Corrigé – Valeur absolue et distance

Mathématiques – Seconde

Ensembles de nombres, intervalles et valeur absolue · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Calculer une valeur absolue ★

Calcule. Quand le nombre entre les barres est négatif, justifie son signe.

a) $|4-11| = |-7| = 7$

b) $|-3+8| = |5| = 5$

c) $-|-4| = -(4) = -4$

d) $\left|\dfrac{-1}{2} - \dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{-3}{6} - \dfrac{2}{6}\right| = \left|\dfrac{-5}{6}\right| = \dfrac{5}{6}$

e) $|-5| - |3| = 5 - 3 = 2$

f) $|-5-3| = |-8| = 8$

g) $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$, donc $\sqrt{5} - 3 < 0$: on prend son opposé.
$\left|\sqrt{5}-3\right| = -\left(\sqrt{5}-3\right) = 3 - \sqrt{5}$

h) $\pi \approx 3{,}14 < 4$, donc $\pi - 4 < 0$: on prend son opposé.
$|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$

i) $\sqrt{3} > \sqrt{1} = 1$, donc $1 - \sqrt{3} < 0$: on prend son opposé.
$\left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1$

j) $\pi \approx 3{,}1416 > 3{,}14$, donc $3{,}14 - \pi < 0$: on prend son opposé.
$|3{,}14 - \pi| = -(3{,}14 - \pi) = \pi - 3{,}14$

Exercice 2 – Distance entre deux réels ★

Calcule la distance entre les deux nombres, puis traduis les deux dernières phrases avec une valeur absolue.

a) $|3 - (-5)| = |3 + 5| = |8| = 8$

b) $|-2 - (-9)| = |-2 + 9| = |7| = 7$

c) $\left|\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right| = \left|\dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{4}\right| = \left|\dfrac{5}{4}\right| = \dfrac{5}{4}$

d) $|-1{,}5 - 2{,}3| = |-3{,}8| = 3{,}8$

e) $\left|\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\right| = \left|\sqrt{2} + \sqrt{2}\right| = \left|2\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}$

f) $\pi \approx 3{,}14 > 3$, donc $\pi - 3 > 0$: on garde le nombre tel quel.
$|\pi - 3| = \pi - 3$

g) La distance entre x et 5 s'écrit $|x - 5|$.
$|x - 5| = 3$

h) La distance entre x et -2 s'écrit $|x-(-2)| = |x+2|$.
« Au plus » : $\leqslant$.
$|x+2| \leqslant 1$

Exercice 3 – Centre et rayon ★

Écris chaque intervalle sous la forme $|x-a| \leqslant r$ (ou $< r$), puis chaque inégalité sous la forme d'un intervalle.

a) Centre, le milieu : $\dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.
Rayon, la moitié de la longueur : $\dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.
Crochets fermés : inégalité large.
$|x-3| \leqslant 2$

b) Centre, le milieu : $\dfrac{-1+9}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
Rayon, la moitié de la longueur : $\dfrac{9-(-1)}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$.
Crochets fermés : inégalité large.
$|x-4| \leqslant 5$

c) Centre, le milieu : $\dfrac{-7+(-1)}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$.
Rayon, la moitié de la longueur : $\dfrac{-1-(-7)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.
Crochets fermés : inégalité large.
$x-(-4) = x+4$.
$|x+4| \leqslant 3$

d) Centre, le milieu : $\dfrac{-2{,}5+0{,}5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$.
Rayon, la moitié de la longueur : $\dfrac{0{,}5-(-2{,}5)}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.
Crochets ouverts : inégalité stricte.
$x-(-1) = x+1$.
$|x+1| < 1{,}5$

e) $|x-2|$: distance de x à 2, au plus 3.
Bornes : $2-3=-1$ et $2+3=5$.
Les solutions sont entre les bornes, bornes comprises (crochets fermés).
$S = [-1\,;\,5]$

