1. Hypoténuse, côté adjacent, côté opposé

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes — Un triangle penché**

(a) L'angle droit est en L. L'hypoténuse est le côté en face de L : c'est $[KM]$. Son nom ne contient pas la lettre L.

(b) Le sommet de $\widehat{LKM}$ est K (lettre du milieu). Côté adjacent : $[KL]$ (côté de l'angle droit qui touche K). Côté opposé : $[LM]$ (en face de K).

(c) Le sommet de $\widehat{KML}$ est M. Côté adjacent : $[LM]$. Côté opposé : $[KL]$. Les rôles se sont échangés par rapport à l'angle $\widehat{LKM}$.

(d) $[KM]$ touche bien M, mais c'est l'hypoténuse (en face de l'angle droit). Le côté adjacent est toujours un côté de l'angle droit : ici $[LM]$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes — Repérer les côtés par leurs lettres**

(a) L'angle droit est en S : l'hypoténuse est le côté dont le nom ne contient pas S, c'est $[RT]$.

(b) Le sommet de $\widehat{GEF}$ est E (lettre du milieu). Le côté adjacent contient la lettre de l'angle droit G et celle du sommet E : c'est $[EG]$. Attention : $[EF]$ touche aussi E, mais c'est l'hypoténuse (en face de l'angle droit), jamais le côté adjacent.

(c) Le sommet de $\widehat{NVP}$ est V. Le côté opposé est le côté de l'angle droit qui ne contient pas V : c'est $[NP]$.

(d) $[DH]$ ne contient pas la lettre B et c'est un côté de l'angle droit : il est opposé à l'angle de sommet B, c'est-à-dire $\widehat{DBH}$ (on peut aussi l'écrire $\widehat{HBD}$, avec B au milieu).

(e) Le sommet de $\widehat{XYZ}$ est Y : c'est l'angle droit. On parle de côté adjacent ou opposé seulement pour un angle aigu.

(f) Dans le triangle KLM rectangle en L, les deux angles aigus ont une somme de $90°$: $\widehat{KML} = 90° - 27° = 63°$. Le sommet de $\widehat{KML}$ est M : le côté adjacent contient L et M, c'est $[LM]$. Les rôles ont changé : $[LM]$ était le côté opposé à $\widehat{LKM}$.

Ex. 3 ★★☆ **Automatismes — Les deux angles aigus**

(a) Dans le triangle DEF rectangle en E, les angles aigus ont pour somme $90°$: $\widehat{EFD} = 90° - 37° = 53°$.

(b) Dans le triangle GHJ rectangle en J : $\widehat{HGJ} = 90° - 58{,}5° = 31{,}5°$.

(c) $\widehat{VWU} = 180° - 64° - 26° = 90°$. Le triangle UVW est rectangle en W.

(d) Non : avec l'angle droit, on aurait déjà $90° + 95° = 185°$, plus que $180°$. Les deux autres angles d'un triangle rectangle sont aigus.

Ex. 4 ★★☆ **La copie de Maëlle**

(a) L'hypoténuse n'est pas « le côté du bas » : c'est le côté en face de l'angle droit Q. C'est $[PT]$.

(b) $[PT]$ touche P, mais c'est l'hypoténuse. Le côté adjacent à $\widehat{QPT}$ est le côté de l'angle droit qui touche P : $[PQ]$.

(c) Le sommet de $\widehat{PTQ}$ est T. Côté adjacent : $[QT]$. Côté opposé : $[PQ]$. Les rôles s'échangent quand on change d'angle.

(d) Dans le triangle PQT rectangle en Q : $\widehat{PTQ} = 90° - 41° = 49°$.

Ex. 5 ★★☆ **Une hauteur, deux triangles rectangles**

(a) Vrai : $[LM]$ est un côté de l'angle droit M et il touche le sommet L.

(b) Faux : dans le triangle LMH rectangle en H, l'hypoténuse est $[LM]$ (en face de H). Le côté adjacent à $\widehat{MLH}$ est $[LH]$.

(c) Vrai : $[MH]$ est un côté de l'angle droit H et son nom ne contient pas L : il est en face de L.

(d) Vrai : dans le triangle LMN rectangle en M, $\widehat{LNM} = 90° - 34° = 56°$; dans le triangle LMH rectangle en H, $\widehat{LMH} = 90° - 34° = 56°$.

Ex. 6 ★★★ **Deux triangles accolés**

(a) Le triangle EFG est rectangle en F. L'hypoténuse est en face de l'angle droit : c'est $[EG]$. L'angle $\widehat{FEG}$ a pour sommet E : le côté adjacent est $[EF]$ (il contient F et E), le côté opposé est $[FG]$ (il ne contient pas E).

(b) $\widehat{FEH} = \widehat{FEG} + \widehat{GEH} = 32° + 47° = 79°$. Comme $79° \neq 90°$, l'angle en E n'est pas droit : Léo a tort, le triangle EFH n'est pas rectangle en E.

Ex. 6 (suite)

(c) Le triangle EGH est rectangle en G : son hypoténuse est $[EH]$. $[EG]$ est un côté de l'angle droit et il touche le sommet E : c'est le côté adjacent à $\widehat{GEH}$. Le côté opposé est $[GH]$. Le même segment $[EG]$ est donc l'hypoténuse dans EFG, mais le côté adjacent dans EGH.

(d) Dans le triangle EFG rectangle en F, les deux angles aigus ont pour somme $90° : \widehat{EGF} = 90° - 32° = 58°$. Dans le triangle EGH rectangle en G : $\widehat{EHG} = 90° - 47° = 43°$.

(e) Dans le triangle EGH rectangle en G, l'angle $\widehat{EHG}$ a pour sommet H. Le côté adjacent est $[HG]$ et l'hypoténuse est $[EH]$. On écrit $\cos(\widehat{EHG}) = \frac{HG}{EH}$, donc $\cos(43°) = \frac{HG}{EH}$. Les rôles ont changé : $[GH]$ était le côté opposé à $\widehat{GEH}$.

Ex. 7 ★★★ Le cerf-volant de Yanis

(a) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires : $(RT) \perp (SU)$. Elles se coupent en O. Le triangle ROS est donc rectangle en O.

(b) Le triangle ROS est rectangle en O : l'hypoténuse est $[RS]$. L'angle $\widehat{OSR}$ a pour sommet S : le côté adjacent est $[OS]$, le côté opposé est $[OR]$.

(c) Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu : $OR = 80 \div 2 = 40$ cm et $OS = 60 \div 2 = 30$ cm. Dans le triangle ROS rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $RS^2 = 40^2 + 30^2 = 2\,500$, donc $RS = 50$ cm.

