Terminale spécialité / Fonctions sinus et cosinus — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 1re : cercle trigonométrique, valeurs remarquables, angles associés*

Ex. 1 ★☆☆ Radians, degrés et mesure principale

(a) $150° = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad.

(b) $\frac{7\pi}{12}$ rad $= \frac{7\times 180}{12} = 105°$.

(c) $\frac{23\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 4\pi$ et $-\frac{\pi}{6} \in]-\pi\,;\,\pi]$: la mesure principale est $-\frac{\pi}{6}$.

(d) $-\frac{13\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 4\pi$ et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi\,;\,\pi]$: la mesure principale est $\frac{3\pi}{4}$.

(e) $\frac{31\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 10\pi$: M est associé à $\frac{\pi}{3}$, qui est dans $]-\pi\,;\,\pi]$. En degrés : $\frac{180}{3} = 60°$.

(f) Non. $15\pi = \pi + 14\pi$, donc 15π, π et $-\pi$ ont la même image. Mais $-\pi$ est exclu de $]-\pi\,;\,\pi]$: la mesure principale est π. Sami a tort.

Ex. 2 ★☆☆ Valeurs exactes par les angles associés

(a) $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ donc $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ donc $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) sin est impaire : $\sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(d) $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ donc $\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

(e) cos est paire : $\cos(-\frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6}$. Or $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(f) $\frac{11\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 4\pi$ donc $\cos\frac{11\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ex. 3 ★★☆ Simplifier avec les angles associés

(a) $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.
Donc $A(x) = \sin x + \sin x + 2\sin x = 4\sin x$.

(b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.
Donc $B(x) = -\cos x + \cos x + \cos x = \cos x$.

(c) $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$, donc $A(\frac{11\pi}{6}) = 4\sin(-\frac{\pi}{6}) = -4\sin\frac{\pi}{6} = -4 \times \frac{1}{2} = -2$.

(d) $A(x) = 2\sqrt{2}$ équivaut à $4\sin x = 2\sqrt{2}$, soit $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur $]-\pi\,;\,\pi]$, les points d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont associés à $\frac{\pi}{4}$ et à $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Les solutions sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Ex. 4 ★★★ Du cosinus au sinus

(a) Sur $[-\pi\,;\,0]$, le point associé à x est sur le demi-cercle inférieur, donc $\sin x \leqslant 0$. Comme $\cos x \neq \pm 1$, $x \neq -\pi$ et $x \neq 0$, donc $\sin x < 0$.

(b) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Comme $\sin x < 0$, $\sin x = -\frac{4}{5}$.

(c) $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{3}{5}$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x = \frac{4}{5}$.

(d) Un cosinus est toujours compris entre -1 et 1, or $-\frac{6}{5} < -1$: c'est impossible. Noé a tort, $\cos(2x) \neq 2\cos x$ en général.

Ex. 5 ★★★ Vrai ou faux sur le cercle

(a) Faux. Pour $x = 0$: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ alors que $\cos 0 = 1$. En fait $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$.

(b) Vrai. Le point associé à x est dans le quart de cercle en haut à gauche : $\cos x < 0$ et $\sin x > 0$, donc leur produit est strictement négatif.

(c) Faux. $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ donc $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, et non $\frac{\sqrt{3}}{2}$: le point est dans le quart en bas à gauche.

(d) Vrai. 1 rad $= \frac{180}{\pi}$ degrés $\approx 57{,}3° < 60°$.

(e) Vrai. $\sin(x + \pi) = -\sin x$, donc $\sin(x + \pi) + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$.

Ex. 6 ★★★ Sommes cachées sur le cercle

(a) $\frac{8\pi}{9} = \pi - \frac{\pi}{9}$ et $\cos(\pi - a) = -\cos a$, donc $\cos\frac{8\pi}{9} = -\cos\frac{\pi}{9}$. De même, $\cos\frac{7\pi}{9} = -\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{6\pi}{9} = -\cos\frac{3\pi}{9}$ et $\cos\frac{5\pi}{9} = -\cos\frac{4\pi}{9}$. Les termes s'annulent deux par deux : $S = 0$.

(b) Pour k de 1 à 8 : $\frac{(k+9)\pi}{9} = \frac{k\pi}{9} + \pi$ et $\sin(a + \pi) = -\sin a$, donc $\sin\frac{(k+9)\pi}{9} = -\sin\frac{k\pi}{9}$. On regroupe le terme k avec le terme $k + 9$: chaque paire est nulle. Il reste $\sin\frac{9\pi}{9} = \sin\pi = 0$.
Donc $W = 0$.

(c) $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, donc $\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} = \cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1$. Les autres termes : $\cos^2 0 = 1$, $\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$, $\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, $\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$, $\cos^2\frac{\pi}{2} = 0$.
Donc $U = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{7}{2}$.

(d) Pour tout réel a, $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. U et V portent sur les mêmes 7 réels $\frac{k\pi}{12}$, k de 0 à 6, donc $U + V = 7 \times 1 = 7$. Ainsi $V = 7 - \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$.

Ex. 7 ★★★ **Une somme pour retrouver le point**

(a) $s = \frac{7}{13} - c$ et $c^2 + s^2 = 1$, donc $c^2 + \left(\frac{7}{13} - c\right)^2 = 1$, soit $2c^2 - \frac{14}{13}c + \frac{49}{169} - 1 = 0$. On multiplie par $\frac{169}{2}$: $169c^2 - 91c - 60 = 0$.

(b) $\Delta = 91^2 + 4 \times 169 \times 60 = 8281 + 40560 = 48841 = 221^2$. Les solutions sont $\frac{91+221}{338} = \frac{12}{13}$ et $\frac{91-221}{338} = -\frac{5}{13}$. Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, $\cos x \leqslant 0$, donc $c = -\frac{5}{13}$. Alors $s = \frac{7}{13} + \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$, positif comme attendu sur cet intervalle. Contrôle : $\frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$.

(c) L'erreur : $\sin(\pi - x) = \sin x$, sans signe moins. Le point associé à $\pi - x$ est le symétrique de celui de x par rapport à l'axe des ordonnées : il a la même ordonnée, ici positive.
Donc $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{5}{13}$ et $\sin(\pi - x) = \sin x = \frac{12}{13}$.

(d) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \frac{12}{13}$; $\sin(x + \pi) = -\sin x = -\frac{12}{13}$; $x - 5\pi = (x - \pi) - 4\pi$, donc $\cos(x - 5\pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x = \frac{5}{13}$. Ainsi $A = \frac{12}{13} + \frac{12}{13} + \frac{5}{13} = \frac{29}{13}$.

Ex. 8 ★★★ **La nacelle de Malo**

(a) π rad $= 180°$, donc $15° = \frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ rad. En t minutes, la roue tourne de $t \times \frac{\pi}{12}$, donc $\theta = \frac{\pi t}{12}$. Un tour mesure $360°$, et $\frac{360}{15} = 24$: un tour dure 24 minutes.

(b) Pour $t = 10$: $\theta = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $h = 22 + 10 = 32$ m. Pour $t = 18$: $\theta = \frac{18\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$, donc $\sin\theta = -1$ (point le plus bas) et $h = 22 - 20 = 2$ m.

(c) $\theta = \frac{38\pi}{12} = \frac{19\pi}{6}$. $\frac{19\pi}{6} - 2\pi = \frac{7\pi}{6}$, qui n'est pas dans $]-\pi\,;\,\pi]$. On retire encore 2π : $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$, qui est dans $]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale est $-\frac{5\pi}{6}$.
$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, donc $h = 22 - 10 = 12$ m.

(d) Pour $t = 8$: $\theta = \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'écart à la hauteur du centre est $20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ (au-dessus).
Pour $t = 16$: $\theta = \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'écart est encore $10\sqrt{3}$, mais en dessous. L'écart n'est pas doublé : Inès a tort. Doubler l'angle ne double pas le sinus.