f) $|x+1| = |x-(-1)|$: distance de x à -1, au plus 4.
Bornes : $-1-4=-5$ et $-1+4=3$.
Les solutions sont entre les bornes, bornes comprises (crochets fermés).
$S = [-5\,;\,3]$

g) $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$: distance de x à $\dfrac{1}{2}$, strictement inférieure à $\dfrac{1}{4}$.
Bornes : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.
Les solutions sont entre les bornes, bornes exclues (crochets ouverts).
$S = \left]\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{3}{4}\right[$

h) $|x|$: distance de x à 0, au plus 3.
Bornes : $0-3=-3$ et $0+3=3$.
Les solutions sont entre les bornes, bornes comprises (crochets fermés).
$S=[-3\,;\,3]$

Exercice 4 – Équations ★★

Résous dans $\mathbb{R}$ en lisant une distance.

a) $|x-2|$: distance de x à 2, égale à 5.
x est à 5 de 2, à gauche ou à droite.
$x=2-5=-3$ ou $x=2+5=7$.
$S=\{-3\,;\,7\}$

b) $|x+1|=|x-(-1)|$: distance de x à -1, égale à 3.
x est à 3 de -1, à gauche ou à droite.
$x=-1-3=-4$ ou $x=-1+3=2$.
$S=\{-4\,;\,2\}$

c) $|x|$: distance de x à 0, égale à $2{,}5$.
x est à $2{,}5$ de 0, à gauche ou à droite.
$x=0-2{,}5=-2{,}5$ ou $x=0+2{,}5=2{,}5$.
$S=\{-2{,}5\,;\,2{,}5\}$

d) La distance de x à 4 est nulle : $x=4$.
$S=\{4\}$

e) Une distance n'est jamais négative : elle ne peut pas valoir -1.
$S=\varnothing$

f) $|2-x|=|x-2|$: distance de x à 2, égale à 6.
x est à 6 de 2, à gauche ou à droite.
$x=2-6=-4$ ou $x=2+6=8$.
$S=\{-4\,;\,8\}$

g) $\left|x-\dfrac{1}{3}\right|$: distance de x à $\dfrac{1}{3}$, égale à $\dfrac{2}{3}$.
x est à $\dfrac{2}{3}$ de $\dfrac{1}{3}$, à gauche ou à droite.
$x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1$.
$S=\left\{-\dfrac{1}{3}\,;\,1\right\}$

h) $\left|x+\sqrt{2}\right|=\left|x-(-\sqrt{2})\right|$: distance de x à $-\sqrt{2}$, égale à $\sqrt{2}$.
x est à $\sqrt{2}$ de $-\sqrt{2}$, à gauche ou à droite.
$x=-\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$.
$S=\left\{-2\sqrt{2}\,;\,0\right\}$

Exercice 5 – Inéquations ★★

Résous dans $\mathbb{R}$. Donne S avec un intervalle, une réunion ou $\varnothing$.

a) $|x-3|$: distance de x à 3, au plus 2.
Bornes : $3-2=1$ et $3+2=5$.
Les solutions sont entre les bornes, bornes comprises (crochets fermés).
$S=[1\,;\,5]$

b) $|x+2|=|x-(-2)|$: distance de x à -2, strictement inférieure à 3.
Bornes : $-2-3=-5$ et $-2+3=1$.
Les solutions sont entre les bornes, bornes exclues (crochets ouverts).
$S=]-5\,;\,1[$

c) $|x-1|$: distance de x à 1, strictement supérieure à 4.
Bornes : $1-4=-3$ et $1+4=5$.
Les solutions sont à l'extérieur des bornes, bornes exclues.
$S=]-\infty\,;\,-3[\cup]5\,;\,+\infty[$

d) $|x+4|=|x-(-4)|$: distance de x à -4, au moins 1.
Bornes : $-4-1=-5$ et $-4+1=-3$.
Les solutions sont à l'extérieur des bornes, bornes comprises.
$S=]-\infty\,;\,-5]\cup[-3\,;\,+\infty[$

e) $|x|$ est la distance de x à 0 : elle doit être strictement positive.
Seul 0 est à distance nulle de 0 : on enlève 0.
$S=]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$

f) Une distance est toujours positive ou nulle.
Elle n'est donc jamais strictement inférieure à -2.
$S=\varnothing$

g) $|x-6|$: distance de x à 6, au plus 0,5.
Bornes : $6-0{,}5=5{,}5$ et $6+0{,}5=6{,}5$.
Les solutions sont entre les bornes, bornes comprises (crochets fermés).
$S=[5{,}5\,;\,6{,}5]$

