Corrigé – Variable aléatoire : loi de probabilité et espérance

Mathématiques – Première spécialité

Variables aléatoires réelles · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Lire une loi ★

La variable aléatoire X a la loi ci-dessous. Calcule chaque probabilité.

x_i	-3	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	0,2	0,3	0,15

a) On lit la case sous 2 : $P(X = 2) = 0{,}3$.

b) $\{X \leqslant 0\}$ regroupe les valeurs -3, -1 et 0 (le 0 compris).
$P(X \leqslant 0) = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}55$.

c) Inégalité stricte : 0 n'en fait pas partie, seules -3 et -1 comptent.
$P(X < 0) = 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}35$.

d) $\{X > 0\}$ est le contraire de $\{X \leqslant 0\}$ (calcul b).
$P(X > 0) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.
Vérification directe : $P(X = 2) + P(X = 5) = 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}45$.

e) Toutes les valeurs sauf -3 : on passe par le contraire $\{X = -3\}$.
$P(X \geqslant -1) = 1 - P(X = -3) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

f) Les valeurs -1, 0 et 2 (bornes comprises).
$P(-1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}75$.

g) Contraire de $\{X = 0\}$: $P(X \neq 0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

h) 1 n'est pas une valeur prise par X : l'événement $\{X = 1\}$ est impossible.
$P(X = 1) = 0$.

Exercice 2 – La probabilité manquante ★

Dans chaque tableau, trouve la probabilité inconnue (le ?, a ou p), ou dis si le tableau peut être une loi de probabilité.

a) La somme des probabilités vaut 1 :
$$\begin{aligned} ? &= 1 - 0{,}2 - 0{,}45 \\ &= 0{,}35 \end{aligned}$$

b) La somme des probabilités vaut 1 :
$$\begin{aligned} ? &= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - 0{,}25 \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

On met au même dénominateur : $\dfrac{12}{12} - \dfrac{2}{12} - \dfrac{4}{12} - \dfrac{3}{12} = \dfrac{3}{12}$.

c) La somme des probabilités vaut 1 :

$$\begin{aligned}? &= 1 - 0{,}62 - 0{,}3 \\ &= 0{,}08\end{aligned}$$

d) La somme des probabilités vaut 1 : $a + 2a + 3a = 1$

$$\begin{aligned}&\iff 6a = 1 \quad \textit{(on réduit)} \\ &\iff a = \frac{1}{6} \quad \textit{(on divise par 6)} \\ &S = \left\{\frac{1}{6}\right\}\end{aligned}$$

Les probabilités sont $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; elles sont bien entre 0 et 1.

e) On fait le contrôle : $0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1{,}1$.

La somme ne vaut pas 1 *: ce n'est pas une loi de probabilité.*

f) La somme des probabilités vaut 1 : $p + 0{,}1 + p + 0{,}4 = 1$

$$\begin{aligned}&\iff 2p + 0{,}5 = 1 \quad \textit{(on réduit)} \\ &\iff 2p = 0{,}5 \quad \textit{(on retranche 0,5)} \\ &\iff p = 0{,}25 \quad \textit{(on divise par 2)} \\ &S = \left\{\frac{1}{4}\right\}\end{aligned}$$

g) La somme vaut $0{,}7 + (-0{,}1) + 0{,}4 = 1$, mais cela ne suffit pas.

Une probabilité n'est jamais négative : $-0{,}1$ *est impossible, ce n'est pas une loi.*

h) La somme des probabilités vaut 1 :

$$\begin{aligned}? &= 1 - \frac{1}{3} - 0{,}4 \\ &= \frac{4}{15}\end{aligned}$$

Au dénominateur 15 : $\frac{15}{15} - \frac{5}{15} - \frac{6}{15} = \frac{4}{15}$.