(e) $22 + 20\sin\theta = 22 - 10\sqrt{2}$ équivaut à $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, avec $\theta = \frac{\pi t}{12} \in [0\,;\,2\pi]$. Le point est sous l'axe des abscisses, à la même hauteur que celui de $-\frac{\pi}{4}$: $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ ou $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.
Donc $t = 15$ min ou $t = 21$ min.

2. *Parité et périodicité*

Ex. 9 ★★★ **Parité : calculs directs**

(a) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x : $f(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x) \times (-\sin x) = x\sin x = f(x)$.
Donc f est paire : c'est le produit de deux fonctions impaires.

(b) Pour tout réel x : $g(-x) = (-x)^2\sin(-x) = x^2 \times (-\sin x) = -g(x)$.
Donc g est impaire.

(c) $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
Comme $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq h\left(\frac{\pi}{4}\right)$, h n'est pas paire. Comme $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, h n'est pas impaire.

(d) Pour tout réel x : $k(-x) = 4 - \cos(-2x) = 4 - \cos(2x) = k(x)$, car cosinus est paire.
Donc k est paire.

(e) m est impaire, donc $m\left(-\frac{\pi}{7}\right) = -m\left(\frac{\pi}{7}\right) = -(-3) = 3$.

(f) Pour tout réel x : $q(-x) = \sin(-x) \times \cos(-x) = -\sin x \times \cos x = -q(x)$.
Donc q est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Ex. 10 ★★★ **Périodes : calculs directs**

(a) $\omega = 7$, donc $T = \frac{2\pi}{7}$.

(b) $\omega = 5$, donc $T = \frac{2\pi}{5}$. Vérification : pour tout réel x, $f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$.

(c) $\frac{2\pi}{\omega} = 6\pi$, donc $\omega = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$.

(d) Pour tout réel x : $\cos\left(\frac{\pi(x+4)}{2} + 1\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + 2\pi + 1\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + 1\right)$.
Donc 4 est une période (c'est $\frac{2\pi}{\pi/2}$).

(e) $\frac{17\pi}{8} = \frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{\pi}{8} + 4 \times \frac{\pi}{2}$.
Donc $g\left(\frac{17\pi}{8}\right) = g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3$.

Ex. 11 ★★★ **La copie d'Inès**

(a) $\omega = 3$, donc $T = \frac{2\pi}{3}$: pour tout réel x, $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f(x)$. Il faut diviser 2π par 3, pas multiplier. $6\pi = 9 \times \frac{2\pi}{3}$ est bien aussi une période, mais ce n'est pas LA période (la plus petite) : la courbe se répète déjà tous les $\frac{2\pi}{3}$, soit 9 fois sur un intervalle de longueur 6π.

Ex. 11 **(suite)**

(b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Comme $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) \neq \sin\frac{\pi}{2}$, π n'est pas une période de sinus. Une égalité vraie pour une seule valeur ne suffit pas : il faut $f(x+T) = f(x)$ pour tout x.

(c) Pour tout réel x : $\sin(x+\pi) = -\sin x$, donc $g(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = g(x)$.
Donc π est une période de g.

Ex. 12 ★★☆ **Vrai ou faux sur les symétries**

(a) Faux. $g(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1$ et $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + \sin(2\pi) = -\frac{1}{2}$.
Donc $g\left(0+\frac{2\pi}{3}\right) \neq g(0)$. $\frac{2\pi}{3}$ est la période de $\sin(3x)$ seulement : celle de $\cos(2x)$ est π.

(b) Vrai. Pour tout réel x : $g(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) + \sin(3x+6\pi) = \cos(2x) + \sin(3x) = g(x)$.

(c) Vrai. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \neq 0$: $u(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = u(x)$. u est paire.

(d) Faux. $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ et $v\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \neq -2$. Le « $+1$ » détruit l'imparité.

(e) Faux. L'ensemble $[-\pi\,;\,2\pi]$ n'est pas symétrique par rapport à 0 : 2π y est, mais pas -2π.
Donc $w(-2\pi)$ n'existe pas.

Ex. 13 ★★☆ **Réduire l'intervalle d'étude**

(a) Pour tout réel x : $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) = f(x)$.
Donc f est 2π-périodique.

(b) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x : $f(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2}\cos(-2x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) = f(x)$.
Donc f est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(c) Grâce à la période 2π, on étudie f sur $[-\pi\,;\,\pi]$, un intervalle de longueur 2π. Comme f est paire, on se limite à $[0\,;\,\pi]$. On complète ensuite la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par translations de 2π.

(d) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}$. Par parité, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}$. Comme $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$, la période donne $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}$.

Ex. 14 ★★★ **Deux notes superposées**

(a) $t \mapsto \sin(4t)$ a pour période $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $t \mapsto \sin(6t)$ a pour période $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

(b) Pour tout réel t : $s(t+\pi) = \sin(4t+4\pi) + \sin(6t+6\pi) = \sin(4t) + \sin(6t) = s(t)$, car 4π et 6π sont des multiples de 2π.
Donc s est périodique de période π (on a $\pi = 2\times\frac{\pi}{2} = 3\times\frac{\pi}{3}$).

(c) $s\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ et $s\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\frac{7\pi}{3} + \sin\frac{7\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Or $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ et $s\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right) \neq s\left(\frac{\pi}{12}\right)$: un seul contre-exemple suffit, $\frac{\pi}{2}$ n'est pas une période de s, même si c'est la période de $\sin(4t)$.

(d) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel t : $s(-t) = \sin(-4t) + \sin(-6t) = -\sin(4t) - \sin(6t) = -s(t)$.
Donc s est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(e) s est π-périodique, donc on l'étudie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, de longueur π. Elle est impaire, donc l'étude sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ suffit. On complète ensuite la courbe par la symétrie de centre O, puis par des translations de π.
$s\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $\frac{7\pi}{8} = -\frac{\pi}{8} + \pi$, la période puis l'imparité donnent $s\left(\frac{7\pi}{8}\right) = s\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -s\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ex. 15 ★★★ **Le tri de Malik**

(a) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x : $g(-x) = \sin(-x)\times\sin(-3x) = (-\sin x)\times(-\sin(3x)) = \sin x \times \sin(3x) = g(x)$.
Donc g est paire (produit de deux fonctions impaires) : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(b) $f(\pi) = \pi + \cos\pi = \pi - 1$ et $f(-\pi) = -\pi + \cos(-\pi) = -\pi - 1$. Comme $-\pi - 1 \neq \pi - 1$, on a $f(-\pi) \neq f(\pi)$: f n'est pas paire. Comme $-f(\pi) = 1 - \pi \neq -\pi - 1$, on a $f(-\pi) \neq -f(\pi)$: f n'est pas impaire. Un seul contre-exemple suffit pour chacune des deux conclusions.

(c) Non. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x : $k(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos x = -k(x)$.
Donc k est impaire (produit d'une fonction impaire et d'une fonction paire). Par exemple, $k(\pi) = -\pi$ et $k(-\pi) = \pi \neq k(\pi)$. La parité de cos ne suffit pas : le facteur x change de signe.

Ex. 15 **(suite)**

(d) Non. -1 appartient à l'ensemble de définition mais pas son opposé 1 : $m(1)$ n'existe pas, alors que $m(-1) = \frac{\cos 1}{-2}$ existe. L'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0, donc m n'est ni paire ni impaire. La parité de cos ne suffit pas.

(e) $f(-x) = -x + \cos(-x) = -x + \cos x$.
Donc $p(x) = \frac{x+\cos x - x + \cos x}{2} = \cos x$ et $q(x) = \frac{x+\cos x + x - \cos x}{2} = x$. Ainsi p est paire et q est impaire : $f = p + q$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, sans être elle-même paire ou impaire.

Ex. 16 ★★★ **La cabine de la grande roue**

(a) Pour tout $t \geqslant 0$: $h(t+10) = 22 - 20\cos\left(\frac{\pi t}{5} + 2\pi\right) = 22 - 20\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) = h(t)$.
Donc h est périodique de période 10 (on retrouve $\frac{2\pi}{\pi/5} = 10$) : la roue fait un tour complet en 10 minutes.

