48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 1re : cercle trigonométrique, valeurs remarquables, angles associés*

À retenir : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ mais $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$; $\sin(x + \pi) = -\sin x$. Mesure principale dans $]-\pi\,;\,\pi]$, signe lu sur le quadrant. Ex. : $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ex. 1 ★☆☆ **Radians, degrés et mesure principale** — On rappelle que π rad $= 180°$. La mesure principale d'un réel est l'unique réel de $]-\pi\,;\,\pi]$ qui a la même image sur le cercle trigonométrique.

(a) Convertis $150°$ en radians.

(b) Convertis $\frac{7\pi}{12}$ rad en degrés.

(c) Donne la mesure principale de $\frac{23\pi}{6}$.

(d) Donne la mesure principale de $-\frac{13\pi}{4}$.

(e) Le point M du cercle trigonométrique est associé à $\frac{31\pi}{3}$. Donne le réel de $]-\pi\,;\,\pi]$ associé à M, puis sa mesure en degrés.

(f) Sami affirme : « la mesure principale de 15π est $-\pi$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Valeurs exactes par les angles associés** — Donne la valeur exacte en écrivant d'abord le réel sous la forme $\pi \pm a$, $-a$ ou $a + 2k\pi$ avec a dans le tableau des valeurs remarquables.

(a) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (b) $\sin\frac{3\pi}{4}$ (c) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

(d) $\sin\frac{7\pi}{6}$ (e) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ (f) $\cos\frac{11\pi}{3}$

Ex. 3 ★★☆ **Simplifier avec les angles associés** — Pour tout réel x, on pose $A(x) = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\sin(x + \pi)$ et $B(x) = \cos(\pi - x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

(a) Simplifie $A(x)$ en fonction de $\sin x$.

(b) Simplifie $B(x)$.

(c) Déduis-en la valeur exacte de $A\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

(d) Résous dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $A(x) = 2\sqrt{2}$.

Ex. 4 ★★☆ **Du cosinus au sinus** — Soit x un réel de $[-\pi\,;\,0]$ tel que $\cos x = -\frac{3}{5}$.

(a) Justifie que $\sin x < 0$.

(b) Calcule la valeur exacte de $\sin x$.

(c) Déduis-en $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi + x)$.

Ex. 4 (suite)

(d) Noé écrit : « $\cos(2x) = 2\cos x = -\frac{6}{5}$ ». Sans calculer $\cos(2x)$, démontre qu'il a tort.

Ex. 5 ★★☆ **Vrai ou faux sur le cercle** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie (contre-exemple si elle est fausse).

(a) Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

(b) Si $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$, alors $\cos x \times \sin x < 0$.

(c) $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$.

(d) Un angle de 1 radian mesure moins de $60°$.

(e) Pour tout réel x, $\sin(x + \pi) + \sin x = 0$.

Ex. 6 ★★★ **Sommes cachées sur le cercle** — On s'intéresse à des sommes de cosinus et de sinus de multiples de $\frac{\pi}{9}$ et de $\frac{\pi}{12}$. Aucune valeur approchée n'est attendue.

(a) Justifie que $\cos\frac{8\pi}{9} = -\cos\frac{\pi}{9}$, puis calcule $S = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{8\pi}{9}$.

(b) Calcule $W = \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{3\pi}{9} + \cdots + \sin\frac{17\pi}{9}$ en regroupant les termes deux par deux.

(c) Calcule $U = \cos^2 0 + \cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{2\pi}{12} + \cdots + \cos^2\frac{6\pi}{12}$.

(d) Déduis-en $V = \sin^2 0 + \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{2\pi}{12} + \cdots + \sin^2\frac{6\pi}{12}$ sans calculer aucun de ses termes.

Ex. 7 ★★★ **Une somme pour retrouver le point** — Soit x un réel de $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ tel que $\cos x + \sin x = \frac{7}{13}$. On note $c = \cos x$ et $s = \sin x$.

(a) En exprimant s en fonction de c, démontre que c est solution d'une équation du second degré, que tu écriras avec des coefficients entiers.

(b) Résous cette équation, puis déduis-en c et s en justifiant ton choix à l'aide de l'intervalle.