Exercice 3 – Calculer une espérance ★

Calcule $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ pour chaque loi.

a) $E(X) = 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}4$

$$\begin{aligned}&= 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}9 + 1{,}6 \\ &= 3\end{aligned}$$

b) $E(X) = -2 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}2$

$$\begin{aligned}&= -0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}8 \\ &= 0{,}7\end{aligned}$$

c) $E(X) = 0 \times 0{,}5 + 5 \times 0{,}4 + 20 \times 0{,}1$

$$\begin{aligned}&= 0 + 2 + 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

d) $E(X) = -10 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}5 + 5 \times 0{,}3$
$= -2 + 1 + 1{,}5$
$= 0{,}5$

e) $E(X) = -4 \times 0{,}6 + 0 \times 0{,}2 + 6 \times 0{,}2$
$= -2{,}4 + 0 + 1{,}2$
$= -1{,}2$

f) $E(X) = -3 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}5$
$= -1{,}5 + 1{,}5$
$= 0$

L'espérance est nulle : en moyenne, les valeurs -3 et 3 se compensent.

g) $E(X) = 1 \times \dfrac{1}{6} + 2 \times \dfrac{1}{6} + 3 \times \dfrac{1}{6} + 4 \times \dfrac{1}{6} + 5 \times \dfrac{1}{6} + 6 \times \dfrac{1}{6}$
$= \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + 0{,}5 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6} + 1$
$= 3{,}5$

$3{,}5$ n'est pas une valeur de X : une espérance est une moyenne, pas un résultat possible.

h) $E(X) = -1 \times 0{,}5 + 2 \times \dfrac{1}{3} + 10 \times \dfrac{1}{6}$
$= -0{,}5 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}$
$= \dfrac{11}{6}$

On réduit au dénominateur 6 : $-\dfrac{3}{6} + \dfrac{4}{6} + \dfrac{10}{6} = \dfrac{11}{6}$.

Exercice 4 – Deux dés : l'écart ★★

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

1. Le plus petit écart est 0 (deux résultats égaux), le plus grand $6 - 1 = 5$.
   X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

2. Les $6 \times 6 = 36$ résultats sont équiprobables.
   Dans le tableau ci-dessus (une ligne par premier dé, une colonne par second), on compte chaque écart.

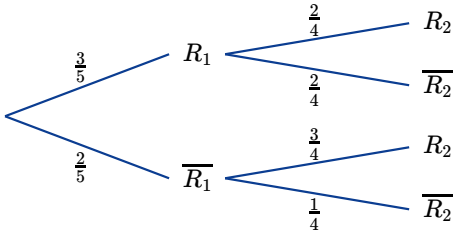
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\dfrac{6}{36}$	$\dfrac{10}{36}$	$\dfrac{8}{36}$	$\dfrac{6}{36}$	$\dfrac{4}{36}$	$\dfrac{2}{36}$

   Contrôle : $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$, donc la somme des probabilités vaut 1.

3. Les valeurs 3, 4 et 5 : $P(X \geqslant 3) = \dfrac{6}{36} + \dfrac{4}{36} + \dfrac{2}{36} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

4. $E(X) = 0 \times \dfrac{6}{36} + 1 \times \dfrac{10}{36} + 2 \times \dfrac{8}{36} + 3 \times \dfrac{6}{36} + 4 \times \dfrac{4}{36} + 5 \times \dfrac{2}{36}$
$E(X) = \dfrac{0 + 10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} = \dfrac{70}{36} = \dfrac{35}{18} \approx 1{,}94$.
Sur un grand nombre de lancers, l'écart moyen entre les deux dés est proche de 1,94.

Exercice 5 – L'urne ★★



1. Aucune, une ou deux boules rouges : X prend les valeurs 0, 1 et 2.

2. On note R_1 et R_2 : « rouge au 1er tirage », « rouge au 2e tirage ».
Après le premier tirage, il reste 4 boules (arbre ci-dessus).
$P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.
$P(X = 0) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.
$X = 1$: deux chemins (rouge puis bleue, bleue puis rouge).
$P(X = 1) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{20} + \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{5}$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

3. Contrôle : $\dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10} = 1$.
$\{X \geqslant 1\}$ est le contraire de $\{X = 0\}$: $P(X \geqslant 1) = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$.