(b) Pour tout $t \in [0\,;\,10]$: $\cos\left(\frac{\pi(10-t)}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi t}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi t}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$, car cos est 2π-périodique et paire. Donc $h(10-t) = h(t)$: sur un tour, la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $t = 5$. La descente est le « miroir » de la montée.

(c) $h\left(\frac{5}{3}\right) = 22 - 20\cos\frac{\pi}{3} = 22 - 10 = 12$. Comme $\frac{25}{3} = 10 - \frac{5}{3}$, la question 2 donne $h\left(\frac{25}{3}\right) = 12$. Comme $\frac{35}{3} = \frac{5}{3} + 10$, la période donne $h\left(\frac{35}{3}\right) = 12$. La cabine est à 12 m à ces trois instants.

(d) Quand t parcourt $[0\,;\,5]$, $\frac{\pi t}{5}$ croît de 0 à π. Or cos est décroissante sur $[0\,;\,\pi]$, donc $t \mapsto \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$ est décroissante. En multipliant par $-20 < 0$, on obtient que h est croissante sur $[0\,;\,5]$, de $h(0) = 22 - 20 = 2$ à $h(5) = 22 + 20 = 42$. Par la symétrie de la question 2, h est décroissante sur $[5\,;\,10]$, de 42 à $h(10) = 2$.

t	0	5	10
$h(t)$	2	↗ 42	↘ 2

(e) $h(t) = 32 \iff -20\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) = 10 \iff \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) = -\frac{1}{2}$. Sur $[0\,;\,10]$, on a $\frac{\pi t}{5} \in [0\,;\,2\pi]$, donc $\frac{\pi t}{5} = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{\pi t}{5} = \frac{4\pi}{3}$, c'est-à-dire $t = \frac{10}{3}$ ou $t = \frac{20}{3}$ (on a bien $\frac{20}{3} = 10 - \frac{10}{3}$, ce qui confirme la symétrie). Par périodicité, on ajoute 10 : $t = \frac{40}{3}$ et $t = \frac{50}{3}$. La cabine est à 32 m aux instants $\frac{10}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{40}{3}$ et $\frac{50}{3}$ min, soit environ 3 min 20 s, 6 min 40 s, 13 min 20 s et 16 min 40 s.

3. *Dériver sin et cos, sin(ax + b) et cos(ax + b)*

Ex. 17 ★☆☆ **Dériver sans perdre le signe ni le facteur**

(a) $f'(x) = 4 \times (-\sin x) - 7\cos x = -4\sin x - 7\cos x$.

(b) $f'(x) = 3x^2 + 2 \times (-\sin x) = 3x^2 - 2\sin x$.

(c) On pose $u(x) = 4x + \frac{\pi}{6}$, donc $u'(x) = 4$. Alors $f'(x) = 4\cos(4x + \frac{\pi}{6})$.

(d) On pose $u(x) = \frac{\pi}{3} - 2x$, donc $u'(x) = -2$. Alors $f'(x) = -(-2)\sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = 2\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

(e) On pose $u(x) = 3x$, donc $u'(x) = 3$ et $(\cos(3x))' = -3\sin(3x)$. Alors $f'(x) = -3\sin(3x) - \cos x$.

Ex. 18 ★☆☆ **Nombres dérivés en valeurs exactes**

(a) $f'(x) = 2\cos x$, donc $f'(\frac{\pi}{6}) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

(b) $f'(x) = 5 + \sin x$, donc $f'(\frac{2\pi}{3}) = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) $f'(x) = -2\sin(2x)$, donc $f'(\frac{\pi}{8}) = -2\sin\frac{\pi}{4} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

(d) $f'(x) = 3\cos(3x - \frac{\pi}{2})$, donc $f'(\frac{\pi}{9}) = 3\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = 3\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(e) $f'(x) = -4\sin x + 2x$, donc $f'(\pi) = -4 \times 0 + 2\pi = 2\pi$.

Ex. 19 ★★☆ **Les dérivées d'Inès**

(a) Faux : elle a oublié le signe moins. Avec $u(x) = 5x$ et $u'(x) = 5$, on a $(\cos u)' = -u'\sin u$, donc $(\cos(5x))' = -5\sin(5x)$.

(b) Faux : elle a écrit $\cos(u')$ au lieu de $u'\cos u$. Avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, on obtient $(\sin(x^2))' = 2x\cos(x^2)$.

(c) Vrai. Avec $u(x) = \pi - 3x$, on a $u'(x) = -3$, donc $(\sin u)' = u'\cos u = -3\cos(\pi - 3x)$.

(d) Faux : $\cos^2 x = (\cos x)^2$ est une composée u^2, avec $(u^2)' = 2u'u$. Ici $u = \cos x$ et $u' = -\sin x$.
Donc $(\cos^2 x)' = 2 \times (-\sin x) \times \cos x = -2\sin x \cos x$.

(e) Faux : elle a dérivé chaque facteur séparément. C'est un produit uv avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin x$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \cos x$. Alors $(uv)' = u'v + uv' = 2x\sin x + x^2\cos x$.

Ex. 20 ★★☆ **Un quotient avec sinus et cosinus**

(a) Pour tout réel x, on a $\cos x \geqslant -1$, donc $2+\cos x \geqslant 1 > 0$. Le dénominateur ne s'annule jamais : f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) On pose $u = \sin$ et $v = 2 + \cos$, donc $u' = \cos$ et $v' = -\sin$. Alors $f'(x) = \frac{\cos x(2+\cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$, soit $f'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$.

(c) Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $2\cos x + 1$. Sur $[0\,;\,\pi]$, cos est décroissante et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.
Donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\frac{2\pi}{3}[$, $f'(\frac{2\pi}{3}) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi]$.

(d) On a $f(0) = 0$, $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $f(\pi) = 0$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow 0$

Donc f est croissante sur $[0\,;\,\frac{2\pi}{3}]$, puis décroissante sur $[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi]$.

Ex. 21 ★★☆ **Tangentes en valeurs exactes**

(a) $g'(x) = 2\cos(2x) - \sin x$.

(b) $g(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ et $g'(\frac{\pi}{6}) = 2\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. La tangente a pour équation $y = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}$, soit $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12} + \sqrt{3}$.

(c) Le coefficient directeur est $g'(\frac{\pi}{2}) = 2\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -2 - 1 = -3$. Lina a tort : elle a oublié le facteur 2 dans $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$, car $\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -2$.

Ex. 22 ★★★ **Des limites calculées avec un nombre dérivé**

(a) Le taux d'accroissement vaut $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$. La fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) $g(0) = \sin 0 = 0$, donc $\frac{\sin(7x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$. Comme $g'(x) = 7\cos(7x)$, on a $g'(0) = 7\cos 0 = 7$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{x} = 7$. Léo a tort : il oublie le facteur 7.

(c) On pose $u = \sin x$, donc $k = 3u^2$ et $k' = 3 \times 2u'u$. D'où $k'(x) = 6\sin x\cos x$. De plus, $k\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. La limite vaut donc $k'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ex. 22 (suite)

(d) Avec $u(x) = 6x$, on a $h'(x) = -6\sin(6x)$, sans oublier le signe moins ni le facteur 6. Comme $h(\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, on a $\frac{\cos(6x)}{x - \frac{\pi}{12}} = \frac{h(x) - h(\frac{\pi}{12})}{x - \frac{\pi}{12}}$, qui tend vers $h'(\frac{\pi}{12}) = -6\sin\frac{\pi}{2} = -6$.
Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}} \frac{\cos(6x)}{x - \frac{\pi}{12}} = -6$.

Ex. 23 ★★★ **Les tangentes qui passent par l'origine**

(a) On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \cos x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\sin x$. On obtient $f'(x) = \cos x - x\sin x$.

(b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ et $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.
La tangente a pour équation $y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}$. En développant : $y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)x + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$.

(c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 = -\frac{\pi}{2}$. Et $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times (-1) = -\frac{\pi}{2}$. Les deux tangentes ont le même coefficient directeur. Elles sont donc parallèles.

