Variable aléatoire : loi de probabilité et espérance – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Variables aléatoires réelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Une loi se contrôle : les probabilités sont entre 0 et 1 et leur somme vaut 1.
- $\{X \leqslant k\}$ contient la valeur k ; le contraire de $\{X \leqslant k\}$ est $\{X > k\}$.
- $E(X)$ n'est pas la moyenne simple des valeurs : chaque valeur est multipliée par sa probabilité.
- Gain net = gain brut − mise : la mise est payée à chaque partie, même quand on gagne.
- Un jeu est équitable quand l'espérance du gain **net** est nulle.
- $E(X)$ est une moyenne sur un grand nombre de répétitions : ce n'est pas forcément une valeur de X.

Exercice 1 – Lire une loi ★

La variable aléatoire X a la loi ci-dessous. Calcule chaque probabilité.

x_i	-3	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	0,2	0,3	0,15

a) $P(X = 2)$

b) $P(X \leqslant 0)$

c) $P(X < 0)$

d) $P(X > 0)$

e) $P(X \geqslant -1)$

f) $P(-1 \leqslant X \leqslant 2)$

g) $P(X \neq 0)$

h) $P(X = 1)$

Exercice 2 – La probabilité manquante ★

Dans chaque tableau, trouve la probabilité inconnue (le ?, a ou p), ou dis si le tableau peut être une loi de probabilité.

a)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	?	0,45

b)

x_i	-2	0	4	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	?	0,25

c)

x_i	0	10	50
$P(X=x_i)$	0,62	0,3	?

d)

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	a	$2a$	$3a$

e)

x_i	-1	1	3
$P(X=x_i)$	0,3	0,5	0,3

Est-ce une loi ?

f)

x_i	2	4	6	8
$P(X=x_i)$	p	0,1	p	0,4

g)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,7	$-0,1$	0,4

Est-ce une loi ?

h)

x_i	-5	0	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	?	0,4

Exercice 3 – Calculer une espérance ★

Calcule $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ pour chaque loi.

a)

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

x_i	-2	1	4
$P(X=x_i)$	0,3	0,5	0,2

c)

x_i	0	5	20
$P(X=x_i)$	0,5	0,4	0,1

d)

x_i	-10	2	5
$P(X=x_i)$	0,2	0,5	0,3

e)

x_i	-4	0	6
$P(X = x_i)$	0,6	0,2	0,2

f)

x_i	-3	3
$P(X = x_i)$	0,5	0,5

g)

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

h)

x_i	-1	2	10
$P(X = x_i)$	0,5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 4 – Deux dés : l'écart ★★

On lance deux dés équilibrés à six faces. X est l'écart entre les deux résultats : le plus grand moins le plus petit (0 s'ils sont égaux).

1. Quelles valeurs X peut-il prendre ?
2. Donne la loi de X dans un tableau.
3. Calcule $P(X \geqslant 3)$.
4. Calcule $E(X)$, puis interprète.

Exercice 5 – L'urne ★★

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule, on ne la remet pas, puis on en tire une deuxième. X est le nombre de boules rouges tirées.

1. Quelles valeurs X peut-il prendre ?
2. Construis un arbre pondéré, puis donne la loi de X.
3. Vérifie que c'est bien une loi, puis calcule $P(X \geqslant 1)$.
4. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 6 – La roue de la fête ★★

Une roue est partagée en 8 secteurs de même taille : 1 secteur rapporte 20 €, 2 secteurs rapportent 5 €, les autres rien. Une partie coûte 4 €. Y est le gain brut (ce que la roue rapporte) et G le gain net du joueur.

1. Donne la loi de Y.
2. Calcule $E(Y)$.
3. Exprime G en fonction de Y, donne la loi de G, puis calcule $E(G)$.
4. Le jeu est-il favorable au joueur ? Combien l'organisateur peut-il espérer gagner sur 400 parties ?