Exercice 6 – Traduire ★★

Traduis avec une valeur absolue, puis donne l'ensemble des x correspondants s'il n'est pas déjà écrit.

a) Centre : $\dfrac{2+10}{2}=6$.
Rayon : $\dfrac{10-2}{2}=4$.
Crochets fermés : inégalité large.
$|x-6|\leqslant 4$

b) Centre : $\dfrac{-6+0}{2}=-3$.
Rayon : $\dfrac{0-(-6)}{2}=3$.
Crochets ouverts : inégalité stricte.
$|x-(-3)|<3$, soit $|x+3|<3$

c) C'est tout ce qui est hors de $]-1\,;\,7[$.
Centre : $\dfrac{-1+7}{2} = 3$.
Rayon : $\dfrac{7-(-1)}{2} = 4$.
x est à au moins 4 de 3 (bornes comprises) : $|x-3| \geqslant 4$

d) La distance entre x et π s'écrit $|x-\pi|$; « au plus » : $\leqslant$.
$|x-\pi| \leqslant 0{,}1$
Bornes : $\pi - 0{,}1$ et $\pi + 0{,}1$, comprises.
$x \in [\pi - 0{,}1\,;\,\pi + 0{,}1]$

e) La distance entre x et -1 s'écrit $|x-(-1)| = |x+1|$; « plus de » : $>$.
$|x+1| > 2$
Bornes : $-1-2=-3$ et $-1+2=1$; on garde l'extérieur, bornes exclues.
$x \in]-\infty\,;\,-3[\cup]1\,;\,+\infty[$

f) Centre : $\dfrac{1{,}41+1{,}42}{2} = \dfrac{2{,}83}{2} = 1{,}415$.
Rayon : $\dfrac{1{,}42-1{,}41}{2} = \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}005$.
$|\sqrt{2} - 1{,}415| \leqslant 0{,}005$

Exercice 7 – La tolérance ★★★

1. « À 0,2 mm près » : la distance entre L et 25 est au plus 0,2.
   $|L-25| \leqslant 0{,}2$

2. Centre 25, rayon 0,2 : $25-0{,}2 \leqslant L \leqslant 25+0{,}2$.
   Soit $24{,}8 \leqslant L \leqslant 25{,}2$: $L \in [24{,}8\,;\,25{,}2]$ (en mm).

3. On calcule l'écart de chaque pièce avec 25.
   $|24{,}79-25| = |-0{,}21| = 0{,}21 > 0{,}2$: refusée.
   $|25{,}2-25| = 0{,}2 \leqslant 0{,}2$: acceptée (inégalité large).
   $|25{,}03-25| = 0{,}03 \leqslant 0{,}2$: acceptée.
   Les pièces de 25,2 mm et de 25,03 mm sont acceptées.

4. Centre : $\dfrac{24{,}9+25{,}3}{2} = \dfrac{50{,}2}{2} = 25{,}1$.
   Rayon : $\dfrac{25{,}3-24{,}9}{2} = \dfrac{0{,}4}{2} = 0{,}2$.
   Non : une pièce de 25,3 mm est à $25{,}3-25 = 0{,}3$ mm de 25, et $0{,}3 > 0{,}2$: elle est refusée.
   La machine a le bon rayon, mais elle est mal centrée (25,1 au lieu de 25).