(d) Les côtés d'un losange ont la même longueur : $RS = ST = 50$ cm, et $RT = 80$ cm. Si le triangle RST était rectangle en S, d'après le théorème de Pythagore, on aurait $RT^2 = RS^2 + ST^2$. Or $RS^2 + ST^2 = 2\,500 + 2\,500 = 5\,000$ et $RT^2 = 6\,400$.
Donc RST n'est pas rectangle : il n'a pas d'hypoténuse.

(e) Dans le triangle ROS rectangle en O : $\cos(\widehat{ORS}) = \frac{OR}{RS} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ et $\cos(\widehat{OSR}) = \frac{OS}{RS} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Le cosinus diminue quand l'angle augmente. Comme $0{,}6 < 0{,}8$, c'est $\widehat{OSR}$ le plus grand.

Ex. 8 ★★★ La tyrolienne de Valloire

(a) $[AT]$ est en face de l'angle droit (en P) : c'est l'hypoténuse, le câble. L'hypoténuse n'est jamais le côté opposé à un angle aigu. L'angle $\widehat{TAP}$ a pour sommet A : le côté adjacent est $[AP]$ (le sol), le côté opposé est $[PT]$ (la tour), qui ne contient pas A.

Ex. 8 (suite)

(b) Le sommet d'un angle est la lettre du milieu : $\widehat{ATP}$ a pour sommet T. Le côté adjacent contient la lettre de l'angle droit et celle du sommet : c'est $[PT]$. Le côté opposé ne contient pas T : c'est $[AP]$.

(c) Dans le triangle APT rectangle en P : $\cos(\widehat{TAP}) = \frac{AP}{AT}$, donc $\cos(15°) = \frac{AP}{70}$. Alors $AP = 70 \times \cos(15°)$, soit $AP \approx 67{,}61$ m.

(d) Une longueur ne peut pas être négative. Le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1, donc AP doit être compris entre 0 et 70 m. La calculatrice de Tom était en mode radians. Il doit la passer en mode degrés : il obtiendra $AP \approx 67{,}61$ m.

2. *Écrire le cosinus d'un angle aigu*

Ex. 9 ★☆☆ Automatismes : repérer les côtés et nommer l'angle

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est $[KM]$.

(b) Pour l'angle $\widehat{KML}$: le côté adjacent est $[LM]$ (il part de M et ce n'est pas l'hypoténuse). Le côté opposé est $[KL]$.

(c) $\widehat{KLM}$ a son sommet en L (la lettre du milieu) : c'est l'angle droit. L'angle de sommet M s'écrit $\widehat{KML}$. Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos(\widehat{KML}) = \frac{LM}{KM}$.

(d) $[LM]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{LKM}$, pas le côté adjacent. Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{KL}{KM}$.

Ex. 10 ★☆☆ Automatismes : calculer un cosinus

(a) Dans le triangle RST rectangle en S : $\cos(\widehat{SRT}) = \frac{RS}{RT}$; $\cos(\widehat{SRT}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $\cos(\widehat{SRT}) = 0{,}6$ (valeur exacte).

(b) Dans le triangle DEF rectangle en E : $\cos(\widehat{EFD}) = \frac{EF}{DF}$; $\cos(\widehat{EFD}) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ (valeur exacte) ; $\cos(\widehat{EFD}) \approx 0{,}57$.

(c) On met les deux longueurs dans la même unité : $PQ = 36$ mm $= 3{,}6$ cm. Dans le triangle PQR rectangle en Q : $\cos(\widehat{QPR}) = \frac{PQ}{PR}$; $\cos(\widehat{QPR}) = \frac{3{,}6}{4{,}5} = \frac{4}{5}$; $\cos(\widehat{QPR}) = 0{,}8$.

(d) Erreur 1 : Lina a inversé les côtés, d'où un résultat plus grand que 1. Erreur 2 : un cosinus n'a pas d'unité. Dans le triangle UVW rectangle en V : $\cos(\widehat{VUW}) = \frac{UV}{UW}$; $\cos(\widehat{VUW}) = \frac{2{,}4}{3{,}9} = \frac{8}{13}$; $\cos(\widehat{VUW}) \approx 0{,}62$.

Ex. 11 ★☆☆ **Les deux cosinus d'un même triangle**

(a) Dans le triangle GHJ rectangle en H : $\cos(\widehat{HGJ}) = \frac{GH}{GJ}$; $\cos(\widehat{HGJ}) = \frac{6}{6{,}5} = \frac{12}{13}$ (valeur exacte) ; $\cos(\widehat{HGJ}) \approx 0{,}92$.

(b) Dans le triangle GHJ rectangle en H : $\cos(\widehat{HJG}) = \frac{HJ}{GJ}$; $\cos(\widehat{HJG}) = \frac{2{,}5}{6{,}5} = \frac{5}{13}$ (valeur exacte) ; $\cos(\widehat{HJG}) \approx 0{,}38$.

(c) $\frac{5}{13} < \frac{12}{13}$, donc $\cos(\widehat{HJG}) < \cos(\widehat{HGJ})$. Plus l'angle est grand, plus son cosinus est petit : $\widehat{HJG}$ est le plus grand des deux angles.

Ex. 12 ★★☆ **Petit ou grand triangle, même cosinus ?**

(a) Dans le triangle NOP rectangle en O : $\cos(\widehat{ONP}) = \frac{NO}{NP}$; $\cos(\widehat{ONP}) = \frac{3}{3{,}4} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$ (valeur exacte) ; $\cos(\widehat{ONP}) \approx 0{,}88$.

(b) Dans le triangle XYZ rectangle en Y : $\cos(\widehat{YXZ}) = \frac{XY}{XZ}$; $\cos(\widehat{YXZ}) = \frac{4{,}5}{5{,}1} = \frac{45}{51} = \frac{15}{17}$ (valeur exacte) ; $\cos(\widehat{YXZ}) \approx 0{,}88$.

(c) Non. Les deux cosinus sont égaux à $\frac{15}{17}$. Le cosinus dépend seulement de la mesure de l'angle, pas de la taille du triangle.

(d) En mode degrés : $\cos(28°) \approx 0{,}88$. On retrouve la même valeur approchée que dans les deux triangles.

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux sur le cosinus**

(a) Faux. Plus l'angle est grand, plus son cosinus est petit. Comme $70° > 25°$, on a $\cos(70°) < \cos(25°)$.

(b) Faux. Le cosinus n'est pas proportionnel à l'angle. $30°$ est plus petit que $60°$, donc $\cos(30°)$ est plus grand que $\cos(60°) = 0{,}5$: il ne peut pas valoir 0,25.

