}3 + p + q = 1$, donc $p + q = 0{,}6$. Avec l'espérance : $0 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}3 + 5p + 10q = 5$, donc $5p + 10q = 4{,}4$, c'est-à-dire $p + 2q = 0{,}88$. On soustrait la première équation à la seconde : $q = 0{,}88 - 0{,}6 = 0{,}28$, puis $p = 0{,}6 - 0{,}28 = 0{,}32$. Vérification : $0{,}6 + 1{,}6 + 2{,}8 = 5$.

(b)

x_i	0	2	5	10
p_i	0,1	0,3	0,32	0,28
x_i^2	0	4	25	100

$E(X^2) = 0 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}3 + 25 \times 0{,}32 + 100 \times 0{,}28 = 0 + 1{,}2 + 8 + 28 = 37{,}2$. D'après König-Huygens, $V(X) = 37{,}2 - 5^2 = 12{,}2$ (en points au carré). La variance est bien positive. $\sigma(X) = \sqrt{12{,}2} \approx 3{,}49$ points.

(c) Non. $V(X) = 12{,}2$ s'exprime en points au carré : la variance ne mesure pas directement un écart. C'est l'écart type qui le fait : en moyenne, le score de Léna s'écarte de 5 d'environ $\sigma(X) \approx 3{,}49$ points, et non de 12,2 points.

(d) Les deux tireurs ont la même espérance : sur un grand nombre de flèches, chacun marque en moyenne 5 points. Mais l'écart type de Malo (2 points) est plus petit que celui de Léna ($\approx 3{,}49$ points). Les scores de Malo sont donc moins dispersés autour de 5 : le coach doit choisir Malo, le plus régulier.

Ex. 23 ★★★ **Le prix d'une course en taxi**

(a) $E(X) = 2 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}3 + 6 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}1 = 0{,}8 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1 = 4{,}2$ km. $E(X^2) = 4 \times 0{,}4 + 16 \times 0{,}3 + 36 \times 0{,}2 + 100 \times 0{,}1 = 1{,}6 + 4{,}8 + 7{,}2 + 10 = 23{,}6$. $V(X) = 23{,}6 - 4{,}2^2 = 23{,}6 - 17{,}64 = 5{,}96$ km². $\sigma(X) = \sqrt{5{,}96} \approx 2{,}44$ km.

(b) C prend les valeurs $1{,}5 \times 2 + 4 = 7$, puis 10, 13 et 19, avec les mêmes probabilités que X :

c_i	7	10	13	19
P(C = c_i)	0,4	0,3	0,2	0,1

$E(C) = 7 \times 0{,}4 + 10 \times 0{,}3 + 13 \times 0{,}2 + 19 \times 0{,}1 = 2{,}8 + 3 + 2{,}6 + 1{,}9 = 10{,}3$ €. Par linéarité : $E(C) = 1{,}5 \times 4{,}2 + 4 = 6{,}3 + 4 = 10{,}3$ €. On retrouve le même résultat.

(c) On a $y_i = ax_i + b$ et, par linéarité, $E(Y) = aE(X) + b$. Donc $y_i - E(Y) = ax_i + b - aE(X) - b = a\big(x_i - E(X)\big)$. On en déduit $V(Y) = \sum p_i \big(y_i - E(Y)\big)^2 = \sum p_i a^2 \big(x_i - E(X)\big)^2 = a^2 \sum p_i \big(x_i - E(X)\big)^2 = a^2 V(X)$.

(d) $V(C) = 1{,}5^2 \times V(X) = 2{,}25 \times 5{,}96 = 13{,}41$ €². Contrôle avec la loi de C : $E(C^2) = 49 \times 0{,}4 + 100 \times 0{,}3 + 169 \times 0{,}2 + 361 \times 0{,}1 = 119{,}5$, et $119{,}5 - 10{,}3^2 = 13{,}41$. $\sigma(C) = \sqrt{13{,}41} \approx 3{,}66$ €.

(e) C'est faux. $\sigma(C) = \sqrt{1{,}5^2\, V(X)} = 1{,}5\, \sigma(X) \approx 3{,}66$ €, et non $1{,}5\, \sigma(X) + 4 \approx 7{,}66$ €. Les 4 € de prise en charge s'ajoutent à tous les prix : ils décalent les prix sans les disperser davantage. Interprétation : sur un grand nombre de courses, le prix moyen est de 10,30 €, et le prix d'une course s'en écarte en moyenne d'environ 3,66 €.

Ex. 24 ★★★ **Kermesse : le lot de l'as et le risque**

(a) Les 10 cartes sont équiprobables. G prend la valeur $L - 2$ avec la probabilité $\frac{1}{10} = 0{,}1$ (as), la valeur 0 avec la probabilité 0,3 (roi) et la valeur -2 avec la probabilité 0,6 (autre carte). $E(G) = 0{,}1(L - 2) + 0 \times 0{,}3 - 2 \times 0{,}6 = 0{,}1L - 1{,}4$. Le jeu est équitable si et seulement si $E(G) = 0$, donc si $0{,}1L = 1{,}4$, soit $L = 14$ €.