Exercice 7 – Trois lancers : la bonne mise ★★★

On lance trois fois une pièce équilibrée. Trois « pile » rapportent 12 €, exactement deux « pile » rapportent 4 €,

sinon on ne gagne rien. Pour jouer, on mise m euros. Y est le gain brut, $G = Y - m$ le gain net.

1. Donne la loi de Y.
2. Calcule $E(Y)$.
3. Exprime $E(G)$ en fonction de m. Pour quelle mise le jeu est-il équitable ?
4. L'organisateur veut gagner en moyenne 0,40 € par partie. Quelle mise doit-il fixer ? Combien peut-il espérer gagner sur 500 parties ?

Exercice 8 – Le gros lot ★★★

Une association vend 50 tickets à 3 € l'un. Un ticket rapporte un gros lot de g euros, 5 tickets rapportent 10 €, 10 tickets rapportent 2 € et les autres rien. On achète un ticket au hasard ; G est le gain net.

1. Donne la loi de G (en fonction de g).
2. Montre que $E(G) = \dfrac{g - 80}{50}$.
3. Pour quelle valeur de g le jeu est-il équitable ?
4. Pour quelles valeurs de g le jeu est-il favorable au joueur ? Est-ce raisonnable pour l'association ?

Exercice 9 – Deux probabilités inconnues ★★★

Une variable aléatoire X a la loi ci-dessous, où a et b sont deux réels. On sait que $E(X) = 1{,}6$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	a	b	0,2

1. Montre que $a + b = 0{,}7$.
2. Montre que $a + 2b = 1$.
3. Calcule a et b.
4. Calcule $P(X \geqslant 2)$ et $P(X \leqslant 1)$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Pour b), c), d) et f), X a la loi ci-dessous. Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

x_i	-1	2	6
$P(X = x_i)$	0,4	0,35	0,25

a) « Le tableau x_i : 1, 3, 5 ; p_i : 0,2 ; 0,5 ; 0,4 est une loi de probabilité. »

b) $E(X) = \dfrac{-1 + 2 + 6}{3} = \dfrac{7}{3}$

c) $P(X < 2) = P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}75$

d) $P(X > 2) = 1 - P(X \geqslant 2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

e) « On mise 5 € ; on reçoit 10 € avec la probabilité 0,4, rien sinon. $E(G) = 10 \times 0{,}4 = 4 > 0$: le jeu est favorable. »

f) « $E(X) = 1{,}8$, donc à chaque expérience X vaut 1,8. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. La loi d'une variable X donne $P(X = 0) = 0{,}25$, $P(X = 1) = 0{,}4$ et $P(X = 2) = q$. Alors q vaut :

   A 0,65 **B** 0,35 **C** 0,6 **D** 0,15

2. X prend les valeurs -1, 1 et 3 avec les probabilités $0{,}5$; $0{,}3$ et $0{,}2$. $E(X)$ vaut :

   A 1 **B** $1{,}4$ **C** $0{,}6$ **D** $0{,}4$

3. Le contraire de l'événement $\{X \leqslant 3\}$ est :

   A $\{X > 3\}$ **B** $\{X \geqslant 3\}$ **C** $\{X < 3\}$ **D** $\{X \leqslant -3\}$

4. Un billet coûte 2 € et le gain brut moyen vaut $1{,}60$ €. L'espérance du gain net vaut :

   A $1{,}60$ € **B** $0{,}40$ € **C** $-0{,}40$ € **D** $3{,}60$ €

5. Un jeu payant est équitable lorsque :

   A l'espérance du gain brut est nulle **B** on a une chance sur deux de gagner

   C l'espérance du gain brut est positive **D** l'espérance du gain net est nulle

6. Pour une mise de 3 €, le gain brut Y vérifie $E(Y) = \dfrac{g}{10} + 1$. Le jeu est équitable pour g égal à :

   A 20 **B** 30 **C** 2 **D** 40

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).