(c) Faux. L'hypoténuse est le plus long côté, donc $\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ est compris entre 0 et 1. Avec 1,25, Sacha a inversé les côtés : il faut $\cos(\widehat{EDF}) = \frac{DE}{DF}$.

(d) Faux. Un cosinus d'angle aigu est compris entre 0 et 1, donc il ne peut pas être négatif. La calculatrice de Jade est en mode radians. En mode degrés, on obtient $\cos(60°) = 0{,}5$.

Ex. 14 ★★★ **Un rectangle et sa diagonale**

(a) $KLMN$ est un rectangle, donc son angle en L est droit : le triangle KLM est rectangle en L et son hypoténuse est $[KM]$. On met tout dans la même unité : $LM = 200$ mm $= 20$ cm. D'après le théorème de Pythagore : $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 21^2 + 20^2 = 441 + 400 = 841$, donc $KM = \sqrt{841} = 29$ cm.

Ex. 14 (suite)

(b) Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{KL}{KM}$; $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{21}{29}$ (valeur exacte) ; $\cos(\widehat{LKM}) \approx 0{,}72$. En K, il y a trois angles : $\widehat{LKM}$, $\widehat{MKN}$ et $\widehat{LKN}$ (qui est droit). « $\widehat{K}$ » ne dit pas duquel on parle : il faut nommer l'angle avec trois lettres.

(c) $KLMN$ est un rectangle, donc le triangle KNM est rectangle en N et $KN = LM = 20$ cm. Dans le triangle KNM rectangle en N : $\cos(\widehat{MKN}) = \frac{KN}{KM}$; $\cos(\widehat{MKN}) = \frac{20}{29}$ (valeur exacte) ; $\cos(\widehat{MKN}) \approx 0{,}69$.

(d) $\frac{20}{29} < \frac{21}{29}$, donc $\cos(\widehat{MKN}) < \cos(\widehat{LKM})$. Or plus un angle est grand, plus son cosinus est petit. Donc $\widehat{MKN}$ est plus grand que $\widehat{LKM}$.

Ex. 15 ★★★ **L'échelle de Hugo**

(a) Première erreur : Hugo a inversé les côtés. Un cosinus est toujours plus petit que 1, donc 4 est forcément faux. Deuxième erreur : un cosinus n'a pas d'unité. Correction : dans le triangle PSH rectangle en S : $\cos(\widehat{SPH}) = \frac{PS}{PH}$; $\cos(\widehat{SPH}) = \frac{1{,}3}{5{,}2}$; $\cos(\widehat{SPH}) = 0{,}25$.

(b) Non. Pour l'angle $\widehat{SPH}$, $[SH]$ est le côté opposé, pas le côté adjacent : le côté adjacent est $[PS]$. Le quotient $\frac{SH}{PH}$ est le cosinus de l'autre angle aigu : $\cos(\widehat{PHS}) = \frac{SH}{PH}$.

(c) $\cos(\widehat{SPH}) = 0{,}25$ et $\cos(75°) \approx 0{,}259$. Donc $\cos(\widehat{SPH}) < \cos(75°)$. Plus l'angle est grand, plus son cosinus est petit, donc $\widehat{SPH} > 75°$. L'échelle est trop droite : elle est mal placée.

(d) On met les deux longueurs dans la même unité : $PS = 156$ cm $= 1{,}56$ m. Dans le triangle PSH rectangle en S : $\cos(\widehat{SPH}) = \frac{PS}{PH} = \frac{1{,}56}{5{,}2} = 0{,}3$. On a $0{,}259 < 0{,}3 < 0{,}5$, donc $\cos(75°) < \cos(\widehat{SPH}) < \cos(60°)$. Le cosinus diminue quand l'angle augmente, donc $60° < \widehat{SPH} < 75°$: l'échelle est bien placée.

Ex. 16 ★★★ **Le pignon du chalet**

(a) Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal coupe la base en son milieu. Donc H est le milieu de $[BC]$ et $BH = \frac{10{,}8}{2} = 5{,}4$ m.

(b) H est sur $[BC]$, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$. Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB}$; $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{5{,}4}{6{,}3}$; $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{54}{63} = \frac{6}{7}$.

(c) Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB}$; $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{6}{7}$. Calculatrice en mode degrés : $\widehat{ABC} = \widehat{ABH} = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)$; $\widehat{ABC} \approx 31{,}0°$.

Ex. 16 (suite)

(d) Léo : il a arrondi le quotient trop tôt. Il faut appliquer $\cos^{-1}$ à la valeur exacte $\frac{6}{7}$ et arrondir seulement à la fin, sinon on trouve 30,7° au lieu de 31,0°. Zoé : sa calculatrice est en mode radians. Il faut la régler en mode degrés pour obtenir 31,0°.

(e) Dans le triangle ABH rectangle en H, les deux angles aigus font 90° en tout : $\widehat{BAH} = 90° - \widehat{ABH} \approx 59{,}0°$. Le triangle est isocèle, donc la hauteur $[AH]$ partage l'angle en A en deux angles égaux : $\widehat{BAC} = 2 \times \widehat{BAH}$. Avec la valeur non arrondie gardée en mémoire : $\widehat{BAC} \approx 118{,}0°$.

3. *Calculer une longueur avec le cosinus*

Ex. 17 ★☆☆ Automatismes : multiplier ou diviser ?

(a) La longueur EF est en haut du quotient, donc on multiplie : $EF = 9 \times \cos(40°)$.

(b) Produit en croix avec $\frac{\cos(25°)}{1} = \frac{6}{GH}$: $GH = \frac{6 \times 1}{\cos(25°)} = \frac{6}{\cos(25°)}$. GH est en bas, donc on divise.

(c) Dans le triangle XYZ rectangle en Y : $\cos(\widehat{YXZ}) = \frac{XY}{XZ}$; $\cos(29°) = \frac{XY}{XZ}$; $XZ = \frac{XY}{\cos(29°)}$.

(d) KL est en bas, donc on divise : $KL = \frac{12}{0{,}8} = 15$.

(e) Un cosinus d'angle aigu est compris entre 0 et 1. Multiplier 8 par cos(35°) donne un nombre plus petit que 8 : c'est le côté adjacent quand l'hypoténuse mesure 8. Diviser 8 par cos(35°) donne un nombre plus grand que 8 : c'est l'hypoténuse quand le côté adjacent mesure 8.

Ex. 18 ★☆☆ Automatismes : calcul mental avec cos(60°)

(a) Dans le triangle ABC rectangle en A : $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$; $AB = 14 \times \cos(60°) = 14 \times 0{,}5$; $AB = 7$ cm.