(b) Avec $L = 14$, G prend les valeurs 12, 0 et -2, et $E(G) = 0$. $E(G^2) = 144 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}6 = 14{,}4 + 2{,}4 = 16{,}8$. $V(G) = 16{,}8 - 0^2 = 16{,}8$ €² et $\sigma(G) = \sqrt{16{,}8} \approx 4{,}10$ €.

Ex. 24 **(suite)**

(c) On note $\mu = E(X)$. $V(X) = \sum p_i (x_i - \mu)^2$ est une somme de termes positifs ou nuls, car $p_i > 0$ et un carré est positif. Si cette somme est nulle, chaque terme est nul : $p_i(x_i - \mu)^2 = 0$. Comme $p_i \neq 0$, on obtient $(x_i - \mu)^2 = 0$, donc $x_i = \mu$ pour tout i. Ainsi, X prend la seule valeur μ : elle est constante.

(d) $E(G^2)$ se calcule avec les carrés des valeurs : $E(G^2) = 144 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}6 = 16{,}8$. En oubliant les carrés, Tom a en fait recalculé $E(G) = 0$. Même sans refaire le calcul, $V(G) = 0$ était impossible : d'après la question précédente, G serait alors constante, alors qu'elle prend trois valeurs différentes.
Donc $V(G) > 0$.

(e) Le gain net G' du jeu B vaut $4 - 2 = 2$ ou -2, chacun avec la probabilité $\frac{1}{2}$. $E(G') = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 0$: le jeu B est équitable. $E(G'^2) = 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 4$, donc $V(G') = 4 - 0^2 = 4$ et $\sigma(G') = 2$ €. Les deux jeux ont la même espérance, mais $\sigma(G) \approx 4{,}10 > 2 = \sigma(G')$. Sur un grand nombre de parties, on ne gagne rien en moyenne dans les deux jeux. Cependant, au jeu A, le gain s'écarte en moyenne d'environ 4,10 € de 0, contre 2 € au jeu B : le jeu A est le plus risqué.

4. *Formule de König-Huygens*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : König-Huygens en une ligne**

(a) $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 13 - 3^2 = 13 - 9 = 4$.

(b) $E(X^2) = V(X) + \big(E(X)\big)^2 = 5 + (-2)^2 = 5 + 4 = 9$.

(c) $\sigma(X) = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

(d) $E(X^2) = (-3)^2 \times 0{,}4 + 2^2 \times 0{,}6 = 9 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}6 = 3{,}6 + 2{,}4 = 6$ (attention : $(-3)^2 = 9$).

(e) On aurait $V(X) = 10 - 4^2 = 10 - 16 = -6$. Or une variance est toujours positive : il y a donc une erreur de calcul.

(f) $V(X) = 2 - 0{,}5^2 = 2 - 0{,}25 = 1{,}75$ (et non $2 - 0{,}5 = 1{,}5$: on retranche le carré de $E(X)$).

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : la ligne des carrés**

(a) $(-3)^2 = 9$, $(-1)^2 = 1$, $0^2 = 0$, $4^2 = 16$:

x_i	-3	-1	0	4
P(X = x_i)	0,1	0,3	0,4	0,2
x_i^2	9	1	0	16

Ex. 26 (suite)

(b) $E(X) = -3 \times 0{,}1 + (-1) \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}2 = -0{,}3 - 0{,}3 + 0 + 0{,}8 = 0{,}2$.

(c) $E(X^2) = 9 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}4 + 16 \times 0{,}2 = 0{,}9 + 0{,}3 + 0 + 3{,}2 = 4{,}4$.

(d) $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 4{,}4 - 0{,}2^2 = 4{,}4 - 0{,}04 = 4{,}36$.

(e) $\sigma(X) = \sqrt{4{,}36} \approx 2{,}09$.

(f) $\big(E(X)\big)^2 = 0{,}2^2 = 0{,}04$ alors que $E(X^2) = 4{,}4$: ce sont deux nombres différents, il ne faut pas les confondre.

Ex. 27 ★★☆ **Fête foraine : corrige Noé**

(a) $E(X) = -2 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 6 \times 0{,}2 = -1 + 0{,}3 + 1{,}2 = 0{,}5$.

(b) Noé a élevé les probabilités au carré : son calcul donne $-0{,}17$, un résultat négatif, ce qui est impossible pour $E(X^2)$. Il faut élever les valeurs au carré : $E(X^2) = (-2)^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 6^2 \times 0{,}2 = 2 + 0{,}3 + 7{,}2 = 9{,}5$.

(c) Non : on retranche le carré de l'espérance, pas l'espérance (sa formule donnerait $9{,}5 - 0{,}5 = 9$). $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 9{,}5 - 0{,}5^2 = 9{,}5 - 0{,}25 = 9{,}25$.

(d) $\sigma(X) = \sqrt{9{,}25} \approx 3{,}04$ €. En moyenne, sur un grand nombre de parties, Noé gagne 0,50 € par partie. Mais ses gains sont très dispersés autour de cette moyenne : l'écart type vaut environ 3,04 €.

Ex. 28 ★★☆ **Contrôle qualité : un paramètre, deux calculs de variance**

(a) La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}4 + 2p + p = 1$, donc $3p = 0{,}6$ et $p = 0{,}2$. Alors $P(X = 1) = 2 \times 0{,}2 = 0{,}4$:

x_i	0	1	2
P(X = x_i)	0,4	0,4	0,2

Toutes ces probabilités sont bien comprises entre 0 et 1.