(c) Nadia écrit : « $\sin(\pi - x) = -\sin x$, donc le point associé à $\pi - x$ est sous l'axe des abscisses ». Corrige son erreur, puis calcule $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x)$.

(d) Calcule la valeur exacte de $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x + \pi) + \cos(x - 5\pi)$.

Ex. 8 ★★★ **La nacelle de Malo** — Une grande roue a un rayon de 20 m et son centre est à 22 m du sol. La nacelle de Malo est repérée par le point du cercle trigonométrique associé au réel θ ; sa hauteur est alors $h = 22 + 20\sin\theta$ (en m). Au départ, $\theta = 0$, et la roue tourne dans le sens direct de $15°$ par minute.

(a) Justifie qu'après t minutes, $\theta = \frac{\pi t}{12}$ (en radians), puis donne la durée d'un tour complet.

(b) Calcule la hauteur exacte de la nacelle après 10 minutes, puis après 18 minutes.

(c) Après 38 minutes, détermine la mesure principale de θ, puis la hauteur de la nacelle.

(d) Inès affirme : « Après 16 min, la nacelle est deux fois plus loin de la hauteur du centre qu'après 8 min. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Détermine les instants t de $[0\,;\,24]$ où la nacelle est à $22 - 10\sqrt{2}$ m du sol.

2. *Parité et périodicité*

À retenir : Paire : $f(-x) = f(x)$ pour tout x d'un domaine symétrique ; impaire : $f(-x) = -f(x)$. Un contre-exemple suffit pour le nier. $\cos(\omega x + \varphi)$ a pour période $\frac{2\pi}{\omega}$: $\cos(4x)$ donne $\frac{\pi}{2}$, pas 8π.

Ex. 9 ★☆☆ **Parité : calculs directs** — Toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontre que $f(x) = x\sin x$ est paire.

(b) Étudie la parité de $g(x) = x^2\sin x$.

(c) Pour $h(x) = \cos x + \sin x$, calcule $h\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $h\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Déduis-en que h n'est ni paire ni impaire.

(d) Étudie la parité de $k(x) = 4 - \cos(2x)$.

(e) Une fonction impaire m vérifie $m\left(\frac{\pi}{7}\right) = -3$. Donne $m\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

(f) Quelle symétrie possède la courbe de $q(x) = \sin x \times \cos x$? Justifie.

Ex. 10 ★☆☆ **Périodes : calculs directs**

(a) Donne la période de $x \mapsto \cos(7x)$.

(b) On pose $f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$. Donne sa période T, puis vérifie-la en calculant $f(x + T)$.

(c) Trouve le réel $\omega > 0$ tel que $x \mapsto \sin(\omega x)$ ait pour période 6π.

(d) Démontre que 4 est une période de $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2} + 1\right)$.

(e) Une fonction g a pour période $\frac{\pi}{2}$ et vérifie $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3$. Calcule $g\left(\frac{17\pi}{8}\right)$.

Ex. 11 ★★☆ **La copie d'Inès** — Inès écrit : « $f(x) = \cos(3x)$ a pour période $3 \times 2\pi = 6\pi$. De plus, $\sin(0 + \pi) = \sin 0$, donc π est une période de la fonction sinus. »

(a) Détermine la période de f en justifiant par un calcul. Quelle erreur Inès a-t-elle commise ?

(b) Calcule $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$ et $\sin\frac{\pi}{2}$. Que penses-tu de la deuxième affirmation d'Inès ? Justifie.

(c) Démontre que π est en revanche une période de $g(x) = \sin^2 x$.

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux sur les symétries** — Vrai ou faux ? Justifie.

(a) La fonction $g(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$, définie sur $\mathbb{R}$, a pour période $\frac{2\pi}{3}$.

(b) 2π est une période de cette fonction g.

(c) La courbe de $u(x) = \frac{\sin x}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(d) $v(x) = \sin x + 1$ est impaire sur $\mathbb{R}$, puisque sinus est impaire.

(e) La fonction w définie sur $[-\pi\,;\,2\pi]$ par $w(x) = \cos x$ est paire.