4. $E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}6 + 2 \times 0{,}3$
$= 0 + 0{,}6 + 0{,}6$
$= 1{,}2$

Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on tire en moyenne 1,2 boule rouge par expérience.

Exercice 6 – La roue de la fête ★★

1. Les 8 secteurs sont équiprobables :

y_i	20	5	0
$P(Y = y_i)$	0,125	0,25	0,625

Contrôle : $\dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{5}{8} = 1$.

2. $E(Y) = 20 \times 0{,}125 + 5 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}625$
   $= 2{,}5 + 1{,}25 + 0$
   $= 3{,}75$

3. Le joueur paie 4 € à chaque partie, même quand il gagne : $G = Y - 4$.
   Valeurs : $20 - 4 = 16$, $5 - 4 = 1$ et $0 - 4 = -4$, avec les mêmes probabilités.

g_i	16	1	-4
$P(G = g_i)$	$0{,}125$	$0{,}25$	$0{,}625$

   $E(G) = 16 \times 0{,}125 + 1 \times 0{,}25 + (-4) \times 0{,}625$
   $= 2 + 0{,}25 - 2{,}5$
   $= -0{,}25$

   On retrouve $E(G) = E(Y) - 4 = 3{,}75 - 4 = -0{,}25$.

4. $E(G) = -0{,}25 < 0$: le jeu est défavorable au joueur.
   En moyenne, le joueur perd 0,25 € par partie, que l'organisateur gagne.
   Sur 400 parties : $400 \times 0{,}25 = 100$ € environ.

Exercice 7 – Trois lancers : la bonne mise ★★★

1. Les $2 \times 2 \times 2 = 8$ issues (PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF) sont équiprobables.
   Trois « pile » : PPP seule.
   Exactement deux « pile » : PPF, PFP, FPP.

y_i	12	4	0
$P(Y = y_i)$	$0{,}125$	$0{,}375$	$0{,}5$

   Contrôle : $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = 1$.

2. $E(Y) = 12 \times 0{,}125 + 4 \times 0{,}375 + 0 \times 0{,}5$
   $= 1{,}5 + 1{,}5 + 0$
   $= 3$

3. Par linéarité, $E(G) = E(Y - m) = E(Y) - m = 3 - m$.
   Le jeu est équitable quand $E(G) = 0$:$3 - m = 0$
   $\iff m = 3$ *(on ajoute m)*
   $S = \{3\}$
   Il faut miser 3 €.

4. Ce que l'organisateur gagne, le joueur le perd : il faut $E(G) = -0{,}4$.$3 - m = -0{,}4$
   $\iff -m = -3{,}4$ *(on retranche 3)*
   $\iff m = 3{,}4$ *(on multiplie par -1)*
   $S = \left\{\frac{17}{5}\right\}$
   La mise doit être de 3,40 €.
   Sur 500 parties : $500 \times 0{,}4 = 200$ € environ.

Exercice 8 – Le gros lot ★★★

1. Gain net = gain brut $-$ 3 € : les valeurs sont $g-3$, $10-3=7$, $2-3=-1$ et $0-3=-3$.
   Il reste $50-1-5-10=34$ tickets perdants.

g_i	$g-3$	7	-1	-3
$P(G=g_i)$	0,02	0,1	0,2	0,68

2. $E(G)=(g-3)\times\dfrac{1}{50}+7\times\dfrac{5}{50}+(-1)\times\dfrac{10}{50}+(-3)\times\dfrac{34}{50}$
   $E(G)=\dfrac{g-3+35-10-102}{50}=\dfrac{g-80}{50}$.

3. Le jeu est équitable quand $E(G)=0$: $\dfrac{g-80}{50}=0$
   $\iff g-80=0$ *(on multiplie par 50)*
   $\iff g=80$ *(on ajoute 80)*
   $S=\{80\}$
   Le gros lot doit valoir 80 €.

4. Favorable au joueur : $E(G)>0$. $\dfrac{g-80}{50}>0$
   $\iff g-80>0$ *(on multiplie par 50 > 0)*
   $\iff g>80$ *(on ajoute 80)*
   $S=]80\,;+\infty[$
   Au-delà de 80 €, l'association perd de l'argent en moyenne : elle a intérêt à choisir $g<80$.