(d) La tangente en a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Elle passe par O si et seulement si $0 = -af'(a) + f(a)$. Or $f(a) - af'(a) = a\cos a - a\cos a + a^2\sin a = a^2\sin a$. On a donc bien l'équivalence avec $a^2\sin a = 0$.

(e) $a^2\sin a = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $\sin a = 0$, c'est-à-dire $a = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On a $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$, donc $f'(k\pi) = (-1)^k$ et $f(k\pi) = k\pi(-1)^k$.
La tangente a pour équation $y = (-1)^k(x - k\pi) + k\pi(-1)^k = (-1)^k x$. Conclusion : la tangente est $y = x$ si k est pair et $y = -x$ si k est impair.

Ex. 24 ★★★ **Un quotient et ses tangentes horizontales**

(a) On applique $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = \cos x$, $u' = -\sin x$, $v = 1 + \sin^2 x$ et $v' = 2\cos x\sin x$ (composée w^2 avec $w = \sin x$). On obtient $f'(x) = \frac{-\sin x(1+\sin^2 x) - 2\sin x\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2} = \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x + 2 - 2\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$.
Donc $f'(x) = -\frac{\sin x(3 - \sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$.

(b) Comme $\sin^2 x \leqslant 1$, on a $3 - \sin^2 x \geqslant 2 > 0$, et $(1 + \sin^2 x)^2 > 0$.
Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $\sin x = 0$. Sur $[-\pi\,;\,\pi]$, les solutions sont $x = -\pi$, $x = 0$ et $x = \pi$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) $f'(x)$ a le signe de $-\sin x$. Sur $]-\pi\,;\,0[$, $\sin x < 0$, donc $f'(x) > 0$. Sur $]0\,;\,\pi[$, $\sin x > 0$, donc $f'(x) < 0$. On a $f(-\pi) = \frac{-1}{1} = -1$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$	$0+$		0		-0
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-1

Le maximum de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$ est 1, atteint en 0. Le minimum est -1, atteint en $-\pi$ et en π.

(d) $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{0}{2} = 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1\times(3-1)}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2}$. La tangente a pour équation $y = -\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2}) + 0$, soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$.

(e) Ali a tort : il oublie le facteur 3. On a $g(x) = f(3x)$, donc, par la dérivée d'une composée, $g'(x) = 3f'(3x)$. Ainsi $g'(\frac{\pi}{6}) = 3f'(\frac{\pi}{2}) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, et non $-\frac{1}{2}$ comme le donnerait la formule d'Ali.

4. *Variations et courbes de sin et cos*

Ex. 25 ★☆☆ **Sens de variation sur un intervalle**

(a) $\cos' = -\sin$. Si $x \in [2\pi\,;\,3\pi]$, alors $x - 2\pi \in [0\,;\,\pi]$ et $\sin x = \sin(x - 2\pi) \geqslant 0$ (moitié haute du cercle), donc $-\sin x \leqslant 0$.
Donc cos est décroissante, de $\cos 2\pi = 1$ à $\cos 3\pi = -1$.

(b) $\sin' = \cos$. Pour $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{2}\right]$, on a $x - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$: le point M associé à x est sur la moitié droite du cercle, donc $\cos x \geqslant 0$.
Donc sin est croissante, de $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ à $\sin\frac{5\pi}{2} = 1$.

(c) Ni l'une ni l'autre : sin croît de $\sin 0 = 0$ à $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, puis décroît jusqu'à $\sin\pi = 0$, car $\cos x$ change de signe en $\frac{\pi}{2}$.

(d) $-\sin x \geqslant 0$ sur $[\pi\,;\,2\pi]$ (moitié basse du cercle).
Donc cos est croissante, de $\cos\pi = -1$ à $\cos 2\pi = 1$.

(e) $\cos x \leqslant 0$ sur $[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}]$ (moitié gauche).
Donc sin est décroissante, de $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ à $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$.

(f) Ni l'une ni l'autre : cos croît de $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ à $\cos 0 = 1$, puis décroît jusqu'à $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, car $-\sin x$ change de signe en 0.

Ex. 26 ★☆☆ **Encadrer et trouver les extremums**

(a) $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$ donc $1 \leqslant f(x) \leqslant 7$. Maximum 7 en $\frac{\pi}{2}$, minimum 1 en $-\frac{\pi}{2}$.

(b) Multiplier par -4 inverse les inégalités :
$-4 \leqslant -4\sin x \leqslant 4$, donc $2 \leqslant g(x) \leqslant 10$. Maximum 10 en $-\frac{\pi}{2}$ (là où $\sin x = -1$), minimum 2 en $\frac{\pi}{2}$.

Ex. 26 **(suite)**

(c) $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ donc $-\frac{3}{2} \leqslant h(x) \leqslant -\frac{1}{2}$. Maximum $-\frac{1}{2}$ en 0, minimum $-\frac{3}{2}$ en π.

(d) $-7 \leqslant -7\cos x \leqslant 7$ donc $-2 \leqslant k(x) \leqslant 12$. Maximum 12 en π (là où $\cos x = -1$), minimum -2 en 0.

(e) $-2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2$ donc $-11 \leqslant m(x) \leqslant -7$. Maximum -7 en $\frac{\pi}{2}$, minimum -11 en $-\frac{\pi}{2}$.
Donc $m(x) < 0$ pour tout réel x.

Ex. 27 ★★☆ **L'erreur de Léo**

(a) Première erreur : sin n'est pas croissante sur $[0\,;\,\pi]$. Elle croît sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ puis décroît sur $[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$. Deuxième erreur : le coefficient -3 est négatif, donc f varie en sens inverse de sin.

(b) $f'(x) = -3\cos x$. Sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geqslant 0$ (moitié droite du cercle) donc $f'(x) \leqslant 0$. Sur $[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$, $\cos x \leqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. f' s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

(c) $f(0) = 2$, $f(\frac{\pi}{2}) = 2 - 3 = -1$, $f(\pi) = 2$.

x	$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$
signe de $f'(x)$	$-$	$+$
f	↘ de 2 à -1	↗ de -1 à 2

(d) Sur $[0\,;\,\pi]$, le minimum de f vaut -1, atteint en $\frac{\pi}{2}$. Le maximum vaut 2, atteint deux fois : en 0 et en π.

Ex. 28 ★★☆ **Une période, puis la suivante**

(a) $f(x + \pi) = 3 + \cos(2x + 2\pi) = 3 + \cos(2x) = f(x)$, car cos est 2π-périodique.
Donc f est périodique de période π.

(b) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = 3 + \cos(-2x) = 3 + \cos(2x) = f(x)$, car cos est paire.
Donc f est paire.

(c) $f'(x) = -2\sin(2x)$. Si $x \in [0\,;\,\pi]$, alors $2x \in [0\,;\,2\pi]$.
$\sin(2x) \geqslant 0 \iff 2x \in [0\,;\,\pi] \iff x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$.
Donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$.

(d) $f(0) = 4$, $f(\frac{\pi}{2}) = 3 + \cos\pi = 2$, $f(\pi) = 4$.

x	$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$
signe de $f'(x)$	$-$	$+$
f	↘ de 4 à 2	↗ de 2 à 4

Par π-périodicité, f décroît de 4 à 2 sur $[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}]$, puis croît de 2 à 4 sur $[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi]$.

Ex. 29 ★★☆ **Température d'une journée**

(a) $T(6) = 14 - 6\cos\frac{\pi}{2} = 14\ ^\circ\text{C}$ et $T(18) = 14 - 6\cos\frac{3\pi}{2} = 14\ ^\circ\text{C}$.

(b) $T'(t) = -6 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Pour $t \in [0\,;\,24]$, $\frac{\pi t}{12} \in [0\,;\,2\pi]$. Le sinus est positif si $\frac{\pi t}{12} \in [0\,;\,\pi]$, c'est-à-dire si $t \in [0\,;\,12]$.
Donc $T'(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,12]$ et $T'(t) \leqslant 0$ sur $[12\,;\,24]$.