Ex. 13 ★★☆ **Réduire l'intervalle d'étude** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

(a) Démontre que f est périodique de période 2π.

(b) Démontre que f est paire. Quelle symétrie possède sa courbe ?

(c) Explique pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0\,;\,\pi]$.

(d) Calcule $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, puis déduis-en, sans nouveau calcul de cosinus, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

Ex. 14 ★★★ **Deux notes superposées** — Noé joue deux notes en même temps sur son synthétiseur. Le signal obtenu est modélisé par la fonction s définie sur $\mathbb{R}$ par $s(t) = \sin(4t) + \sin(6t)$.

(a) Donne la période de $t \mapsto \sin(4t)$ et celle de $t \mapsto \sin(6t)$.

(b) Démontre que s est périodique de période π.

(c) Calcule $s\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $s\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. Déduis-en que $\frac{\pi}{2}$ n'est pas une période de s.

(d) Démontre que s est impaire. Quelle symétrie sa courbe présente-t-elle ?

(e) Justifie qu'il suffit d'étudier s sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Calcule $s\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis déduis-en $s\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ sans autre calcul.

Ex. 15 ★★★ **Le tri de Malik** — Malik doit classer des fonctions en trois catégories : paires, impaires, ni paires ni impaires. Il te demande de vérifier son travail.

(a) Soit $g(x) = \sin x \times \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$. Étudie la parité de g et donne la symétrie de sa courbe.

Ex. 15 **(suite)**

(b) Soit $f(x) = x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$. Démontre que f n'est ni paire ni impaire.

(c) Malik écrit : « $k(x) = x\cos x$ est paire sur $\mathbb{R}$, car cos est paire. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Malik écrit : « $m(x) = \frac{\cos x}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, est paire car cos est paire. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) On pose $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $q(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, avec f de la question 2. Simplifie $p(x)$ et $q(x)$, puis étudie leur parité.

Ex. 16 ★★★ **La cabine de la grande roue** — Léa monte dans une grande roue. La hauteur de sa cabine, en mètres, t minutes après le départ, est $h(t) = 22 - 20\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$ pour $t \geqslant 0$.

(a) Démontre que $h(t+10) = h(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. Interprète ce résultat pour Léa.

(b) Démontre que $h(10-t) = h(t)$ pour tout $t \in [0\,;\,10]$. Interprète ce résultat.

(c) Calcule $h\left(\frac{5}{3}\right)$, puis déduis-en sans calcul $h\left(\frac{25}{3}\right)$ et $h\left(\frac{35}{3}\right)$.

(d) Étudie le sens de variation de h sur $[0\,;\,5]$, puis déduis-en son tableau de variations sur $[0\,;\,10]$.

(e) Pendant les 20 premières minutes, à quels instants la cabine est-elle à 32 m de haut ?

3. *Dériver sin et cos, sin(ax + b) et cos(ax + b)*

À retenir : $(\sin u)' = u'\cos u$ et $(\cos u)' = -u'\sin u$. Exemple : $(\cos(4x))' = -4\sin(4x)$, sans oublier le signe moins ni le facteur 4. $(\sin^2 x)' = 2\cos x \sin x$. Enfin, $\frac{\sin x}{x} \to 1$ en 0, car c'est le nombre dérivé de sin en 0.

Ex. 17 ★☆☆ **Dériver sans perdre le signe ni le facteur** — Chaque fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.

(a) $f(x) = 4\cos x - 7\sin x$ (b) $f(x) = x^3 + 2\cos x$

(c) $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{6})$ (d) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$

(e) $f(x) = \cos(3x) - \sin x$

Ex. 18 ★☆☆ **Nombres dérivés en valeurs exactes** — Chaque fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Calcule la valeur exacte du nombre dérivé demandé.

(a) $f(x) = 2\sin x$: calcule $f'(\frac{\pi}{6})$.

(b) $f(x) = 5x - \cos x$: calcule $f'(\frac{2\pi}{3})$.

(c) $f(x) = \cos(2x)$: calcule $f'(\frac{\pi}{8})$.

(d) $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{2})$: calcule $f'(\frac{\pi}{9})$.