(b) Dans le triangle DEF rectangle en E : $\cos(\widehat{EDF}) = \frac{DE}{DF}$; $DF = \frac{4{,}5}{\cos(60°)} = \frac{4{,}5}{0{,}5}$; $DF = 9$ cm (et on a bien $9 > 4{,}5$).

(c) Vrai : côté adjacent $= 3{,}8 \times 0{,}5 = 1{,}9$ m, soit 190 cm.

(d) Hypoténuse $= \frac{26}{0{,}5} = 52$ cm. Contrôle : $52 > 26$.

Ex. 19 ★☆☆ Côté adjacent ou hypoténuse ?

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{KL}{KM}$; $\cos(38°) = \frac{KL}{8{,}5}$; $KL = 8{,}5 \times \cos(38°)$; $KL \approx 6{,}7$ cm. Contrôle : $6{,}7 < 8{,}5$.

Ex. 19 (suite)

(b) Dans le triangle RST rectangle en S : $\cos(\widehat{STR}) = \frac{ST}{TR}$; $\cos(58°) = \frac{3{,}5}{TR}$; $TR = \frac{3{,}5}{\cos(58°)}$; $TR \approx 6{,}6$ cm. Contrôle : $6{,}6 > 3{,}5$.

(c) $DE = 0{,}45$ m $= 45$ cm. Dans le triangle DEF rectangle en F : $\cos(\widehat{EDF}) = \frac{DF}{DE}$; $\cos(27°) = \frac{DF}{45}$; $DF = 45 \times \cos(27°)$; $DF \approx 40{,}1$ cm.

Ex. 20 ★★☆ Le toboggan de Vannes

(a) Dans le triangle THB rectangle en H : $\cos(\widehat{TBH}) = \frac{HB}{TB}$; $\cos(34°) = \frac{3{,}9}{TB}$; $TB = \frac{3{,}9}{\cos(34°)}$; $TB \approx 4{,}70$ m. Contrôle : $4{,}70 > 3{,}9$.

(b) [TH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{TBH}$, pas le côté adjacent : ce quotient n'est pas le cosinus de $\widehat{TBH}$. Les deux angles aigus ont pour somme 90°, donc $\widehat{BTH} = 90° - 34° = 56°$.

(c) Dans le triangle THB rectangle en H, [TH] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BTH}$: $\cos(\widehat{BTH}) = \frac{TH}{TB}$; $\cos(56°) = \frac{TH}{TB}$; $TH = \frac{3{,}9}{\cos(34°)} \times \cos(56°)$; $TH \approx 2{,}63$ m.

Ex. 21 ★★☆ Trois élèves, trois erreurs

(a) UW est l'hypoténuse : elle doit être plus longue que le côté adjacent UV, qui mesure 5,6 cm. Or $3{,}82 < 5{,}6$. Noé a multiplié alors qu'il fallait diviser.

(b) Jade a arrondi le cosinus avant la fin du calcul. On garde cos(47°) non arrondi et on arrondit seulement le résultat : on trouve 8,21 cm, et non 8 cm.

(c) Sa calculatrice est en mode radians : $\frac{5{,}6}{\cos(47)} \approx -5{,}64$ en radians. Une longueur ne peut pas être négative. Il faut passer en mode degrés.

(d) Dans le triangle UVW rectangle en V : $\cos(\widehat{VUW}) = \frac{UV}{UW}$; $\cos(47°) = \frac{5{,}6}{UW}$; $UW = \frac{5{,}6}{\cos(47°)}$; $UW \approx 8{,}21$ cm. Contrôle : $8{,}21 > 5{,}6$.

Ex. 22 ★★★ La rampe de la médiathèque de Colmar

(a) Dans le triangle RHP rectangle en H : $\cos(\widehat{PRH}) = \frac{RH}{RP}$; $\cos(4°) = \frac{7{,}8}{RP}$; $RP = \frac{7{,}8}{\cos(4°)}$; $RP \approx 7{,}82$ m. Contrôle : $7{,}82 > 7{,}8$, l'hypoténuse est bien plus longue que le côté adjacent.

(b) RP est l'hypoténuse : elle doit être plus longue que le côté adjacent RH $= 7{,}8$ m. Or $7{,}78 < 7{,}8$. Yanis a multiplié alors que RP est en bas du quotient : il fallait diviser par cos(4°).

Ex. 22 **(suite)**

(c) Dans le triangle RHP rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore : $RP^2 = RH^2 + PH^2$, donc $PH^2 = RP^2 - 7{,}8^2$ (avec RP en mémoire) ; $PH \approx 0{,}55$ m, soit 55 cm.

(d) Dans le triangle RHP rectangle en H : $\cos(\widehat{PRH}) = \frac{RH}{RP}$; $\cos(4°) = \frac{RH}{8}$; $RH = 8 \times \cos(4°)$; $RH \approx 7{,}98$ m. Contrôle : $7{,}98 < 8$. Le projet, avec un sol de 7,8 m, respecte donc le règlement.

Ex. 23 ★★★ **Le toit du chalet de Morzine**

(a) Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiane : H est le milieu de [BC], donc $BH = 9{,}6 \div 2 = 4{,}8$ m.

(b) Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB}$; $\cos(32°) = \frac{4{,}8}{AB}$; $AB = \frac{4{,}8}{\cos(32°)}$; $AB \approx 5{,}66$ m.

(c) [AH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$: on change d'angle. $\widehat{BAH} = 90° - 32° = 58°$. Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB}$; $\cos(58°) = \frac{AH}{AB}$; $AH = \frac{4{,}8}{\cos(32°)} \times \cos(58°)$; $AH \approx 3{,}00$ m.

(d) 45 cm = 0,45 m. Longueur d'un chevron : $AB + 0{,}45 \approx 6{,}11$ m. Comme $6{,}11 > 6$, des chevrons de 6 m ne suffisent pas.

Ex. 24 ★★★ **Deux triangles rectangles accolés**

(a) Dans le triangle DEF rectangle en E : $\cos(\widehat{EDF}) = \frac{DE}{DF}$; $\frac{\cos(41°)}{1} = \frac{6{,}3}{DF}$; produit en croix : $DF = \frac{6{,}3 \times 1}{\cos(41°)}$; $DF \approx 8{,}3$ cm.

(b) Dans le triangle DFG rectangle en F : $\cos(\widehat{FDG}) = \frac{DF}{DG}$; $\cos(28°) = \frac{DF}{DG}$; $DG = \frac{DF}{\cos(28°)}$; $DG \approx 9{,}5$ cm. Hugo a utilisé DF arrondi : $8{,}3 \div \cos(28°) \approx 9{,}4$ cm. Arrondir en cours de calcul fausse le résultat : on arrondit seulement à la fin.