(b) $E(X) = 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}2 = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$. En moyenne, sur un grand nombre de cadres contrôlés, on compte 0,8 défaut par cadre.

(c) On élève les valeurs au carré : 0, 1, 4. $E(X^2) = 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}2 = 0{,}4 + 0{,}8 = 1{,}2$, d'où $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 1{,}2 - 0{,}8^2 = 1{,}2 - 0{,}64 = 0{,}56$.

(d) $V(X) = 0{,}4 \times (0 - 0{,}8)^2 + 0{,}4 \times (1 - 0{,}8)^2 + 0{,}2 \times (2 - 0{,}8)^2 = 0{,}4 \times 0{,}64 + 0{,}4 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 1{,}44 = 0{,}256 + 0{,}016 + 0{,}288 = 0{,}56$. On retrouve bien la même variance.

Ex. 29 ★★☆ **Python : la variance par König-Huygens**

(a) `e2 = e2 + p[i]*x[i]**2` : on élève la valeur au carré, pas la probabilité.

(b) $E(X) = -3 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}5 + 5 \times 0{,}2 = -0{,}9 + 1 = 0{,}1$ et $E(X^2) = 9 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}5 + 25 \times 0{,}2 = 2{,}7 + 5 = 7{,}7$. La fonction renvoie donc $V(X) = 7{,}7 - 0{,}1^2 = 7{,}69$.

(c) Elle renvoie $0{,}1^2 - 7{,}7 = 0{,}01 - 7{,}7 = -7{,}69$, l'opposé de la variance. Une variance ne peut pas être négative : l'élève a calculé $\big(E(X)\big)^2 - E(X^2)$ au lieu de $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.

(d) On ajoute `from math import sqrt` au début du programme, puis on écrit `return sqrt(e2 - e**2)`, car $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Avec les mêmes listes, elle renvoie $\sqrt{7{,}69} \approx 2{,}77$.

Ex. 30 ★★★ **Démontrer la formule de König-Huygens**

(a) Avec l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: $(x_i - \mu)^2 = x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2$.

(b) On multiplie par p_i : $p_i(x_i - \mu)^2 = p_i x_i^2 - 2\mu\, p_i x_i + \mu^2 p_i$. On additionne ces n égalités. 2μ et μ^2 ne dépendent pas de i, on peut donc les mettre en facteur : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i$.

(c) Premier résultat : $\sum p_i x_i = E(X) = \mu$. Second résultat : $\sum p_i = 1$, car la somme des probabilités d'une loi vaut 1. Et $\sum p_i x_i^2 = E(X^2)$.
Donc $V(X) = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$.

(d) Chaque terme $p_i(x_i - \mu)^2$ est un produit de deux nombres positifs ($p_i \geqslant 0$ et un carré). Leur somme $V(X)$ est donc positive. D'après la question précédente, $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \geqslant 0$, donc $E(X^2) \geqslant \big(E(X)\big)^2$.

(e) D'après la question précédente, $E(Y^2) \geqslant \big(E(Y)\big)^2 = 3^2 = 9$. L'égalité a lieu quand $V(Y) = 0$: par exemple si Y prend la seule valeur 3 avec la probabilité 1. Alors $E(Y) = 3 \times 1 = 3$ et $E(Y^2) = 9 \times 1 = 9$. La plus petite valeur possible de $E(Y^2)$ est donc 9.

Ex. 31 ★★★ **Fléchettes : retrouver une loi à partir de E(X) et V(X)**

(a) D'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$, donc $E(X^2) = V(X) + \big(E(X)\big)^2 = 5{,}89 + 1{,}1^2 = 5{,}89 + 1{,}21 = 7{,}1$.

Ex. 31 **(suite)**

(b) La somme des probabilités vaut 1 : $a+b+c=1$. L'espérance donne : $-3a+b+4c=1{,}1$. Avec les carrés $(-3)^2=9$, $1^2=1$ et $4^2=16$: $9a+b+16c=7{,}1$.

(c) On soustrait la 1re équation à la 2e : $-4a+3c=0{,}1$. On soustrait la 1re équation à la 3e : $8a+15c=6{,}1$. On multiplie la première de ces deux équations par 2 et on ajoute la seconde : $21c=6{,}3$, donc $c=0{,}3$. Puis $4a=3\times 0{,}3-0{,}1=0{,}8$, donc $a=0{,}2$. Enfin $b=1-0{,}2-0{,}3=0{,}5$.

x_i	-3	1	4
P(X = x_i)	0,2	0,5	0,3

(d) $V(X)=0{,}2\times(-4{,}1)^2+0{,}5\times(-0{,}1)^2+0{,}3\times 2{,}9^2=0{,}2\times 16{,}81+0{,}5\times 0{,}01+0{,}3\times 8{,}41=3{,}362+0{,}005+2{,}523=5{,}89$. On retrouve bien la valeur de l'énoncé.

(e) $\sigma(X)=\sqrt{5{,}89}\approx 2{,}43$ points. En moyenne, sur un grand nombre de lancers, Maëlys marque 1,1 point par lancer. Ses scores sont assez dispersés autour de cette moyenne.