(e) $f(x) = 4\cos x + x^2$: calcule $f'(\pi)$.

Ex. 19 ★★☆ **Les dérivées d'Inès** — Inès a dérivé des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Pour chaque égalité, dis si elle a raison et justifie. Si elle se trompe, corrige.

(a) Inès écrit : $(\cos(5x))' = 5\sin(5x)$.

(b) Inès écrit : $(\sin(x^2))' = \cos(2x)$.

(c) Inès écrit : $(\sin(\pi - 3x))' = -3\cos(\pi - 3x)$.

(d) Inès écrit : $(\cos^2 x)' = -2\sin x$.

(e) Inès écrit : $(x^2\sin x)' = 2x\cos x$.

Ex. 20 ★★☆ **Un quotient avec sinus et cosinus** — Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

(a) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Calcule $f'(x)$, puis simplifie le numérateur à l'aide de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(c) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$.

(d) Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;\,\pi]$, avec les valeurs exactes.

Ex. 21 ★★☆ **Tangentes en valeurs exactes** — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(2x) + \cos x$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Calcule $g'(x)$.

(b) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$, avec des valeurs exactes.

(c) Lina affirme que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ a pour coefficient directeur -2. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 22 ★★★ **Des limites calculées avec un nombre dérivé** — Dans tout l'exercice, tu utilises ce résultat : si une fonction φ est dérivable en a, alors $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$ tend vers $\varphi'(a)$ quand x tend vers a.

(a) Écris le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x (avec $x \neq 0$). Déduis-en $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

(b) Léo affirme : « $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{x} = 1$, car $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 ». A-t-il raison ? Justifie à l'aide de $g(x) = \sin(7x)$.

(c) Soit $k(x) = 3\sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$. Calcule $k'(x)$. Déduis-en $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{3\sin^2 x - \frac{3}{4}}{x-\frac{\pi}{6}}$.

(d) Soit $h(x) = \cos(6x)$. Calcule $h'(x)$, puis déduis-en $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}}\frac{\cos(6x)}{x-\frac{\pi}{12}}$.

Ex. 23 ★★★ **Les tangentes qui passent par l'origine** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère d'origine O. Sur sa calculatrice, Nora remarque que plusieurs tangentes à $\mathcal{C}$ semblent passer par O.

(a) Calcule $f'(x)$.

(b) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$. Donne les coefficients en valeurs exactes.

(c) Démontre que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont parallèles.

Ex. 23 **(suite)**

(d) Soit a un réel. Démontre que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a passe par O si et seulement si $a^2 \sin a = 0$.

(e) Déduis-en les abscisses de tous les points où la tangente passe par O. Donne une équation de chacune de ces tangentes.

Ex. 24 ★★★ **Un quotient et ses tangentes horizontales** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$; on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Calcule $f'(x)$, puis factorise son numérateur par $\sin x$ à l'aide de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(b) Résous l'équation $f'(x) = 0$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

(c) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$. Dresse le tableau de variations de f et donne ses extremums.

(d) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

(e) Soit $g(x) = \frac{\cos(3x)}{1+\sin^2(3x)}$. Ali affirme que $g'(x) = f'(3x)$. A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $g'(\frac{\pi}{6})$.

4. *Variations et courbes de sin et cos*

À retenir : sin croît sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$ et cos décroît sur $[0\,;\,\pi]$: un sens de variation se donne sur un intervalle, jamais sur $\mathbb{R}$. Si $b < 0$, $a + b\sin x$ varie en sens inverse de sin : $1 - 4\sin x$ décroît sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

Ex. 25 ★☆☆ **Sens de variation sur un intervalle** — Dis si la fonction est croissante, décroissante ou ni l'une ni l'autre sur l'intervalle indiqué. Donne ses valeurs aux bornes.

(a) cos sur $[2\pi\,;\,3\pi]$.

(b) sin sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

(c) sin sur $[0\,;\,\pi]$.

(d) cos sur $[\pi\,;\,2\pi]$.