(c) Dans le triangle DFG rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore : $DG^2 = DF^2 + FG^2$, donc $FG^2 = DG^2 - DF^2$; $FG \approx 4{,}4$ cm.

(d) On utilise le cosinus seulement dans un triangle rectangle. Or le triangle DEG n'est pas rectangle : l'angle $\widehat{DEG}$ n'est pas droit, car G n'est pas sur la droite (EF). D'ailleurs $6{,}3 \div \cos(69°) \approx 17{,}6$ cm, très loin de $DG \approx 9{,}5$ cm.

4. *Calculer un angle avec cos⁻¹*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatisme : la touche cos⁻¹**

(a) $x = \cos^{-1}(0{,}8)$; $x \approx 37°$.

(b) On tape $\cos^{-1}(3 \div 7)$ avec les parenthèses : $z = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$; $z \approx 65°$.

(c) 0,97 est proche de 1, donc l'angle est petit (proche de 0°). $y = \cos^{-1}(0{,}97)$; $y \approx 14°$.

(d) Léa a utilisé la touche cos : elle a calculé le cosinus de 0,6°, pas un angle. Il faut la touche $\cos^{-1}$: $t = \cos^{-1}(0{,}6)$; $t \approx 53°$.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatisme : lire une table de cosinus**

(a) D'après la table, l'angle mesure environ 42°.

(b) 0,749 est compris entre 0,755 et 0,743, donc l'angle est compris entre 41° et 42°.

(c) $0{,}725 < 0{,}731$. Le cosinus diminue quand l'angle augmente, donc l'angle est plus grand que 43°.

(d) Le cosinus diminue quand l'angle augmente. Or $0{,}75 > 0{,}73 > 0{,}72$, donc $b < c < a$.

Ex. 27 ★☆☆ **Calculer un angle dans trois triangles**

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{KL}{KM}$; $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{5}{8}$; $\widehat{LKM} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$; $\widehat{LKM} \approx 51{,}3°$.

(b) Dans le triangle RST rectangle en S : $\cos(\widehat{STR}) = \frac{ST}{RT}$; $\cos(\widehat{STR}) = \frac{3{,}6}{4{,}8} = 0{,}75$; $\widehat{STR} = \cos^{-1}(0{,}75)$; $\widehat{STR} \approx 41{,}4°$.

(c) Dans le triangle EFG rectangle en F : $\cos(\widehat{EGF}) = \frac{FG}{EG}$; $\cos(\widehat{EGF}) = \frac{2{,}7}{9} = 0{,}3$; $\widehat{EGF} = \cos^{-1}(0{,}3)$; $\widehat{EGF} \approx 72{,}5°$.

Ex. 28 ★★☆ **Quatre élèves, quatre erreurs**

(a) Nora a inversé le quotient : $\frac{5{,}3}{3{,}7} \approx 1{,}432 > 1$, et un cosinus est toujours compris entre 0 et 1. Il faut côté adjacent ÷ hypoténuse : $\cos(\widehat{QPR}) = \frac{PQ}{PR} = \frac{3{,}7}{5{,}3}$.

(b) Hugo a arrondi le quotient avant d'utiliser $\cos^{-1}$. Dans le triangle PQR rectangle en Q : $\cos(\widehat{QPR}) = \frac{PQ}{PR} = \frac{3{,}7}{5{,}3}$; $\widehat{QPR} = \cos^{-1}(3{,}7 \div 5{,}3)$; $\widehat{QPR} \approx 45{,}7°$.

(c) Yanis a utilisé la touche cos au lieu de la touche $\cos^{-1}$: 0,99993 est le cosinus de 0,698°, pas un angle. Avec $\cos^{-1}(3{,}7 \div 5{,}3)$, on trouve $\widehat{QPR} \approx 45{,}7°$.

(d) Sa calculatrice est en mode radians : 0,798 n'est pas une mesure en degrés. Il doit la passer en mode degrés et retrouver $\widehat{QPR} \approx 45{,}7°$.

Ex. 29 ★★☆ **La rampe de la médiathèque**

(a) Dans le triangle ABC rectangle en B : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{4{,}77}{4{,}8} = \frac{159}{160}$. Ce cosinus vaut 0,99375, il est très proche de 1, donc l'angle est petit.

(b) $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{159}{160}\right)$; $\widehat{BAC} \approx 6{,}4°$.

(c) $6{,}4° > 5°$: la rampe ne respecte pas le règlement, elle est trop pentue.

(d) Les deux angles aigus d'un triangle rectangle ont une somme de 90° : $\widehat{ACB} \approx 90° - 6{,}4° = 83{,}6°$.

Ex. 30 ★★★ **Le toit de l'abri de jardin**

(a) H est le milieu de $[BC]$, donc $BH = 8{,}4 \div 2 = 4{,}2$ m. Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB} = \frac{4{,}2}{4{,}6} = \frac{21}{23}$.

(b) Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{21}{23}$; $\widehat{ABH} = \cos^{-1}\left(\frac{21}{23}\right)$; $\widehat{ABH} \approx 24°$.

(c) Dans le triangle ABH rectangle en H, les deux angles aigus ont pour somme 90° : $\widehat{BAH} \approx 90° - 24° = 66°$. La hauteur $[AH]$ est un axe de symétrie du triangle isocèle, donc $\widehat{BAC} \approx 2 \times 66° = 132°$.

(d) Le triangle ABC n'est pas rectangle (il est isocèle en A), donc on ne peut pas y utiliser le cosinus, et $[BC]$ n'est pas une hypoténuse. Il faut se placer dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB} = \frac{21}{23}$; $\widehat{ABC} = \widehat{ABH} \approx 24°$ (car H est sur $[BC]$), et non 57°.

(e) On connaît deux longueurs du triangle ABH rectangle en H : on utilise le théorème de Pythagore. $AB^2 = AH^2 + BH^2$, donc $AH^2 = 4{,}6^2 - 4{,}2^2 = 21{,}16 - 17{,}64 = 3{,}52$; $AH = \sqrt{3{,}52} \approx 1{,}88$ m.

Ex. 31 ★★★ **Deux triangles rectangles accolés**

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos(\widehat{LMK}) = \frac{LM}{KM} = \frac{2{,}5}{6{,}5} = \frac{5}{13}$; $\widehat{LMK} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67{,}4°$.

(b) Dans le triangle KLM rectangle en L, les deux angles aigus ont pour somme 90° : $\widehat{LKM} \approx 90° - 67{,}4° = 22{,}6°$.