Ex. 32 ★★★ **Tram : une variance qui dépend d'un paramètre**

(a) $P(X=0)=1-p-0{,}1=0{,}9-p$. Une probabilité est comprise entre 0 et 1. Il faut $p\geqslant 0$ et $0{,}9-p\geqslant 0$, donc $0\leqslant p\leqslant 0{,}9$.

(b) $E(X)=0\times(0{,}9-p)+1\times p+3\times 0{,}1=p+0{,}3$. Pour $E(X^2)$, on élève les valeurs au carré : 0, 1, 9. Donc $E(X^2)=0\times(0{,}9-p)+1\times p+9\times 0{,}1=p+0{,}9$.

(c) Par König-Huygens, $V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=p+0{,}9-(p+0{,}3)^2=p+0{,}9-p^2-0{,}6p-0{,}09=-p^2+0{,}4p+0{,}81$.

(d) $p+0{,}3=0{,}5$ donne $p=0{,}2$, qui appartient bien à $[0;0{,}9]$. Alors $V(X)=-0{,}04+0{,}08+0{,}81=0{,}85$ et $\sigma(X)=\sqrt{0{,}85}\approx 0{,}92$ min. En moyenne, sur un grand nombre de rames, le retard est de 0,5 minute, avec un écart type d'environ 0,92 minute.

(e) $V(X)=-p^2+0{,}4p+0{,}81=-(p-0{,}2)^2+0{,}85$: en développant, $-(p^2-0{,}4p+0{,}04)+0{,}85=-p^2+0{,}4p+0{,}81$. Un carré est positif, donc $V(X)\leqslant 0{,}85$, avec égalité pour $p=0{,}2$, qui appartient bien à $[0;0{,}9]$. La variance est la plus grande pour $p=0{,}2$: c'est justement le cas annoncé par le réseau.

5. *Transformation $aX+b$ et linéarité de l'espérance*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : linéarité de l'espérance**

(a) $Y=-3X+40$, donc $a=-3$ et $b=40$.

(b) Par linéarité : $E(Y)=-3E(X)+40=-12+40=28$.

(c) $E(X+7)=E(X)+7=4+7=11$ (ici $a=1$ et $b=7$).

(d) En minutes, la durée vaut $60X$ ($a=60$, $b=0$). $E(60X)=60\times 4=240$ minutes.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : loi de aX + b aux fléchettes**

(a) $3\times(-1)+1=-2$, $3\times 2+1=7$ et $3\times 4+1=13$: Y prend les valeurs -2, 7 et 13.

(b) $\{Y=7\}=\{X=2\}$, donc $P(Y=7)=0{,}5$: les probabilités ne changent pas.

(c) $P(Y\geqslant 7)=P(Y=7)+P(Y=13)=0{,}5+0{,}3=0{,}8$.

(d) $E(X)=-1\times 0{,}2+2\times 0{,}5+4\times 0{,}3=2$.

(e) $E(Y)=3E(X)+1=3\times 2+1=7$.

(f) Z prend les valeurs 11, 8 et 6 ($a=-1$, $b=10$). $P(Z\geqslant 8)=P(X=-1)+P(X=2)=0{,}2+0{,}5=0{,}7$.

Ex. 35 ★★☆ **Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit**

(a) $E(X)=18\times 0{,}1+20\times 0{,}4+22\times 0{,}3+25\times 0{,}2=21{,}4$. En moyenne, sur un grand nombre de jours de juin, il fait environ 21,4 °C à midi.

(b) $E(X^2)=324\times 0{,}1+400\times 0{,}4+484\times 0{,}3+625\times 0{,}2=462{,}6$. $V(X)=462{,}6-21{,}4^2=4{,}64$ et $\sigma(X)=\sqrt{4{,}64}\approx 2{,}15$ °C.

(c) $a=1{,}8$ et $b=32$. $E(F)=1{,}8\times 21{,}4+32=70{,}52$ °F.

(d) $F-E(F)=1{,}8X+32-(1{,}8E(X)+32)=1{,}8(X-E(X))$.
Donc $V(F)=\sum p_i\times 1{,}8^2(x_i-E(X))^2=1{,}8^2\times V(X)=3{,}24\times 4{,}64=15{,}0336$, et $\sigma(F)=\sqrt{15{,}0336}\approx 3{,}88$ °F. Le 32 s'élimine dans la différence : décaler toutes les températures ne change pas leur dispersion.

Ex. 36 ★★☆ **Contrôle qualité : coût fixe et coût variable**

(a) $E(X)=0\times 0{,}5+1\times 0{,}3+2\times 0{,}15+3\times 0{,}05=0{,}75$.

Ex. 36 **(suite)**

(b) C prend les valeurs $15x_i + 40$, avec les mêmes probabilités :

c_i	40	55	70	85
P(C = c_i)	0,5	0,3	0,15	0,05

(c) $E(C) = 40 \times 0{,}5 + 55 \times 0{,}3 + 70 \times 0{,}15 + 85 \times 0{,}05 = 51{,}25$ €. Par linéarité : $15 \times 0{,}75 + 40 = 51{,}25$ €. En moyenne, sur un grand nombre de lots, le contrôle coûte environ 51,25 € par lot.

(d) $E(C') = 0{,}75a + 30 = 60$, donc $0{,}75a = 30$ et $a = 40$ € par pièce défectueuse.