(e) sin sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(f) cos sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Ex. 26 ★☆☆ **Encadrer et trouver les extremums** — Pour tout réel x, encadre l'expression grâce à $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ ou $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Donne ensuite son maximum, son minimum et un réel où chacun est atteint.

(a) $f(x) = 4 + 3\sin x$.

(b) $g(x) = 6 - 4\sin x$.

(c) $h(x) = -1 + \frac{1}{2}\cos x$.

(d) $k(x) = 5 - 7\cos x$.

(e) $m(x) = 2\sin x - 9$. Déduis-en aussi le signe de $m(x)$.

Ex. 27 ★★☆ **L'erreur de Léo** — On pose $f(x) = 2 - 3\sin x$ sur $[0\,;\,\pi]$. Léo écrit : « sin est croissante sur $[0\,;\,\pi]$, donc f est croissante sur $[0\,;\,\pi]$. »

(a) Repère les deux erreurs dans le raisonnement de Léo.

(b) Calcule $f'(x)$ et étudie son signe sur $[0\,;\,\pi]$ seulement.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;\,\pi]$ avec les valeurs exactes.

(d) Donne le maximum et le minimum de f sur $[0\,;\,\pi]$ et les réels où ils sont atteints.

Ex. 28 ★★☆ **Une période, puis la suivante** — On pose $f(x) = 3 + \cos(2x)$ pour tout réel x.

(a) Démontre que $f(x + \pi) = f(x)$ pour tout réel x.

(b) Démontre que f est paire.

(c) Calcule $f'(x)$ et étudie son signe sur $[0\,;\,\pi]$.

(d) Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;\,\pi]$, puis déduis-en ses variations sur $[\pi\,;\,2\pi]$.

Ex. 29 ★★☆ **Température d'une journée** — Un jour de printemps à Annecy, Nadia modélise la température (en °C) par $T(t) = 14 - 6\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, où $t \in [0\,;\,24]$ est le temps en heures depuis minuit.

(a) Calcule la température à 6 h puis à 18 h.

(b) Calcule $T'(t)$ et étudie son signe sur $[0\,;\,24]$.

(c) Dresse le tableau de variations de T sur $[0\,;\,24]$ avec les valeurs exactes.

(d) Donne les températures maximale et minimale, leurs heures, puis l'écart entre les deux.

Ex. 30 ★★★ **Une sinusoïde renversée** — On pose $f(x) = 1 - 2\sin x$ pour tout réel x.

(a) Démontre que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout réel x. Que peux-tu en déduire pour l'étude de f ?

(b) Calcule $f'(x)$. Étudie ensuite son signe sur $[-\pi\,;\,\pi]$, en lisant le cercle trigonométrique.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$, avec les valeurs exactes. Donne le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

(d) Déduis-en les variations de f sur $[\pi\,;\,3\pi]$, avec les valeurs aux bornes de chaque intervalle.

(e) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $[-\pi\,;\,\pi]$. Calcule-les.

Ex. 31 ★★★ **La marée au port de Granville** — Yanis, skipper, modélise la hauteur d'eau (en m) dans le port par $h(t) = 4{,}5 + 2{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$. Ici t est le temps en heures écoulé depuis minuit. On étudie d'abord $t \in [0\,;\,12]$.

(a) Démontre que $h(t + 12) = h(t)$ pour tout réel t. Interprète ce résultat.

(b) Calcule $h'(t)$. Étudie son signe sur $[0\,;\,12]$ seulement, en posant $u = \frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}$.

Ex. 31 (suite)

(c) Dresse le tableau de variations de h sur $[0\,;\,12]$. Donne les heures et les hauteurs de pleine mer et de basse mer.

(d) Le port est fermé quand la hauteur d'eau est inférieure ou égale à 3,25 m. Détermine les périodes de fermeture entre 0 h et 12 h.

(e) Déduis-en l'heure de la pleine mer qui suit $t = 12$ et la hauteur d'eau à ce moment.

Ex. 32 ★★★ **Le cosinus au-dessus d'une parabole** — On admet que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$. On pose $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ pour tout réel x.

(a) Démontre que g est paire.

(b) Calcule $g'(x)$. Déduis-en le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

(c) Démontre que $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout réel x, et pas seulement pour $x \geqslant 0$.