(c) $T(0) = 14 - 6 = 8$, $T(12) = 14 - 6\cos\pi = 20$, $T(24) = 14 - 6\cos(2\pi) = 8$.

t	$[0\,;\,12]$	$[12\,;\,24]$
signe de $T'(t)$	$+$	$-$
T	↗ de 8 à 20	↘ de 20 à 8

(d) La température maximale est 20 °C, atteinte à midi. La minimale est 8 °C, atteinte à minuit ($t = 0$ et $t = 24$). L'écart vaut $20 - 8 = 12$ °C, soit deux fois l'amplitude 6 de la sinusoïde.

Ex. 30 ★★★ **Une sinusoïde renversée**

(a) Pour tout réel x : $f(x + 2\pi) = 1 - 2\sin(x + 2\pi) = 1 - 2\sin x = f(x)$, car sin est 2π-périodique.
Donc f est 2π-périodique : il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi\,;\,\pi]$. On complète ensuite la courbe par translations de 2π.

(b) $f'(x) = -2\cos x$. Comme $-2 < 0$, $f'(x)$ a le signe contraire de $\cos x$. Sur $[-\pi\,;\,\pi]$, le cosinus (l'abscisse du point du cercle) est positif sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et négatif sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.
Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Elle s'annule en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$.

(c) On calcule $f(-\pi) = 1 - 0 = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2 = 3$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 = -1$ et $f(\pi) = 1$.

x	$\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
f	$1 \nearrow 3$	$3 \searrow -1$	$-1 \nearrow 1$

Attention : $b = -2 < 0$, donc f décroît là où sin croît.
Par 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$ le maximum de f est 3, atteint en $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Le minimum est -1, atteint en $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(d) Si $x \in [\pi\,;\,3\pi]$, alors $x - 2\pi \in [-\pi\,;\,\pi]$ et $f(x) = f(x - 2\pi)$. On décale donc le tableau de 2π. f est croissante sur $\left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$, de 1 à 3. Elle est décroissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{2}\right]$, de 3 à -1. Elle est croissante sur $\left[\frac{5\pi}{2}\,;\,3\pi\right]$, de -1 à 1.

Ex. 30 **(suite)**

(e) Sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant 1 > 0$: aucune solution. Sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, f est continue et strictement décroissante de 3 à -1, et $0 \in [-1\,;\,3]$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une seule solution. Sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, f est continue et strictement croissante de -1 à 1 : une seule solution aussi. Il y a donc exactement deux solutions. Ensuite, $f(x) = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}$. Sur $[-\pi\,;\,\pi]$, les points du cercle d'ordonnée $\frac{1}{2}$ sont associés à $\frac{\pi}{6}$ et à $\frac{5\pi}{6}$. Les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Ex. 31 ★★★ **La marée au port de Granville**

(a) $h(t + 12) = 4{,}5 + 2{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6} + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 4{,}5 + 2{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = h(t)$, car sin est 2π-périodique. La fonction h est 12-périodique : la marée se répète à l'identique toutes les 12 heures.

(b) $h'(t) = 2{,}5 \times \frac{\pi}{6}\cos u = \frac{5\pi}{12}\cos u$. Comme $\frac{5\pi}{12} > 0$, $h'(t)$ a le signe de $\cos u$. Pour $t \in [0\,;\,12]$, on a $u \in \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{3}\right]$. Sur le cercle, l'abscisse est positive pour $u \in \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire $t \in [0\,;\,5]$. Elle est négative pour $u \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$, soit $t \in [5\,;\,11]$. Elle est de nouveau positive pour $u \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{3}\right]$, soit $t \in [11\,;\,12]$.

(c) On calcule $h(0) = 4{,}5 - 2{,}5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2{,}33$, $h(5) = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$, $h(11) = 4{,}5 - 2{,}5 = 2$ et $h(12) = h(0)$.

t	$[0\,;\,5]$	$[5\,;\,11]$	$[11\,;\,12]$
$h'(t)$	$+$	$-$	$+$
h	$2{,}33 \nearrow 7$	$7 \searrow 2$	$2 \nearrow 2{,}33$

La pleine mer a lieu à 5 h, avec 7 m d'eau. La basse mer a lieu à 11 h, avec 2 m. On le retrouve avec $-1 \leqslant \sin u \leqslant 1$: $2 \leqslant h(t) \leqslant 7$, et ces deux valeurs sont bien atteintes. La sinusoïde a une amplitude de 2,5 m autour du niveau moyen 4,5 m.

(d) $h(t) \leqslant 3{,}25 \iff 2{,}5\sin u \leqslant -1{,}25 \iff \sin u \leqslant -\frac{1}{2}$, avec $u \in \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{3}\right]$. Sur le cercle, les points d'ordonnée inférieure ou égale à $-\frac{1}{2}$ forment l'arc bas qui va de $\frac{7\pi}{6}$ à $\frac{11\pi}{6}$, c'est-à-dire de $\frac{7\pi}{6}$ à $-\frac{\pi}{6}$ en repassant par $-\frac{\pi}{2}$. Dans l'intervalle de u, cela donne $u \in \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{3}\right]$. Or $t = \frac{6u}{\pi} + 2$, d'où $t \in [0\,;\,1] \cup [9\,;\,12]$. Le port est fermé de 0 h à 1 h et de 9 h à 12 h.

(e) Par 12-périodicité, $h(5 + 12) = h(5) = 7$. Sur $[12\,;\,24]$, les variations de h sont celles de $[0\,;\,12]$ décalées de 12 h. La pleine mer suivante a donc lieu à $t = 17$, soit 17 h, avec 7 m d'eau.

Ex. 32 ★★★ **Le cosinus au-dessus d'une parabole**

(a) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x : $g(-x) = \cos(-x) - 1 + \frac{(-x)^2}{2} = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = g(x)$, car cos est paire.
Donc g est paire.

(b) $g'(x) = -\sin x + \frac{2x}{2} = x - \sin x$. Pour $x \geqslant 0$, le résultat admis donne $\sin x \leqslant x$, donc $g'(x) \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Pour $x \geqslant 0$, g est croissante, donc $g(x) \geqslant g(0) = 1 - 1 + 0 = 0$. Pour $x < 0$, on a $-x > 0$ et, comme g est paire, $g(x) = g(-x) \geqslant 0$. Ainsi $g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, c'est-à-dire $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

(d) Avec $x = 0{,}2$: $\cos(0{,}2) \geqslant 1 - \frac{0{,}04}{2} = 0{,}98$. De plus $\cos(0{,}2) \leqslant 1$, car le cosinus ne dépasse jamais 1.
Donc $0{,}98 \leqslant \cos(0{,}2) \leqslant 1$. La calculatrice donne $\cos(0{,}2) \approx 0{,}9801$.

(e) Faux. Être au-dessus d'une courbe décroissante ne donne aucun sens de variation. Le cosinus est décroissant sur $[0\,;\pi]$, mais il est croissant sur $[\pi\,;2\pi]$.
Contre-exemple : $\pi < 2\pi$ et pourtant $\cos(2\pi) = 1 > \cos\pi = -1$. Le cosinus n'est donc pas décroissant sur $[0\,;+\infty[$: un sens de variation de cos se donne sur un intervalle précis, comme $[0\,;\pi]$.

5. *Équations et inéquations trigonométriques*

Ex. 33 ★☆☆ **Équations sur $\mathbb{R}$**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, donc $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
(les deux familles se regroupent avec un pas de π).

(d) $\cos x = -\frac{4}{3}$ et $-\frac{4}{3} < -1$: aucune solution, $S = \varnothing$.

(e) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(f) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$, donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 34 ★☆☆ **Solutions sur un intervalle**

(a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k = 0$ seul convient : $S = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right\}$.

(b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k = 0$: $S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right\}$.

(c) $\sin x = -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$. On prend $k = 0$ dans la 1re famille et $k = -1$ dans la 2de : $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{6}\right\}$.

Ex. 34 (suite)

(d) $x = \pi + 2k\pi$; $k = 0$: $S = \{\pi\}$.

(e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. On prend $k = 0$ pour $\frac{\pi}{4}$ et $k = 1$ pour $-\frac{\pi}{4}$: $S = \left\{\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}\right\}$.