(c) On connaît deux longueurs du triangle KLM rectangle en L : on utilise le théorème de Pythagore. $KL^2 = KM^2 - LM^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 42{,}25 - 6{,}25 = 36$, donc $KL = 6$ cm.

(d) Dans le triangle KLN rectangle en L, le côté adjacent à $\widehat{LKN}$ est $[KL]$: $\cos(\widehat{LKN}) = \frac{KL}{KN} = \frac{6}{7{,}2} = \frac{5}{6}$; $\widehat{LKN} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 33{,}6°$. Puis $\widehat{MKN} = \widehat{LKM} + \widehat{LKN} \approx 22{,}6° + 33{,}6° = 56{,}2°$.

Ex. 31 (suite)

(e) Non. Zoé a tapé $\cos^{-1}(0{,}83) \approx 33{,}9°$, alors que le quotient exact donne $\cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 33{,}6°$. Il faut appliquer $\cos^{-1}$ au quotient exact (fraction ou parenthèses) et arrondir seulement l'angle, à la fin.

Ex. 32 ★★★ **L'échelle d'Inès est-elle stable ?**

(a) Dans le triangle RST rectangle en S : $\cos(\widehat{STR}) = \frac{ST}{RT} = \frac{1{,}7}{4{,}5} = \frac{17}{45} \approx 0{,}378$.

(b) On a $0{,}375 < 0{,}378 < 0{,}391$. Le cosinus diminue quand l'angle augmente, donc $67° < \widehat{STR} < 68°$. Cet angle est compris entre 65° et 75° : l'échelle est stable.

(c) Dans le triangle RST rectangle en S : $\cos(\widehat{STR}) = \frac{17}{45}$; $\widehat{STR} = \cos^{-1}\left(\frac{17}{45}\right) \approx 67{,}8°$. Les deux angles aigus ont pour somme 90°, donc $\widehat{TRS} \approx 90° - 67{,}8° = 22{,}2°$.

(d) Sa calculatrice est en mode radians : 1,18 n'est pas une mesure en degrés (un angle de 1,18° avec le sol voudrait dire que l'échelle est presque couchée par terre). En mode degrés, on obtient $\cos^{-1}\left(\frac{17}{45}\right) \approx 67{,}8°$.

(e) Dans le triangle RST rectangle en S, avec $ST = 2$ m : $\cos(\widehat{STR}) = \frac{ST}{RT} = \frac{2}{4{,}5} = \frac{4}{9}$; $\widehat{STR} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \approx 63{,}6°$. Or $63{,}6° < 65°$: l'échelle n'est plus stable.

5. *Choisir le bon outil : cosinus ou Pythagore*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : quel outil ?**

(a) On connaît deux longueurs et on cherche la troisième : on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle PQR rectangle en Q.

(b) On connaît un angle aigu et on cherche l'autre : 90° − angle. Ici, $\widehat{UVW} = 90° - 41° = 49°$.

(c) On connaît deux longueurs et on cherche un angle : $[AC]$ est le côté adjacent à $\widehat{BAC}$ et $[AB]$ est l'hypoténuse. On calcule $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{5{,}2}{8}$, puis on utilise la touche $\cos^{-1}$.

(d) On connaît un angle et une longueur : $[XY]$ est le côté adjacent à $\widehat{XYZ}$ et $[YZ]$ est l'hypoténuse. On utilise le cosinus : $XY = 6 \times \cos(47°)$.

(e) $[HK]$ est le côté opposé à $\widehat{HGK}$: on change d'angle. $\widehat{HKG} = 90° - 35° = 55°$ et $[HK]$ est le côté adjacent à $\widehat{HKG}$. On utilise le cosinus : $GK = \frac{3}{\cos(55°)}$.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : changer d'angle**

(a) L'hypoténuse est $[RT]$, le côté en face de l'angle droit en S. Le côté opposé à $\widehat{SRT}$ est $[ST]$.

(b) Dans le triangle RST rectangle en S, les deux angles aigus ont pour somme $90°$.
Donc $\widehat{STR} = 90° - 23° = 67°$.

(c) $[ST]$ est le côté adjacent à $\widehat{STR}$: il relie le sommet T au sommet de l'angle droit, et ce n'est pas l'hypoténuse. On peut donc utiliser $\cos(\widehat{STR})$.

(d) Dans le triangle RST rectangle en S : $\cos(\widehat{STR}) = \frac{ST}{RT}$; $\cos(67°) = \frac{ST}{7}$; $ST = 7 \times \cos(67°)$; $ST \approx 2{,}74$ cm.

Ex. 35 ★★☆ **Deux méthodes pour un même côté**

(a) Dans le triangle DEF rectangle en E : $\cos(\widehat{EDF}) = \frac{DE}{DF}$; $\cos(38°) = \frac{DE}{9}$; $DE = 9 \times \cos(38°)$; $DE \approx 7{,}09$ cm.

(b) Dans le triangle DEF rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore : $DF^2 = DE^2 + EF^2$.
Donc $EF^2 = 9^2 - DE^2 \approx 81 - 50{,}30 = 30{,}70$, et $EF \approx 5{,}54$ cm.

(c) $\widehat{DFE} = 90° - 38° = 52°$, et $[EF]$ est le côté adjacent à $\widehat{DFE}$. Dans le triangle DEF rectangle en E : $\cos(\widehat{DFE}) = \frac{EF}{DF}$; $\cos(52°) = \frac{EF}{9}$; $EF = 9 \times \cos(52°)$; $EF \approx 5{,}54$ cm.

(d) Les deux méthodes donnent $EF \approx 5{,}54$ cm : les résultats sont cohérents. De plus, $9 > 7{,}09$ et $9 > 5{,}54$: l'hypoténuse $[DF]$ est bien le plus long côté.

Ex. 36 ★★☆ **Pythagore, puis cosinus**

(a) Dans le triangle MNP rectangle en N, d'après le théorème de Pythagore : $MP^2 = NM^2 + NP^2 = 16 + 49 = 65$.
Donc $MP = \sqrt{65}$ cm (valeur exacte) et $MP \approx 8{,}1$ cm.

(b) Dans le triangle MNP rectangle en N : $\cos(\widehat{NMP}) = \frac{NM}{MP}$; $\cos(\widehat{NMP}) = \frac{4}{\sqrt{65}}$; $\widehat{NMP} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$; $\widehat{NMP} \approx 60{,}3°$.

(c) Zoé calcule $\cos^{-1}\left(\frac{4}{8{,}1}\right) \approx 60{,}4°$. Elle a arrondi MP avant le cosinus, et cet arrondi change le dixième du résultat. Il faut garder la valeur exacte $\sqrt{65}$ et n'arrondir qu'à la fin.