(d) Déduis-en un encadrement de $\cos(0{,}2)$ par deux nombres décimaux, sans calculatrice.

(e) Inès affirme : « La parabole $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ décroît sur $[0\,;\,+\infty[$. Le cosinus reste au-dessus, donc il décroît aussi sur $[0\,;\,+\infty[$. » Vrai ou faux ? Justifie.

5. *Équations et inéquations trigonométriques*

À retenir : $\cos x = \cos\alpha \iff x = \pm\alpha + 2k\pi$; $\sin x = \sin\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ (pas $-\alpha$). Si $|a| > 1$: aucune solution. On divise aussi $2k\pi$: $\cos(2x) = -1 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ex. 33 ★☆☆ **Équations sur $\mathbb{R}$** — Résous chaque équation dans $\mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\cos x = 0$

(d) $3\cos x + 4 = 0$ (e) $\sin x = -1$ (f) $2\sin x = \sqrt{2}$

Ex. 34 ★☆☆ **Solutions sur un intervalle** — Résous chaque équation sur l'intervalle indiqué. Précise les valeurs de k que tu gardes.

(a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$

(b) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$

(c) $2\sin x + 1 = 0$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$

(d) $\cos x = -1$ sur $[0\,;\,2\pi[$

(e) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ sur $[0\,;\,2\pi[$

(f) $\sin x = 0$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$

Ex. 35 ★★☆ **L'erreur de Noé** — Pour résoudre $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$, Noé écrit : « $2x = \frac{\pi}{3}$ ou $2x = -\frac{\pi}{3}$, donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. » Noé obtient ainsi deux solutions sur cet intervalle.

(a) Repère l'erreur de Noé et explique-la.

(b) Résous correctement $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Déduis-en l'ensemble des solutions sur $[0\,;\,2\pi[$.

(d) Combien de solutions manquent dans la réponse de Noé ? Justifie.

Ex. 36 ★★☆ **Un second degré en sinus** — On considère l'équation (E) : $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

(a) On pose $X = \sin x$. Résous $2X^2 + X - 1 = 0$.

(b) Déduis-en les solutions de (E) sur $[0\,;\,2\pi[$.

(c) Vérifie par le calcul que la plus grande solution trouvée vérifie (E).

(d) L'équation $2\sin^2 x + 3\sin x - 5 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? Justifie et donne-les s'il y en a.

Ex. 37 ★★☆ **Inéquations lues sur le cercle** — Pour chaque inéquation, décris en mots où se trouve le point M associé au réel x sur le cercle trigonométrique. Donne ensuite l'ensemble des solutions sur l'intervalle indiqué.

(a) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$

(b) $\sin x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi]$

(c) $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$

(d) $\sin x \geqslant 0$ sur $[0\,;\,2\pi]$

Ex. 38 ★★★ **Le chenal d'Inès** — Dans un port, la hauteur d'eau (en m), t heures après minuit, est $h(t) = 5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ pour $t \in [0\,;\,24]$. Inès, skippeuse, ne peut franchir le chenal que si $h(t) \geqslant 6$. On pose $u = \frac{\pi t}{6}$.

(a) Une affiche annonce que l'eau atteindra 7,5 m aujourd'hui. Inès y croit. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Résous $h(t) = 6$ sur $[0\,;\,24]$. Précise les valeurs de k que tu gardes.

(c) Déduis-en les plages horaires où Inès peut franchir le chenal. Justifie en décrivant en mots la position sur le cercle du point M associé à u.

(d) Résous $h(t) > 4$ sur $[0\,;\,24]$ en justifiant chaque borne (ouverte ou fermée), puis calcule la durée totale pendant laquelle $h(t) > 4$.

Ex. 39 ★★★ **Six solutions et une inéquation** — On considère l'équation (E) : $2\sin(3x) + \sqrt{2} = 0$.

(a) Écris les deux familles de valeurs de $3x$, puis déduis-en les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.

(b) Donne toutes les solutions de (E) sur $[0\,;\,2\pi[$, en précisant les valeurs de k que tu gardes.