(f) $x = k\pi$; $k = -1, 0, 1$ conviennent (les bornes sont fermées) : $S = \{-\pi\,;\,0\,;\,\pi\}$.

Ex. 35 ★★☆ **L'erreur de Noé**

(a) Noé a oublié le $+2k\pi$ sur $2x$: il faut écrire $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, puis diviser AUSSI $2k\pi$ par 2. Le pas des solutions est donc $k\pi$, et non $2k\pi$.

(b) $\cos(2x) = \cos\frac{\pi}{3} \iff 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) 1re famille : $k = 0$ et $k = 1$ donnent $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$. 2de famille : $k = 1$ et $k = 2$ donnent $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.
Donc $S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\,;\,\frac{11\pi}{6}\right\}$.

(d) Sur $[0\,;2\pi[$, Noé trouve $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$. Il manque $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$: deux solutions manquent.

Ex. 36 ★★☆ **Un second degré en sinus**

(a) $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$, donc $X = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ ou $X = \frac{-1-3}{4} = -1$.

(b) $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ donne $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$; $\sin x = -1$ donne $x = \frac{3\pi}{2}$.
Donc $S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right\}$.

(c) $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, donc $2 \times (-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$: $\frac{3\pi}{2}$ vérifie bien (E).

(d) Avec $X = \sin x$: $2X^2 + 3X - 5 = 0$, $\Delta = 9 + 40 = 49$, d'où $X = \frac{-3+7}{4} = 1$ ou $X = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2}$. Or $-\frac{5}{2} < -1$: $\sin x = -\frac{5}{2}$ n'a aucune solution. Il reste $\sin x = 1$, soit $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. L'équation a donc des solutions.

Ex. 37 ★★☆ **Inéquations lues sur le cercle**

(a) L'abscisse de M doit être au moins $\frac{1}{2}$: M est sur l'arc de droite, entre les points associés à $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ (car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$). Sur $[-\pi\,;\pi]$, cet arc donne un seul intervalle : $S = \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$.

(b) L'ordonnée de M doit être strictement inférieure à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$: M est sur l'arc du bas, strictement entre les points associés à $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$. L'inégalité est stricte, donc les bornes sont exclues : $S = \left]\frac{5\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}\right[$.

(c) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. M doit être à gauche de la droite verticale d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc hors de l'arc compris entre $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$: $S = \left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}\,;\,\pi\right]$.

Ex. 37 (suite)

(d) M doit être sur le demi-cercle du haut, axe des abscisses compris : $x \in [0\,;\,\pi]$. De plus $\sin(2\pi) = 0$ et la borne 2π est fermée, donc 2π est aussi solution : $S = [0\,;\,\pi] \cup \{2\pi\}$.

Ex. 38 ★★★ Le chenal d'Inès

(a) $h(t) = 7{,}5 \iff 2\sin u = 2{,}5 \iff \sin u = 1{,}25$. Or $1{,}25 > 1$ et $-1 \leqslant \sin u \leqslant 1$: cette équation n'a aucune solution. La hauteur maximale vaut $5 + 2 = 7$ m (atteinte à $t = 3$ et $t = 15$). Inès a donc tort de croire l'affiche.

(b) $h(t) = 6 \iff \sin u = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \iff u = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $u = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On multiplie par $\frac{6}{\pi}$, et $2k\pi$ devient lui aussi $12k$: $t = 1 + 12k$ ou $t = 5 + 12k$. Pour $k = 0$: 1 et 5 ; pour $k = 1$: 13 et 17 ; pour $k = 2$: 25 et 29, trop grands ; pour $k = -1$: des valeurs négatives.
Donc $S = \{1\,;\,5\,;\,13\,;\,17\}$.

(c) $h(t) \geqslant 6 \iff \sin u \geqslant \frac{1}{2}$, avec $u \in [0\,;\,4\pi]$. Le point M doit être sur l'arc du haut, au-dessus de la droite horizontale d'ordonnée $\frac{1}{2}$ ou sur cette droite. C'est le cas pour $u \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$, donc pour $t \in [1 + 12k\,;\,5 + 12k]$. Sur $[0\,;\,24]$, il reste $k = 0$ et $k = 1$: $t \in [1\,;\,5] \cup [13\,;\,17]$. Inès peut passer de 1 h à 5 h et de 13 h à 17 h.

(d) $h(t) > 4 \iff \sin u > -\frac{1}{2}$. On a $\sin u = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \iff u = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $u = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, soit $t = -1 + 12k$ ou $t = 7 + 12k$. Le point M doit être strictement au-dessus de la droite d'ordonnée $-\frac{1}{2}$: $u \in \left]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\,\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right[$, donc $t \in]-1 + 12k\,;\,7 + 12k[$. Vérification : $h(7) = 5 + 2\sin\frac{7\pi}{6} = 5 - 1 = 4$, qui n'est pas > 4. La borne 7 est donc ouverte, comme 11, 19 et 23. En revanche, 0 et 24 sont incluses car $h(0) = h(24) = 5$. On obtient $S = [0\,;\,7[\cup]11\,;\,19[\cup]23\,;\,24]$. Durée totale : $7 + 8 + 1 = 16$ heures.

Ex. 39 ★★★ Six solutions et une inéquation

(a) (E) $\iff \sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
Donc $3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On divise tout par 3, $2k\pi$ compris : $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 39 (suite)

(b) Avec $\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{12}$. Première famille : $k = 0$ donne $-\frac{\pi}{12} < 0$, refusé ; $k = 1$ donne $\frac{7\pi}{12}$; $k = 2$ donne $\frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$; $k = 3$ donne $\frac{23\pi}{12}$; $k = 4$ donne $\frac{31\pi}{12} \geqslant 2\pi$, refusé. Seconde famille : $k = 0$ donne $\frac{5\pi}{12}$; $k = 1$ donne $\frac{13\pi}{12}$; $k = 2$ donne $\frac{21\pi}{12} = \frac{7\pi}{4}$; $k = 3$ donne $\frac{29\pi}{12}$, refusé.
Donc $S = \left\{\frac{5\pi}{12}\,;\,\frac{7\pi}{12}\,;\,\frac{13\pi}{12}\,;\,\frac{5\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}\,;\,\frac{23\pi}{12}\right\}$: six solutions.

(c) $3 \times \frac{23\pi}{12} = \frac{23\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 6\pi$. Par périodicité, $\sin\frac{23\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $2\sin\left(3 \times \frac{23\pi}{12}\right) + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$: $\frac{23\pi}{12}$ est bien solution de (E).

(d) Sur $[0\,;\,2\pi]$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ pour $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et pour $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Le point M doit être strictement à droite de la droite verticale d'abscisse $-\frac{1}{2}$, donc hors du petit arc de gauche compris entre les points associés à $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. L'inégalité est stricte : $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ sont exclus. En revanche, $\cos 0 = \cos(2\pi) = 1 > -\frac{1}{2}$: 0 et 2π sont inclus.
Donc $S = \left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}\,;\,2\pi\right]$.

(e) On écrit $\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{12}$ et $\frac{4\pi}{3} = \frac{16\pi}{12}$. $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$ sont dans $\left[0\,;\,\frac{8\pi}{12}\right[$: ils conviennent. $\frac{13\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{4} = \frac{15\pi}{12}$ sont dans $\left]\frac{8\pi}{12}\,;\,\frac{16\pi}{12}\right[$: ils ne conviennent pas. Par exemple, $\cos\frac{13\pi}{12} \approx -0{,}966 < -\frac{1}{2}$. $\frac{7\pi}{4} = \frac{21\pi}{12}$ et $\frac{23\pi}{12}$ sont dans $\left]\frac{16\pi}{12}\,;\,2\pi\right]$: ils conviennent. Les solutions cherchées sont donc $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{23\pi}{12}$.

Ex. 40 ★★★ Une équation de degré 3 en cosinus

(a) $2X^3 - X^2 - 3X = X(2X^2 - X - 3)$. Pour $2X^2 - X - 3 = 0$: $\Delta = 1 + 24 = 25$, donc $X = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$ ou $X = \frac{1-5}{4} = -1$. Les solutions de $2X^3 - X^2 - 3X = 0$ sont donc 0, $\frac{3}{2}$ et -1.