Exercice 8 – Distances sur la droite ★★★

1. $|x-2|$ est la distance de x à 2, $|x+4|$ celle de x à -4.
   Le réel à égale distance des deux est leur milieu : $x = \dfrac{2+(-4)}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$.
   Vérification : $|-1-2| = 3$ et $|-1+4| = 3$.
   $S = \{-1\}$

2. $|x-1| \leqslant 3$: centre 1, rayon 3, bornes $1-3=-2$ et $1+3=4$ comprises.
   $|x-1| \leqslant 3 \iff x \in [-2\,;\,4]$
   $|x+2| > 1$: centre -2, rayon 1, bornes $-2-1=-3$ et $-2+1=-1$; on garde l'extérieur.
   $|x+2| > 1 \iff x \in]-\infty\,;\,-3[\cup]-1\,;\,+\infty[$
   « Et » : on garde les x de $[-2\,;\,4]$ qui sont aussi dans la réunion.
   Aucun n'est inférieur à -3 ; ceux qui sont supérieurs à -1 vont jusqu'à 4.
   $S =]-1\,;\,4]$

3. Centre 3, rayon 1 : $3-1 \leqslant x \leqslant 3+1$, soit $2 \leqslant x \leqslant 4$.
   On multiplie par $2>0$, le sens est conservé : $4 \leqslant 2x \leqslant 8$.
   On ajoute 1 : $5 \leqslant 2x+1 \leqslant 9$.
   Centre : $\dfrac{5+9}{2} = 7$.
   Rayon : $\dfrac{9-5}{2} = 2$.
   $|2x+1-7| \leqslant 2$, soit $|2x-6| \leqslant 2$.

4. Faux.
   Un contre-exemple suffit : $a=1$ et $b=-1$.
   $|a+b| = |1+(-1)| = |0| = 0$.
   $|a|+|b| = |1|+|-1| = 1+1 = 2$.
   $0 \neq 2$: l'égalité est fausse.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Le centre est* -6.
$|x+6| = |x-(-6)|$: distance de x à -6.
$x = -6-2 = -8$ ou $x = -6+2 = -4$.

b) *Il y a deux solutions.*
x est à 4 de 3, à gauche ou à droite.
$x = 3-4 = -1$ ou $x = 3+4 = 7$.
$S = \{-1\,;\,7\}$

c) *On calcule d'abord entre les barres.*
$|3-7| = |-4| = 4$.

d) $\sqrt{2}-3 < 0$.
$\sqrt{2} \approx 1{,}41 < 3$: le nombre entre les barres est négatif, on prend son opposé.
$|\sqrt{2}-3| = -(\sqrt{2}-3) = 3-\sqrt{2}$

e) *Inégalité large : crochets fermés.*
Centre 1, rayon 2 : bornes $1-2=-1$ et $1+2=3$, comprises.
$S = [-1\,;\,3]$

f) *Le rayon est la moitié de la longueur.*
6 est la longueur : $8-2=6$.
Rayon : $\dfrac{8-2}{2} = 3$.
$|x-5| \leqslant 3$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $|\sqrt{3}-2|$ est égal à :

Réponse C : $2-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}\approx 1{,}73<2$: le nombre entre les barres est négatif.

2. Les solutions de $|x+3|=2$ sont :

Réponse A : -5 et -1
Distance de x à -3 égale à 2 : $-3-2$ et $-3+2$.

3. $|x-1|\leqslant 4$ équivaut à :

Réponse D : $x\in[-3\,;\,5]$
Centre 1, rayon 4 : $[1-4\,;\,1+4]$.

4. $x\in[-2\,;\,6]$ équivaut à :

Réponse B : $|x-2|\leqslant 4$
Centre $\dfrac{-2+6}{2}=2$, rayon $\dfrac{6-(-2)}{2}=4$.

5. La distance entre -7 et 2 est :

Réponse D : 9
$|-7-2|=|-9|=9$.

6. L'ensemble des solutions de $|x-2|>1$ est :

Réponse A : $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[$
Plus loin que 1 de 2 : à gauche de 1 ou à droite de 3, bornes exclues.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).