Ex. 37 ★★☆ **Fête foraine : le bénéfice de l'organisateur**

(a) $E(X) = 2 \times 0{,}25 + 5 \times 0{,}15 + 10 \times 0{,}05 = 1{,}75$ €. $E(X^2) = 4 \times 0{,}25 + 25 \times 0{,}15 + 100 \times 0{,}05 = 9{,}75$. $V(X) = 9{,}75 - 1{,}75^2 = 6{,}6875$.

(b) $B = -X + 3$: $a = -1$ et $b = 3$. $E(B) = -1{,}75 + 3 = 1{,}25$ €. En moyenne, sur un grand nombre de parties, l'organisateur gagne 1,25 € par partie. Le gain net du joueur est $-B$, d'espérance $-1{,}25$ € : le jeu est défavorable au joueur.

(c) B prend les valeurs 3, 1, -2, -7 avec les mêmes probabilités 0,55 ; 0,25 ; 0,15 ; 0,05. $E(B^2) = 9 \times 0{,}55 + 1 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}15 + 49 \times 0{,}05 = 8{,}25$, donc $V(B) = 8{,}25 - 1{,}25^2 = 6{,}6875 = V(X)$.

(d) Faux : un écart type est une racine carrée, il n'est jamais négatif. D'après la question précédente, $\sigma(B) = \sqrt{V(B)} = \sqrt{6{,}6875} \approx 2{,}59$ €, c'est-à-dire $\sigma(B) = \sigma(X)$.

Ex. 38 ★★★ **Démontrer les règles de aX + b, puis corriger Lucas**

(a) $Y = aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les mêmes probabilités p_i.
Donc $E(aX + b) = \sum p_i(ax_i + b) = a\sum p_i x_i + b\sum p_i$. Or $\sum p_i x_i = E(X)$, et $\sum p_i = 1$ (c'est ici qu'on l'utilise).
Donc $E(aX + b) = a\,E(X) + b$.

(b) $X - E(X) = aX + b$ avec $a = 1$ et $b = -E(X)$ (un nombre fixe). Par linéarité : $E(X - E(X)) = 1 \times E(X) - E(X) = 0$. La variable centrée a une espérance nulle.

Ex. 38 **(suite)**

(c) Pour tout i : $(ax_i + b) - (a\,E(X) + b) = a(x_i - E(X))$. Donc $V(aX + b) = \sum p_i\, a^2 (x_i - E(X))^2 = a^2 \sum p_i (x_i - E(X))^2 = a^2\, V(X)$. Enfin $\sigma(aX + b) = \sqrt{a^2\, V(X)} = \sqrt{a^2}\,\sqrt{V(X)} = |a|\,\sigma(X)$.

(d) $E(X) = -1 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}25 = 0{,}25$. $E(X^2) = 1 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}25 = 1{,}25$. D'après König-Huygens : $V(X) = 1{,}25 - 0{,}25^2 = 1{,}1875$.

(e) Lucas trouve $-3 \times 1{,}1875 + 5 = 1{,}4375$. Ici $a = -3$ et $b = 5$. Y prend les valeurs 8, 5 et -1 avec les probabilités 0,25 ; 0,5 ; 0,25 :

y_i	8	5	-1
P(Y = y_i)	0,25	0,5	0,25

$E(Y) = 2 + 2{,}5 - 0{,}25 = 4{,}25$ (et on a bien $-3 \times 0{,}25 + 5 = 4{,}25$). $E(Y^2) = 64 \times 0{,}25 + 25 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}25 = 28{,}75$, donc $V(Y) = 28{,}75 - 4{,}25^2 = 10{,}6875$. C'est bien $(-3)^2 \times 1{,}1875$. $\sigma(Y) = \sqrt{10{,}6875} \approx 3{,}27$ (c'est $3\,\sigma(X)$, jamais $-3\,\sigma(X)$). Lucas fait deux erreurs : il n'a pas mis le coefficient au carré, et il a ajouté b, alors qu'un décalage ne change pas la dispersion.

Ex. 39 ★★★ **Gymnastique : harmoniser les notes d'un jury**

(a) $E(X) = 6 \times 0{,}1 + 8 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}4 + 12 \times 0{,}2 = 9{,}4$. $E(X^2) = 36 \times 0{,}1 + 64 \times 0{,}3 + 100 \times 0{,}4 + 144 \times 0{,}2 = 91{,}6$. $V(X) = 91{,}6 - 9{,}4^2 = 3{,}24$ et $\sigma(X) = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$.

(b) Comme $a > 0$: $\sigma(Z) = |a|\,\sigma(X) = 1{,}8\,a = 3{,}6$, donc $a = 2$. Par linéarité : $E(Z) = 2 \times 9{,}4 + b = 18{,}8 + b = 14$, donc $b = -4{,}8$. On a $Z = 2X - 4{,}8$.

(c) Z prend les valeurs $2x_i - 4{,}8$ avec les mêmes probabilités :

z_i	7,2	11,2	15,2	19,2
P(Z = z_i)	0,1	0,3	0,4	0,2

On a $E(Z) = 14$ par choix de b. $E(Z^2) = 51{,}84 \times 0{,}1 + 125{,}44 \times 0{,}3 + 231{,}04 \times 0{,}4 + 368{,}64 \times 0{,}2 = 208{,}96$. Donc $V(Z) = 208{,}96 - 14^2 = 12{,}96$ et $\sigma(Z) = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$. On retrouve bien $3{,}6 = 2 \times 1{,}8$.