(b) (E) $\iff \cos x = 0$ ou $\cos x = \frac{3}{2}$ ou $\cos x = -1$. Or $\cos x = \frac{3}{2}$ n'a aucune solution, car $\frac{3}{2} > 1$. Ensuite, $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Sur $]-\pi\,;\,\pi]$: $k = -1$ et $k = 0$ donnent $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dans la première famille ; $k = 0$ donne π dans la seconde.
Donc $S = \left\{-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right\}$.

(c) Non. On a bien $\cos(-\pi) = -1$, donc $-\pi$ vérifie l'égalité. Mais l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ est ouvert en $-\pi$: ce réel n'en fait pas partie. Il donne d'ailleurs le même point du cercle que π, qui est déjà dans la liste. Lina a tort.

Ex. 40 (suite)

(d) On développe : $(2X-3)(X+1) = 2X^2+2X-3X-3 = 2X^2-X-3$. Comme $\cos x \leqslant 1$, on a $2\cos x - 3 \leqslant -1 < 0$: ce facteur est toujours strictement négatif. Comme $\cos x \geqslant -1$, on a $\cos x + 1 \geqslant 0$, avec égalité seulement pour $x = \pi$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

(e) (I) s'écrit $\cos x\,(2\cos x - 3)(\cos x + 1) \geqslant 0$. Pour $x = \pi$, le produit est nul, donc π est solution. Pour $x \neq \pi$, $(2\cos x - 3)(\cos x + 1) < 0$, donc (I) $\iff \cos x \leqslant 0$. Le point M doit être sur la moitié gauche du cercle (abscisse négative ou nulle), points de l'axe vertical compris.
Donc $S = \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, qui contient bien π.
Contrôle : pour $x = 0$, l'expression vaut $-2 < 0$; pour $x = \frac{2\pi}{3}$, elle vaut $1 \geqslant 0$.

6. *Étudier une fonction trigonométrique*

Ex. 41 ★☆☆ Dériver puis factoriser

(a) $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$, donc $f'(x) = 2\cos x - 2\sin x\cos x = 2\cos x\,(1-\sin x)$.

(b) $g'(x) = 4 - 8\times(-\sin x) = 4 + 8\sin x = 4(1+2\sin x)$.

(c) On dérive un produit, avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $h'(x) = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\times(-\sin x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$.

(d) On dérive un quotient : $k'(x) = \frac{\cos x\,(3+\cos x) - \sin x\times(-\sin x)}{(3+\cos x)^2} = \frac{3\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(3+\cos x)^2}$. Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on obtient $k'(x) = \frac{3\cos x + 1}{(3+\cos x)^2}$.

(e) $q'(x) = 2\cos x\times(-\sin x) + \sin x = \sin x\,(1-2\cos x)$.

(f) $r'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$.

Ex. 42 ★☆☆ Points où la dérivée s'annule

(a) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Sur $[-\pi\,;\,\pi]$, $\cos x = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$. De plus, $1 + 2\sin x = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$.
Donc $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{2}\,;\,-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\}$.

(b) $\sqrt{2} - 2\sin x = 0 \iff \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur $[0\,;\,2\pi]$, cela donne $S = \left\{\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right\}$.

(c) Comme $e^x > 0$, $f'(x) = 0 \iff \cos x = \sin x$. Le point M associé à x a alors deux coordonnées égales : il est sur la première bissectrice du repère. Sur $[-\pi\,;\,\pi]$, cela donne $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right\}$.

Ex. 42 (suite)

(d) On pose $X = 2x$. Si $x \in [0\,;\,\pi]$, alors $X \in [0\,;\,2\pi]$. L'équation devient $\cos X = -\frac{1}{2}$, d'où $X = \frac{2\pi}{3}$ ou $X = \frac{4\pi}{3}$.
Donc $S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right\}$.

(e) Sur $[0\,;\,2\pi]$, $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$. De plus, $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2}$, une solution déjà trouvée.
Donc $S = \left\{\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right\}$.

(f) Comme $\sin x \geqslant -1$, le dénominateur vérifie $(2+\sin x)^2 \geqslant 1 > 0$.
Donc $f'(x) = 0 \iff 2\cos x + \sqrt{3} = 0 \iff \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sur $[0\,;\,2\pi]$, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right\}$.

Ex. 43 ★★☆ Vrai ou faux sur le signe de la dérivée

(a) Faux. Pour $x = \pi$: $1 + 2\cos\pi = 1 - 2 = -1 < 0$. Sur $[0\,;\,\pi]$, on a en fait $1 + 2\cos x > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right[$.

(b) Faux. $w'(x) = \sqrt{3} - 2\cos x$, et $w'(x) = 0 \iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le cosinus est pair, donc sur $[-\pi\,;\,\pi]$ cela donne $x = \frac{\pi}{6}$ et aussi $x = -\frac{\pi}{6}$: $w'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

(c) Faux. Le signe de p ne donne pas ses variations. $p'(x) = \sin x + (x+1)\cos x$, et $p'(\pi) = 0 + (\pi+1)\times(-1) = -(\pi+1) < 0$. Contre-exemple : $\frac{\pi}{2} < \pi$, mais $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 > p(\pi) = 0$.

(d) Vrai. $r'(x) = 2 - \sin x$. Comme $\sin x \leqslant 1$, on a $r'(x) \geqslant 1 > 0$ pour tout réel x.
Donc r est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 44 ★★☆ L'erreur de Lina

(a) $f(\pi - x) = \sin(\pi - x) + \cos^2(\pi - x) = \sin x + (-\cos x)^2 = \sin x + \cos^2 x = f(x)$. La courbe est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$. Il suffit d'étudier f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

(b) $(\cos^2 x)' = 2\cos x\times(-\sin x)$, donc $f'(x) = \cos x - 2\sin x\cos x = \cos x\,(1-2\sin x)$.

Ex. 44 **(suite)**

(c) Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geqslant 0$ et $\cos x$ ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$. Le sinus y est croissant et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, donc $1-2\sin x>0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right[$ et $1-2\sin x<0$ sur $\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	$\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right[$	$\frac{\pi}{6}$	$\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$+$	$+$	$+$	0
$1-2\sin x$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0

Valeurs : $f(0)=0+1=1$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+0=1$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$1\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow 1$

(d) La calculatrice ne justifie pas un signe : il faut étudier chaque facteur. De plus, Lina a mal lu le signe de f'. f croît sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Par symétrie, elle croît sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ puis décroît sur $\left[\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right]$. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ est un minimum local. Le maximum de f sur $[0\,;\pi]$ vaut $\frac{5}{4}=1{,}25$. Il est atteint en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{5\pi}{6}$. Aux bornes, $f(0)=f(\pi)=1$.

(e) D'après les variations sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et la symétrie $f(\pi-x)=f(x)$, la plus petite valeur de f sur $[0\,;\pi]$ est 1. Elle est atteinte en 0, en $\frac{\pi}{2}$ et en π. La plus grande vaut $\frac{5}{4}$, en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{5\pi}{6}$. Donc, pour tout x de $[0\,;\pi]$, $1\leqslant \sin x+\cos^2 x\leqslant\frac{5}{4}$, et les deux bornes sont atteintes.

Ex. 45 ★★☆ **La gouttière de Noé**

(a) Chaque bord de 2 dm, incliné de θ par rapport à la verticale, monte de $2\cos\theta$ et s'écarte de $2\sin\theta$. La hauteur vaut donc $2\cos\theta$, et la largeur du haut vaut $2+2\times 2\sin\theta=2+4\sin\theta$. Alors $A(\theta)=\frac{2+(2+4\sin\theta)}{2}\times 2\cos\theta=(4+4\sin\theta)\cos\theta=4\cos\theta\,(1+\sin\theta)$.