Ex. 39 **(suite)**

(c) Vérifie par le calcul que $\frac{23\pi}{12}$ est bien solution de (E).

(d) Résous $\cos x > -\frac{1}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$. Décris en mots la position sur le cercle du point M associé à x.

(e) Parmi les solutions de (E) sur $[0\,;\,2\pi[$, lesquelles vérifient aussi $\cos x > -\frac{1}{2}$? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Une équation de degré 3 en cosinus** — On considère l'équation (E) : $2\cos^3 x - \cos^2 x - 3\cos x = 0$ et l'inéquation (I) : $2\cos^3 x - \cos^2 x - 3\cos x \geqslant 0$, toutes deux sur $]-\pi\,;\,\pi]$. On pose $X = \cos x$.

(a) Factorise $2X^3 - X^2 - 3X$ par X, puis résous $2X^3 - X^2 - 3X = 0$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Résous (E) dans $\mathbb{R}$, puis donne ses solutions sur $]-\pi\,;\,\pi]$ en précisant les valeurs de k.

(c) Lina ajoute $-\pi$ à la liste des solutions de (E). A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Vérifie que $2X^2 - X - 3 = (2X-3)(X+1)$, puis étudie le signe de $2\cos x - 3$ et de $\cos x + 1$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

(e) Résous (I) sur $]-\pi\,;\,\pi]$ en décrivant en mots la position sur le cercle du point M associé à x.

6. *Étudier une fonction trigonométrique*

À retenir : Je factorise $f'(x)$, puis j'étudie le signe de chaque facteur sur l'intervalle, en lisant sur le cercle et pas sur la calculatrice. Attention : $1 + 2\cos x$ s'annule en $\frac{2\pi}{3}$. Je cherche les extremums aux points critiques et aux bornes, en valeur exacte.

Ex. 41 ★☆☆ **Dériver puis factoriser** — Chaque fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Calcule sa dérivée, puis écris-la sous forme factorisée.

(a) $f(x) = 2\sin x - \sin^2 x$ (b) $g(x) = 4x - 8\cos x$

(c) $h(x) = e^{-x}\cos x$ (d) $k(x) = \dfrac{\sin x}{3 + \cos x}$

(e) $q(x) = \cos^2 x - \cos x$ (f) $r(x) = x\sin x + \cos x$

Ex. 42 ★☆☆ **Points où la dérivée s'annule** — On donne la dérivée $f'(x)$ d'une fonction f et un intervalle I. Résous l'équation $f'(x) = 0$ sur I.

(a) $f'(x) = \cos x\,(1 + 2\sin x)$ sur $I = [-\pi\,;\,\pi]$.

(b) $f'(x) = \sqrt{2} - 2\sin x$ sur $I = [0\,;\,2\pi]$.

(c) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$ sur $I = [-\pi\,;\,\pi]$.

(d) $f'(x) = 1 + 2\cos(2x)$ sur $I = [0\,;\,\pi]$.

(e) $f'(x) = 2\cos x\,(\sin x - 1)$ sur $I = [0\,;\,2\pi]$.

(f) $f'(x) = \dfrac{2\cos x + \sqrt{3}}{(2 + \sin x)^2}$ sur $I = [0\,;\,2\pi]$.

Ex. 43 ★★☆ **Vrai ou faux sur le signe de la dérivée** — Vrai ou faux ? Justifie. Si c'est faux, donne un contre-exemple.

(a) « Pour tout réel x de $[0\,;\,\pi]$, $1 + 2\cos x > 0$. »

(b) « Sur $[-\pi\,;\,\pi]$, la dérivée de $w(x) = \sqrt{3}\,x - 2\sin x$ ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{6}$. »

(c) « $p(x) = (x+1)\sin x$ est croissante sur $[0\,;\,\pi]$, car $x + 1 > 0$ et $\sin x \geqslant 0$ sur cet intervalle. »

(d) « La fonction $r(x) = 2x + \cos x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. »

Ex. 44 ★★☆ **L'erreur de Lina** — Lina étudie $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ sur $[0\,;\,\pi]$. Elle trace f' à la calculatrice et conclut : « f croît puis décroît, son maximum vaut $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. »

(a) Démontre que $f(\pi - x) = f(x)$ pour tout réel x. Déduis-en un intervalle d'étude plus petit.