Ex. 39 **(suite)**

(d) $E(Z') = -2 \times 9{,}4 + b' = -18{,}8 + b' = 14$, donc $b' = 32{,}8$. $\sigma(Z') = |-2| \times 1{,}8 = 3{,}6$: Chloé a raison sur l'écart type ($\sigma(-2X) = 2\,\sigma(X)$, jamais négatif). Mais Z' prend les valeurs 20,8 ; 16,8 ; 12,8 ; 8,8 pour $X = 6$; 8 ; 10 ; 12 : comme $a < 0$, l'ordre est inversé et la meilleure gymnaste aurait la plus mauvaise note. Ce choix est donc inacceptable.

Ex. 40 ★★★ **Kermesse : mise équitable et gains doublés**

(a) Pas rouge : $P(X = 0) = 0{,}6$. Rouge puis 2 € : $P(X = 2) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$. Rouge puis 20 € : $P(X = 20) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.

x_i	0	2	20
P(X = x_i)	0,6	0,3	0,1

On vérifie : $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$.

(b) La ligne s'écrit `v = v + probas[i] * (valeurs[i] - m) ** 2`, c'est la définition $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$. On écrit `print(round(variance([0, 2, 20], [0.6, 0.3, 0.1]), 4))`, qui affiche `34.44` : $V(X) = 34{,}44$.

(c) $E(X) = 0 \times 0{,}6 + 2 \times 0{,}3 + 20 \times 0{,}1 = 2{,}6$. Par linéarité : $E(G) = E(X) - m = 2{,}6 - m$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, donc pour $m = 2{,}60$ €. Avec $m = 3$ € : $E(G) = -0{,}4$ €, le jeu est défavorable au joueur. En moyenne, sur un grand nombre de parties, l'organisateur gagne 0,40 € par partie, soit environ $500 \times 0{,}4 = 200$ € sur 500 parties.

(d) Le nouveau gain net est $G' = 2X - m'$: $a = 2$ et $b = -m'$. $E(G') = 2 \times 2{,}6 - m' = 5{,}2 - m'$. L'organisateur gagne 0,50 € en moyenne si $E(G') = -0{,}5$, donc $m' = 5{,}70$ €. Approfondissement : $\sigma(G') = |2| \times \sigma(X) = 2\sqrt{34{,}44} \approx 11{,}74$ € (la mise ne change pas la dispersion). Les gains nets sont deux fois plus dispersés autour de leur moyenne : le jeu devient plus risqué pour le joueur comme pour l'organisateur.

6. *Jeu équitable : gain net, mise et paramètre*

Ex. 41 ★☆☆ **Gain net en un coup d'œil**

(a) $G = 10 - 3 = 7$ € : la mise est payée même quand on gagne.

(b) $G = 0 - 3 = -3$ € (et non 0) : le joueur a perdu sa mise.

(c) $E(G) = E(Y) - m = 2{,}40 - 3 = -0{,}60$ €.

Ex. 41 **(suite)**

(d) $E(G) = 3{,}20 - 2{,}50 = 0{,}70$ € > 0 : oui, le jeu est favorable au joueur.

(e) Le jeu est équitable si $E(G) = E(Y) - m = 0$, donc pour $m = 4{,}75$ €.

(f) En moyenne, sur un grand nombre de parties, l'organisateur gagne 0,35 € par partie : sur 400 parties, environ $-400 \times (-0{,}35) = 140$ €.

Ex. 42 ★★☆ **Lot, mise ou nombre de cases à trouver**

(a) $E(Y) = 0{,}1g$. Le jeu est équitable si $0{,}1g - 2 = 0$, c'est-à-dire $g = 20$ €.

(b) $E(Y) = 5 \times \frac{k}{20} = \frac{k}{4}$. Le jeu est équitable si $\frac{k}{4} - 1 = 0$, c'est-à-dire $k = 4$ cases gagnantes.

(c) $E(Y) = 40 \times 0{,}03 + 8 \times 0{,}1 = 1{,}2 + 0{,}8 = 2$ €. Le jeu est équitable pour une mise de 2 €.

(d) $E(Y) = \frac{5}{3} \approx 1{,}6667$ €. Le jeu n'est pas défavorable si $m \leqslant \frac{5}{3}$. Il faut donc arrondir vers le bas : 1,66 €. Avec 1,67 €, on aurait $E(G) < 0$.

Ex. 43 ★★☆ **Une boule puis un dé à la fête foraine**

(a) $G = Y - 2$ prend les valeurs 10, 1 et -2 (boule noire : Inès perd sa mise). $P(G = 10) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$, $P(G = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(G = -2) = \frac{3}{5}$.

g_i	-2	1	10
P(G = g_i)	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

On vérifie que la somme vaut 1.

(b) $E(G) = -2 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{15} = -\frac{6}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{5} = -0{,}20$ €. Comme $E(G) < 0$, le jeu est défavorable à Inès. En moyenne, sur un grand nombre de parties, elle perd 0,20 € par partie.

(c) En moyenne, le forain gagne 0,20 € par partie : sur 300 parties, il peut espérer gagner environ $-300 \times (-0{,}20) = 60$ €.