(d) Dans le triangle MNP rectangle en N, les angles aigus ont pour somme $90°$.
Donc $\widehat{NPM} \approx 90° - 60{,}3° = 29{,}7°$.

Ex. 37 ★★☆ **Trois erreurs à corriger**

(a) $[LM]$ est le côté opposé à $\widehat{LKM}$, pas le côté adjacent. Le cosinus n'utilise jamais le côté opposé : Tom aurait dû passer à l'autre angle aigu.

(b) Un cosinus est compris entre 0 et 1. En multipliant par $\cos(56°)$, on trouve moins que 5 cm : l'hypoténuse KM serait plus courte que LM, ce qui est impossible. Il fallait diviser par $\cos(56°)$.

(c) Sa calculatrice est en mode radians : $5 \div \cos(56)$ donne alors environ 5,86. Il doit la mettre en mode degrés.

(d) Dans le triangle KLM rectangle en L :
$\widehat{LMK} = 90° - 34° = 56°$, et $[LM]$ est le côté adjacent à $\widehat{LMK}$. On a $\cos(\widehat{LMK}) = \frac{LM}{KM}$; $\cos(56°) = \frac{5}{KM}$; $KM = \frac{5}{\cos(56°)}$; $KM \approx 8{,}94$ cm.

Ex. 38 ★★★ **Deux triangles rectangles accolés**

(a) Je connais deux longueurs et je cherche la troisième : théorème de Pythagore. Dans le triangle KHL rectangle en H : $KL^2 = KH^2 + HL^2$; $KH^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 42{,}25 - 6{,}25 = 36$;
Donc $KH = 6$ cm.

(b) Dans le triangle KHL rectangle en H : $\cos(\widehat{KLH}) = \frac{HL}{KL} = \frac{2{,}5}{6{,}5}$; $\widehat{KLH} = \cos^{-1}\left(\frac{2{,}5}{6{,}5}\right) \approx 67{,}4°$. Ensuite $\widehat{LKH} \approx 90° - 67{,}4° = 22{,}6°$.

(c) $[KH]$ est le côté opposé à $\widehat{HMK}$: je change d'angle. $\widehat{HKM} = 90° - 40° = 50°$, et $[KH]$ est le côté adjacent à $\widehat{HKM}$. Dans le triangle KHM rectangle en H : $\cos(\widehat{HKM}) = \frac{KH}{KM}$; $\cos(50°) = \frac{6}{KM}$; $KM = \frac{6}{\cos(50°)}$; $KM \approx 9{,}33$ cm
(plus long que KH : c'est cohérent pour une hypoténuse).

(d) $\widehat{LKM} = \widehat{LKH} + \widehat{HKM} \approx 22{,}6° + 50° = 72{,}6°$.
Comme $72{,}6° \neq 90°$, le triangle KLM n'est pas rectangle en K.

Ex. 39 ★★★ **Le toit de la maison de Noé**

(a) H est le milieu de $[BC]$, donc $BH = 8{,}4 \div 2 = 4{,}2$ m.
Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB}$; $\cos(32°) = \frac{4{,}2}{AB}$; $AB = \frac{4{,}2}{\cos(32°)}$; $AB \approx 4{,}95$ m.

(b) $[AB]$ est l'hypoténuse du triangle ABH rectangle en H : c'est son plus long côté, donc on doit avoir $AB > BH = 4{,}2$ m. Or $3{,}56 < 4{,}2$: c'est impossible. Maël a multiplié au lieu de diviser : pour trouver l'hypoténuse, on calcule $AB = \frac{4{,}2}{\cos(32°)}$.

Ex. 39 **(suite)**

(c) $[AH]$ est le côté opposé à $\widehat{ABH}$: je change d'angle. $\widehat{BAH} = 90° - 32° = 58°$. Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB}$; $AH = AB \times \cos(58°) = \frac{4{,}2}{\cos(32°)} \times \cos(58°)$; $AH \approx 2{,}62$ m.
(Autre méthode : Pythagore donne aussi $AH \approx 2{,}62$ m.)

(d) Je connais le côté adjacent et l'hypoténuse, je cherche l'angle : touche $\cos^{-1}$. Dans le demi-pignon du voisin, triangle rectangle dont l'hypoténuse est un pan : $\cos(\text{pente}) = \frac{4{,}6}{5{,}5}$; $\text{pente} = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}6}{5{,}5}\right) \approx 33{,}2°$. Comme $33{,}2° \geq 30°$, le toit du voisin convient.

Ex. 40 ★★★ **Le losange de Lina**

(a) O est le milieu de $[AC]$, donc $OA = 11{,}2 \div 2 = 5{,}6$ cm. Dans le triangle AOB rectangle en O : $\cos(\widehat{OAB}) = \frac{OA}{AB} = \frac{5{,}6}{7}$; $\widehat{OAB} = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}6}{7}\right) \approx 36{,}9°$.

(b) Sa calculatrice est en mode radians : $\cos^{-1}(0{,}8) \approx 0{,}64$ en radians. Il faut passer en mode degrés pour trouver $\widehat{OAB} \approx 36{,}9°$
(un angle de $0{,}64°$ serait d'ailleurs bien trop petit sur la figure).

(c) Dans le triangle AOB rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = AB^2 - OA^2 = 7^2 - 5{,}6^2 = 49 - 31{,}36 = 17{,}64$; $OB = 4{,}2$ cm (valeur exacte).
Donc $BD = 2 \times 4{,}2 = 8{,}4$ cm.

(d) $[OB]$ est le côté opposé à $\widehat{OAB}$: le calcul d'Hugo donne en fait $OA \approx 5{,}6$ cm. Il faut changer d'angle : $\widehat{ABO} \approx 90° - 36{,}9° = 53{,}1°$. Dans le triangle AOB rectangle en O : $\cos(\widehat{ABO}) = \frac{OB}{AB}$; $OB = 7 \times \cos(53{,}1°) \approx 4{,}20$ cm. On retrouve 4,2 cm : Pythagore donne la valeur exacte, la méthode du cosinus une valeur approchée, car l'angle a été arrondi.

(e) Non. $\widehat{ABO} = 90° - \widehat{OAB} \approx 53{,}13°$, donc $\widehat{ABC} = 2 \times \widehat{ABO} \approx 106{,}3°$. C'est $\widehat{BAD} = 2 \times \widehat{OAB} \approx 73{,}7°$ qui mesure environ $73{,}7°$. Vérification : $106{,}3° + 73{,}7° = 180°$.