(b) Calcule $f'(x)$ et écris-la sous la forme d'un produit de deux facteurs.

(c) Étudie le signe de chaque facteur sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Dresse le tableau de variations de f sur cet intervalle, avec les valeurs exactes.

(d) Explique les erreurs de Lina. Donne le maximum de f sur $[0\,;\,\pi]$ et précise où il est atteint.

(e) Déduis-en le minimum de f sur $[0\,;\,\pi]$, puis l'encadrement le plus précis possible de $f(x)$ pour $x \in [0\,;\,\pi]$.

Ex. 45 ★★☆ **La gouttière de Noé** — Noé plie une plaque de zinc pour faire une gouttière. Sa section est un trapèze isocèle : un fond de 2 dm et deux bords de 2 dm, chacun incliné d'un angle θ par rapport à la verticale, avec $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. On note $A(\theta)$ l'aire de la section, en dm².

(a) Exprime la hauteur et la largeur du haut du trapèze en fonction de θ. Démontre que $A(\theta) = 4\cos\theta\,(1 + \sin\theta)$.

(b) Calcule $A'(\theta)$ et exprime-la en fonction de $\sin\theta$ seulement. Factorise-la en posant $X = \sin\theta$.

(c) Étudie le signe de $A'(\theta)$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, puis dresse le tableau de variations de A avec les valeurs exactes.

(d) Pour quel angle l'aire est-elle maximale ? Donne cette aire exacte, puis arrondie à 0,01 près. Compare-la aux valeurs aux bornes.

Ex. 46 ★★★ **Type bac : exponentielle et sinus** — On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = e^x \sin x$.

(a) Calcule $f'(x)$ et factorise-la. Déduis-en que $f'(x)$ a le même signe qu'une expression trigonométrique que tu préciseras.

(b) Justifie que $\sin x + \cos x > 0$ pour tout x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Pour x dans $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, démontre que $\sin x + \cos x \geqslant 0 \iff \sin^2 x \geqslant \cos^2 x$.

Ex. 46 **(suite)**

(c) Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$. Dresse le tableau de variations de f avec les valeurs exactes.

(d) Détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 5$ sur $[0\,;\,\pi]$, puis celui de l'équation $f(x) = 8$. Justifie.

Ex. 47 ★★★ **Le maximum d'Ilyes** — On considère la fonction f définie sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$.

(a) Démontre que f est impaire. Déduis-en un intervalle d'étude plus court.

(b) Calcule $f'(x)$, puis résous l'équation $f'(x) = 0$ sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$.

(c) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,2\pi]$ en lisant sur le cercle. Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;\,2\pi]$ avec les valeurs exactes.

(d) Ilyes regarde la courbe de f à la calculatrice et affirme : « Sur $[0\,;\,2\pi]$, le maximum de f est $f(2\pi) = \pi$. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Déduis-en, sans nouvelle étude, le minimum de f sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$ et la valeur de x où il est atteint.

Ex. 48 ★★★ **La lampe de Maëlle** — Maëlle suspend une lampe au-dessus du centre d'une table ronde de rayon 1 m. On note α l'angle entre la table et le rayon lumineux qui atteint le bord de la table. L'éclairement au bord vaut $E(\alpha) = 100 \sin\alpha \times \cos^2\alpha$ (en lux). On étudie E sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Calcule $E(0)$ et $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Justifie que le maximum de E ne peut pas être atteint à une borne.

(b) Calcule $E'(\alpha)$, puis écris-la sous la forme $100\cos\alpha \times (a + b\sin^2\alpha)$, avec a et b des réels à déterminer.

(c) Démontre qu'il existe un unique réel α_0 de $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Étudie le signe de $E'(\alpha)$ et dresse le tableau de variations de E. Donne l'éclairement maximal en valeur exacte, puis arrondi au dixième.

(e) La lampe est à la hauteur h, à la distance d du bord. Justifie que $h = d\sin\alpha$ et $1 = d\cos\alpha$, puis calcule la hauteur optimale.