(d) $E(Y) = g \times \frac{1}{15} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{g}{15} + 1$. Le jeu est équitable si $\frac{g}{15} + 1 - 2 = 0$, c'est-à-dire $g = 15$ €.

Ex. 44 ★★☆ **La roue du club de hand**

(a) Non. Léa a calculé l'espérance du gain brut, $E(Y) = 4$ €, sans retrancher la mise. Or l'équité se juge sur le gain net : un secteur perdant donne $G = -6$, pas 0.

Ex. 44 **(suite)**

(b) $G = Y - 6$ prend les valeurs 24, 0 et -6.

g_i	-6	0	24
P(G = g_i)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$E(G) = -6 \times \frac{8}{12} + 0 \times \frac{3}{12} + 24 \times \frac{1}{12} = -4 + 2 = -2$ €, ce qui revient à $E(Y) - 6 = 4 - 6$. Le jeu est défavorable : en moyenne, le joueur perd 2 € par partie.

(c) Sur 800 parties, le club peut espérer gagner environ $-800 \times (-2) = 1\,600$ €.

(d) Avec un lot g : $E(G) = \frac{g}{12} + \frac{18}{12} - 6 = \frac{g-54}{12}$. Le club gagne en moyenne $-E(G) = \frac{54-g}{12}$ par partie. On veut $\frac{54-g}{12} \geqslant 1$, c'est-à-dire $g \leqslant 42$. Le lot maximal est de 42 €.

Ex. 45 ★★☆ **Deux stands équitables à la kermesse**

(a) G_A prend les valeurs -2 et 2, chacune avec la probabilité $\frac{1}{2}$. G_B prend les valeurs -2 et 48 : $P(G_B = -2) = \frac{24}{25}$ et $P(G_B = 48) = \frac{1}{25}$.

(b) $E(G_A) = -2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ et $E(G_B) = -2 \times \frac{24}{25} + 48 \times \frac{1}{25} = -\frac{48}{25} + \frac{48}{25} = 0$. Les deux espérances sont nulles : les deux jeux sont équitables.

(c) $E(G_A^2) = 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 4$, donc $V(G_A) = 4 - 0^2 = 4$ et $\sigma(G_A) = 2$ €. $E(G_B^2) = 4 \times \frac{24}{25} + 2304 \times \frac{1}{25} = \frac{2400}{25} = 96$, donc $V(G_B) = 96 - 0^2 = 96$ et $\sigma(G_B) = \sqrt{96} \approx 9{,}80$ €.

(d) Faux. Les deux jeux ont la même espérance, 0 : en moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur ne gagne ni ne perd, sur aucun des deux stands. Mais $\sigma(G_B) \approx 9{,}80$ € est bien plus grand que $\sigma(G_A) = 2$ € : les gains du stand B sont beaucoup plus dispersés. Au stand B, on perd ses 2 € 24 fois sur 25 et on gagne rarement 48 €. Le stand B est le plus risqué.

Ex. 46 ★★★ **Le stand de jetons du marché de Noël**

(a) On travaille sur le gain net $G = Y - m$, car la mise est payée à chaque partie. Avec le jeton doré, $G = 12 - m$. Avec un jeton argenté, $G = 4 - m$. Avec un jeton blanc, $G = -m$: le joueur perd sa mise, donc G ne vaut pas 0.

g_i	$12 - m$	$4 - m$	$-m$
P(G = g_i)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$

Vérification : $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = 1$.

Ex. 46 **(suite)**

(b) $E(G) = \frac{12-m}{9} + \frac{2(4-m)}{9} + \frac{6\times(-m)}{9} = \frac{12-m+8-2m-6m}{9} = \frac{20-9m}{9} = \frac{20}{9} - m$. Le jeu est équitable si et seulement si $E(G) = 0$, c'est-à-dire $m = \frac{20}{9} = 2{,}2222\ldots$ €. Ce nombre ne s'écrit pas avec un nombre entier de centimes.
Donc aucune mise que l'on peut réellement payer ne rend le jeu exactement équitable.

(c) En moyenne, l'organisateur gagne $-E(G) = m - \frac{20}{9}$ par partie. On veut $m - \frac{20}{9} \geqslant 1$, c'est-à-dire $m \geqslant \frac{29}{9} \approx 3{,}2222$. On arrondit donc au centime supérieur : $m = 3{,}23$ €. Vérification : avec 3,22 €, Malik ne gagnerait que $3{,}22 - \frac{20}{9} \approx 0{,}998$ € par partie, ce qui est moins que 1 €. Avec 3,23 €, il gagne environ 1,008 €.

(d) Le joueur perd en moyenne $m - \frac{20}{9}$ € par partie. On veut $m - \frac{20}{9} \leqslant 1{,}5$, c'est-à-dire $m \leqslant \frac{67}{18} \approx 3{,}7222$. On arrondit donc au centime inférieur : la mise maximale est 3,72 €. Avec 3,73 €, le joueur perdrait environ 1,508 € par partie, ce qui dépasse 1,50 €. Avec $m = 3{,}50$ €, on a $E(G) = \frac{20}{9} - 3{,}5 = -\frac{23}{18}$. Sur 500 parties, Malik peut espérer gagner environ $-500 \times E(G) = \frac{5750}{9} \approx 638{,}89$ €, car l'espérance est le gain moyen par partie sur un grand nombre de parties.