(b) On dérive un produit : $A'(\theta)=4\left[-\sin\theta\,(1+\sin\theta)+\cos\theta\times\cos\theta\right]=4(-\sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta)$. Avec $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$: $A'(\theta)=4(1-\sin\theta-2\sin^2\theta)$. Avec $X=\sin\theta$, le trinôme $-2X^2-X+1$ a pour discriminant $\Delta=1+8=9$ et pour racines $\frac{1-3}{-4}=\frac{1}{2}$ et $\frac{1+3}{-4}=-1$.
Donc $-2X^2-X+1=-2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+1)=(1-2X)(1+X)$, et $A'(\theta)=4(1-2\sin\theta)(1+\sin\theta)$.

Ex. 45 **(suite)**

(c) Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta\geqslant 0$, donc $1+\sin\theta\geqslant 1>0$. Le sinus y est croissant et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, donc $1-2\sin\theta\geqslant 0\iff\theta\in\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$. Valeurs : $A(0)=4$, $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}=3\sqrt{3}$ et $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$A'(\theta)$	$+$	0	$-$
$A(\theta)$	$4\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow 0$

(d) A croît puis décroît. L'aire est donc maximale pour $\theta=\frac{\pi}{6}$ et vaut $3\sqrt{3}\approx 5{,}20$ dm². Elle dépasse les valeurs aux bornes : $A(0)=4$ (bords verticaux) et $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (plaque à plat). Il s'agit donc bien du maximum sur tout l'intervalle.

Ex. 46 ★★★ **Type bac : exponentielle et sinus**

(a) $f=uv$ avec $u(x)=e^x$ et $v(x)=\sin x$, donc $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$. Comme $e^x>0$ pour tout réel x, $f'(x)$ a le même signe que $\sin x+\cos x$.

(b) Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x\geqslant 0$ et $\cos x\geqslant 0$. Ils ne s'annulent pas en même temps puisque $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, donc $\sin x+\cos x>0$. Sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, on a $\sin x\geqslant 0$ et $-\cos x\geqslant 0$. Alors $\sin x+\cos x\geqslant 0\iff\sin x\geqslant-\cos x$. Les deux membres sont positifs et la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc cela équivaut à $\sin^2 x\geqslant\cos^2 x$.

(c) Sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$: $\sin^2 x\geqslant\cos^2 x\iff 1-\cos^2 x\geqslant\cos^2 x\iff\cos^2 x\leqslant\frac{1}{2}$. Comme $\cos x\leqslant 0$ sur cet intervalle, cela équivaut à $\cos x\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur le cercle, le point M associé à x a une abscisse au moins égale à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ tant que $x\leqslant\frac{3\pi}{4}$, car $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le cosinus décroît sur $[0\,;\pi]$.
Donc $f'(x)>0$ sur $\left[0\,;\frac{3\pi}{4}\right[$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$ et $f'(x)<0$ sur $\left]\frac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$. Valeurs : $f(0)=0$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\approx 7{,}460$ et $f(\pi)=0$.

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$	$\searrow 0$

Ex. 46 **(suite)**

(d) Sur $\left[0\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$, f est continue et strictement croissante, de 0 à $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \approx 7{,}46$. Or 5 est compris entre ces deux valeurs. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution sur cet intervalle. De même, sur $\left[\frac{3\pi}{4}\,;\,\pi\right]$, f décroît strictement de 7,46 environ à 0 : une unique solution. Conclusion : $f(x) = 5$ a exactement deux solutions sur $[0\,;\,\pi]$. Le maximum de f vaut environ 7,46, et $7{,}46 < 8$: l'équation $f(x) = 8$ n'a aucune solution.

Ex. 47 ★★★ **Le maximum d'Ilyes**

(a) $[-2\pi\,;\,2\pi]$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout x de cet intervalle, $f(-x) = -\frac{x}{2} - \sin(-x) = -\frac{x}{2} + \sin x = -f(x)$, car le sinus est impair.
Donc f est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine, et il suffit de l'étudier sur $[0\,;\,2\pi]$.

(b) $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$. On a $f'(x) = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Dans $[-2\pi\,;\,2\pi]$, les solutions sont $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

(c) $f'(x) \geqslant 0 \iff \cos x \leqslant \frac{1}{2}$. Quand x parcourt $[0\,;\,2\pi]$, le point M associé à x fait un tour complet du cercle. Son abscisse est au plus $\frac{1}{2}$ exactement quand $x \in \left[\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{3}\right]$.
Donc $f'(x) < 0$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$, $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{3}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]\frac{5\pi}{3}\,;\,2\pi\right]$. Valeurs : $f(0) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}342$; $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}484$; $f(2\pi) = \pi$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f(x)$	0	↘	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	π

(d) Non, il a tort. D'après le tableau, f décroît sur $\left[\frac{5\pi}{3}\,;\,2\pi\right]$, donc $f(2\pi) < f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$. En effet, $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}484$ et $\pi \approx 3{,}142$. Le maximum de f sur $[0\,;\,2\pi]$ vaut $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et il est atteint en $x = \frac{5\pi}{3}$, pas à la borne. Sur l'écran, les deux valeurs sont proches, et la calculatrice ne justifie pas un signe.

(e) Sur $[0\,;\,2\pi]$, le minimum vaut $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}342$.
Comme f est impaire, sur $[-2\pi\,;\,0]$ elle prend les valeurs opposées de celles prises sur $[0\,;\,2\pi]$. Son minimum y est donc l'opposé du maximum : $f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -3{,}484$. Comme $-3{,}484 < -0{,}342$, le minimum de f sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$ vaut $-\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il est atteint en $x = -\frac{5\pi}{3}$.

Ex. 48 ★★★ **La lampe de Maëlle**

(a) $E(0) = 100 \times 0 \times 1 = 0$ et $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100 \times 1 \times 0 = 0$.
Pour $\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha > 0$, donc $E(\alpha) > 0$. Les valeurs aux bornes sont donc plus petites que n'importe quelle valeur intérieure : le maximum est atteint dans $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Avec $(\cos^2)' = 2\cos\alpha \times (-\sin\alpha)$ et la dérivée d'un produit : $E'(\alpha) =$
$100\left[\cos\alpha \times \cos^2\alpha + \sin\alpha \times 2\cos\alpha \times (-\sin\alpha)\right] =$
$100\cos\alpha\,(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha)$. Avec $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$:
$E'(\alpha) = 100\cos\alpha \times (1 - 3\sin^2\alpha)$.
Donc $a = 1$ et $b = -3$.

(c) La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, de $\sin 0 = 0$ à $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Or $0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, car $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha_0 \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha > 0$, et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Comme $\sin\alpha \geqslant 0$:
$1 - 3\sin^2\alpha \geqslant 0 \iff \sin^2\alpha \leqslant \frac{1}{3} \iff \sin\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. Sur le quart de cercle, l'ordonnée du point M associé à α croît avec α : elle est au plus $\frac{\sqrt{3}}{3}$ exactement quand $\alpha \leqslant \alpha_0$.
Donc $E'(\alpha) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha_0[$ (par exemple $E'(0) = 100$), $E'(\alpha_0) = 0$, $E'(\alpha) < 0$ sur $\left]\alpha_0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et $E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. On a $\cos^2\alpha_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, donc $E(\alpha_0) = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{9} \approx 38{,}5$ lux.

α	0		α_0		$\frac{\pi}{2}$
$E'(\alpha)$	$+$		0		$-$
$E(\alpha)$	0	↗	$\frac{200\sqrt{3}}{9}$	↘	0

L'éclairement maximal est $\frac{200\sqrt{3}}{9}$ lux, soit environ 38,5 lux.

(e) La lampe L, le centre O et le point B du bord forment un triangle rectangle en O, d'hypoténuse $LB = d$, avec $OB = 1$ et l'angle α en B.
Donc $h = OL = d\sin\alpha$ et $1 = OB = d\cos\alpha$. Pour $\alpha = \alpha_0$: $\cos\alpha_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (il est positif).
Donc $d = \frac{3}{\sqrt{6}}$ et $h = d\sin\alpha_0 = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La lampe doit être placée à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m, soit environ 0,71 m au-dessus de la table.