Exercice 9 – Deux probabilités inconnues ★★★

1. La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}1+a+b+0{,}2=1$, donc $a+b=1-0{,}3=0{,}7$.

2. $E(X)=0\times0{,}1+1\times a+2\times b+3\times0{,}2=a+2b+0{,}6$.
   Or $E(X)=1{,}6$, donc $a+2b+0{,}6=1{,}6$, soit $a+2b=1$.

3. On soustrait la première égalité à la seconde : $(a+2b)-(a+b)=1-0{,}7$, soit $b=0{,}3$.
   Puis $a=0{,}7-b=0{,}7-0{,}3=0{,}4$.
   Les deux nombres sont entre 0 et 1 : le tableau est bien une loi.

4. $P(X\geqslant 2)=b+0{,}2=0{,}3+0{,}2=0{,}5$.
   $\{X\leqslant 1\}$ est le contraire de $\{X\geqslant 2\}$: $P(X\leqslant 1)=1-0{,}5=0{,}5$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Pour b), c), d) et f), X a la loi ci-dessous. Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

x_i	-1	2	6
$P(X=x_i)$	0,4	0,35	0,25

a) *Le contrôle n'a pas été fait.*
$0{,}2+0{,}5+0{,}4=1{,}1\neq 1$: ce n'est pas une loi de probabilité.

b) *C'est la moyenne simple des valeurs : il faut pondérer chaque valeur par sa probabilité.*
$E(X) = -1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}35 + 6 \times 0{,}25$
$= -0{,}4 + 0{,}7 + 1{,}5$
$= 1{,}8$

c) *L'inégalité est stricte : la valeur* 2 *n'est pas dans* $\{X < 2\}$.
$P(X < 2) = P(X = -1) = 0{,}4$.

d) *Le contraire de* $\{X > 2\}$ *est* $\{X \leqslant 2\}$, *pas* $\{X \geqslant 2\}$.
$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - (0{,}4 + 0{,}35) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

e) *La mise a été oubliée : c'est l'espérance du gain brut, pas du gain net.*
$E(G) = E(Y) - 5 = 4 - 5 = -1 < 0$: le jeu est défavorable.

f) $1{,}8$ *n'est même pas une valeur de* X *:* X *vaut* -1, 2 *ou* 6.
$E(X) = 1{,}8$ veut dire : sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des valeurs obtenues est proche de $1{,}8$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. La loi d'une variable X donne $P(X = 0) = 0{,}25$, $P(X = 1) = 0{,}4$ et $P(X = 2) = q$. Alors q vaut :

Réponse B : $0{,}35$
La somme vaut 1 : $q = 1 - 0{,}25 - 0{,}4 = 0{,}35$.

2. X prend les valeurs -1, 1 et 3 avec les probabilités $0{,}5$; $0{,}3$ et $0{,}2$. $E(X)$ vaut :

Réponse D : $0{,}4$
$E(X) = -1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2 = -0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}6 = 0{,}4$.

3. Le contraire de l'événement $\{X \leqslant 3\}$ est :

Réponse A : $\{X > 3\}$
On garde tout ce qui n'est pas « au plus 3 » : les valeurs strictement plus grandes que 3.

4. Un billet coûte 2 € et le gain brut moyen vaut $1{,}60$ €. L'espérance du gain net vaut :

Réponse C : $-0{,}40$ €
$E(G) = E(Y) - 2 = 1{,}6 - 2 = -0{,}4$ €.

5. Un jeu payant est équitable lorsque :

Réponse D : l'espérance du gain net est nulle
L'équité se juge sur le gain net, mise retranchée : $E(G) = 0$.

6. Pour une mise de 3 €, le gain brut Y vérifie $E(Y) = \dfrac{g}{10} + 1$. Le jeu est équitable pour g égal à :

Réponse A : 20
$E(G) = \dfrac{g}{10} + 1 - 3 = 0 \iff \dfrac{g}{10} = 2 \iff g = 20$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).