Ex. 47 ★★★ **La roue puis la pièce du club de voile**

(a) Pour que le gain brut soit de 15 €, il faut d'abord un secteur gagnant (probabilité $\frac{n}{10}$), puis pile (probabilité $\frac{1}{2}$). La probabilité d'obtenir « secteur gagnant puis pile » est donc $\frac{n}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{20}$. Le gain net vaut alors $15 - 4 = 11$, d'où $P(G = 11) = \frac{n}{20}$. De même, « secteur gagnant puis face » donne $G = 3 - 4 = -1$ avec $P(G = -1) = \frac{n}{20}$. Un secteur perdant donne $G = -4$ (la mise est perdue, G ne vaut pas 0), avec la probabilité $1 - \frac{n}{10}$.

g_i	11	-1	-4
P(G = g_i)	$\frac{n}{20}$	$\frac{n}{20}$	$1 - \frac{n}{10}$

Vérification : $\frac{n}{20} + \frac{n}{20} + 1 - \frac{n}{10} = 1$.

(b) $E(G) = 11 \times \frac{n}{20} - 1 \times \frac{n}{20} - 4\left(1 - \frac{n}{10}\right) = \frac{10n}{20} - 4 + \frac{8n}{20} = \frac{9n}{10} - 4$. Le jeu est équitable si et seulement si $E(G) = 0$, c'est-à-dire $n = \frac{40}{9} \approx 4{,}44$. Ce n'est pas un entier : aucun nombre de secteurs ne rend le jeu équitable.

Ex. 47 **(suite)**

(c) Le jeu est favorable au joueur si $E(G) > 0$, c'est-à-dire $\frac{9n}{10} > 4$, soit $n > \frac{40}{9} \approx 4{,}44$. Comme n est un entier, le jeu est favorable au joueur pour $n \geqslant 5$, donc pour $n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Par exemple, pour $n = 5$, $E(G) = 0{,}5$ €.

(d) Le jeu est favorable au club si $E(G) < 0$, c'est-à-dire $n \leqslant 4$. Le club choisit donc $n = 4$. Alors $E(G) = \frac{9 \times 4}{10} - 4 = -0{,}4$ € : en moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur perd 0,40 € par partie. Sur 1 000 parties, le club peut espérer gagner environ $-1\,000 \times (-0{,}4) = 400$ €.

(e) Avec $n = 4$, on a $P(Y = g) = P(Y = 3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, où Y est le gain brut.
Donc $E(Y) = \frac{g}{5} + \frac{3}{5} = \frac{g+3}{5}$ et $E(G) = \frac{g+3}{5} - 4$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, c'est-à-dire $g + 3 = 20$, soit $g = 17$ €. Pile doit donc rapporter 17 €.

Ex. 48 ★★★ **Équitable, mais très risqué : les enveloppes du voyage scolaire**

(a) Si Zoé tire le bon, $G = 100 - 5 = 95$. Sinon, $G = -5$: elle perd sa mise.

g_i	95	-5
P(G = g_i)	0,05	0,95

$E(G) = 95 \times 0{,}05 + (-5) \times 0{,}95 = 4{,}75 - 4{,}75 = 0$.
Comme $E(G) = 0$, le jeu est équitable. On le retrouve aussi avec $E(Y) = 100 \times 0{,}05 = 5$, donc $E(G) = E(Y) - 5 = 0$.

(b) $E(G^2) = 95^2 \times 0{,}05 + (-5)^2 \times 0{,}95 = 451{,}25 + 23{,}75 = 475$. D'après la formule de König-Huygens, $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 475 - 0^2 = 475$.
Donc $\sigma(G) = \sqrt{475} \approx 21{,}79$ €.

(c) Ligne 8 : `v = v + probas[i] * (valeurs[i] - e) ** 2`, d'après la formule $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$.
La loi utilisée est : $G' = 195$ avec la probabilité 0,025 et $G' = -5$ avec la probabilité 0,975. On a $E(G') = 4{,}875 - 4{,}875 = 0$ et $V(G') = 195^2 \times 0{,}025 + 25 \times 0{,}975 = 975$. Le programme affiche `31.225`, car $\sqrt{975} \approx 31{,}225$. La variante est aussi équitable, mais encore plus dispersée.

Ex. 48 **(suite)**

(d) C'est faux. À chaque partie, Zoé gagne 95 € ou perd 5 €. Elle ne récupère jamais exactement sa mise.
« Équitable » signifie seulement qu'en moyenne, sur un grand nombre de parties, elle ne gagne ni ne perd.
L'écart type $\sigma(G) \approx 21{,}79$ € est très grand devant la mise de 5 € : les gains sont très dispersés autour de la moyenne 0. Le plus souvent (probabilité 0,95), Zoé perd 5 €, et elle gagne rarement une grosse somme. C'est un jeu à risque.

(e) Y prend les valeurs 100 (probabilité 0,05) et 0 (probabilité 0,95). $E(Y) = 5$ et $E(Y^2) = 100^2 \times 0{,}05 = 500$.
Donc $V(Y) = 500 - 5^2 = 475 = V(G)$. En effet, $G = Y - 5$: toutes les valeurs sont décalées de 5, et un décalage ne change pas la dispersion autour de la moyenne.