6. *Problèmes*

Ex. 41 ★☆☆ **L'échelle contre le mur**

(a) Le mur est vertical et le sol horizontal : ils sont perpendiculaires, donc le triangle EMF est rectangle en M.

(b) L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est [EF].

Ex. 41 **(suite)**

(c) Pour l'angle $\widehat{EFM}$: le côté adjacent est [FM] et le côté opposé est [EM].

(d) Non : MF est un côté de l'angle droit, il est plus court que l'hypoténuse $EF = 4{,}8$ m. Or $5{,}3 \text{ m} > 4{,}8$ m : impossible.

(e) Deux longueurs pour la troisième : le théorème de Pythagore donne EM. Dans le triangle EMF rectangle en M : $\cos(\widehat{EFM}) = \frac{FM}{EF} = \frac{1{,}6}{4{,}8} = \frac{1}{3}$.

Ex. 42 ★☆☆ **Le câble du téléski**

(a) Dans le triangle DPA rectangle en P : $\cos(\widehat{ADP}) = \frac{DP}{DA}$; $\cos(18°) = \frac{850}{DA}$; $DA = \frac{850}{\cos(18°)}$; $DA \approx 894$ m. Le câble du téléski mesure environ 894 m.

(b) Dans le triangle DPA rectangle en P, les deux angles aigus ont pour somme $90°$: $\widehat{DAP} = 90° - 18° = 72°$.

(c) 808 m est plus petit que $DP = 850$ m, or l'hypoténuse DA est le plus long côté : impossible. Nora a multiplié au lieu de diviser : $DA = 850 \div \cos(18°)$.

Ex. 43 ★★☆ **La rampe de la médiathèque**

(a) $RB = 4{,}2$ m $= 420$ cm. Dans le triangle RHB rectangle en H : $\cos(\widehat{BRH}) = \frac{RH}{RB} = \frac{418}{420} = \frac{209}{210}$.

(b) $\widehat{BRH} = \cos^{-1}\left(\frac{418}{420}\right) \approx 5{,}6°$. Comme $5{,}6° > 5°$, la rampe n'est pas conforme.

(c) Pour la nouvelle rampe, dans le triangle RHB rectangle en H : $\cos(\widehat{BRH}) = \frac{RH}{RB}$; $\cos(5°) = \frac{RH}{420}$; $RH = 420 \times \cos(5°)$; $RH \approx 418{,}4$ cm. La nouvelle distance horizontale est d'environ 418,4 cm.

Ex. 44 ★★☆ **Le toit de la maison**

(a) [AH] est la hauteur issue de A : elle est perpendiculaire à [BC], donc le triangle ABH est rectangle en H.

(b) [AH] est le côté opposé à $\widehat{ABH}$: je change d'angle. $\widehat{BAH} = 90° - 32° = 58°$. Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB}$; $\cos(58°) = \frac{AH}{5{,}4}$; $AH = 5{,}4 \times \cos(58°)$; $AH \approx 2{,}86$ m.

(c) Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB}$; $BH = 5{,}4 \times \cos(32°) \approx 4{,}58$ m. Le triangle est isocèle, donc H est le milieu de [BC] : $BC = 2 \times 5{,}4 \times \cos(32°) \approx 9{,}16$ m. La maison mesure environ 9,16 m de large.

Ex. 45 ★★☆ **La couture de la voile**

(a) Dans le triangle EFG rectangle en F : $\cos(\widehat{FEG}) = \frac{EF}{EG} = \frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{3}{5}$.

(b) Dans le triangle EHF rectangle en H : $\cos(\widehat{FEG}) = \frac{EH}{EF}$; $\frac{3}{5} = \frac{EH}{4{,}5}$; $EH = 4{,}5 \times \frac{3}{5}$; $EH = 2{,}7$ m (valeur exacte).

(c) Elle trouve $EH \approx 2{,}71$ m. L'angle vaut en fait $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53{,}13°$: en arrondissant l'angle trop tôt, elle perd la valeur exacte $EH = 2{,}7$ m.

(d) Deux longueurs pour la troisième : Pythagore. Dans le triangle EFG rectangle en F : $FG^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2 = 56{,}25 - 20{,}25 = 36$, donc $FG = 6$ m.

Ex. 46 ★★★ **Le toboggan du parc aquatique**

(a) (TH) est verticale et le sol est horizontal, donc (TH) $\perp$ (HS) : le triangle THS est rectangle en H. Son hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : [TS].

(b) [TH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{TSH}$, pas le côté adjacent. Le cosinus utilise seulement le côté adjacent et l'hypoténuse : $\cos(\widehat{TSH}) = \frac{HS}{TS}$. Comme on connaît TH, il faut passer à l'angle $\widehat{STH}$.

(c) $TH = 390$ cm $= 3{,}9$ m. [TH] est le côté adjacent à $\widehat{STH}$. Dans le triangle THS rectangle en H : $\cos(\widehat{STH}) = \frac{TH}{TS} = \frac{3{,}9}{7{,}2} = \frac{13}{24}$; $\widehat{STH} = \cos^{-1}\left(\frac{13}{24}\right) \approx 57{,}2°$. Puis $\widehat{TSH} = 90° - \widehat{STH} \approx 32{,}8°$.

(d) $\widehat{TSH} \approx 32{,}8°$ et $32{,}8° < 35°$: l'angle ne dépasse pas 35°, donc le toboggan est conforme.

(e) On connaît deux longueurs et on cherche la troisième : on utilise le théorème de Pythagore. Dans le triangle THS rectangle en H : $HS^2 = TS^2 - TH^2 = 7{,}2^2 - 3{,}9^2 = 51{,}84 - 15{,}21 = 36{,}63$; $HS = \sqrt{36{,}63} \approx 6{,}05$ m. Le bas du toboggan est à environ 6,05 m du point H.

Ex. 47 ★★★ **Le cerf-volant d'Inès**

(a) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu O.
Donc (KM) $\perp$ (LN) : le triangle KOL est rectangle en O. $KO = \frac{KM}{2} = \frac{112}{2} = 56$ cm.

(b) Dans le triangle KOL rectangle en O : $\cos(\widehat{LKO}) = \frac{KO}{KL} = \frac{56}{65}$ (fraction irréductible) ; $\widehat{LKO} = \cos^{-1}\left(\frac{56}{65}\right) \approx 30{,}5°$. Puis $\widehat{KLO} = 90° - \widehat{LKO} \approx 59{,}5°$.

(c) Sa calculatrice est en mode radians au lieu du mode degrés. Un angle de 0,53° serait presque nul : le cerf-volant serait tout plat, ce qui ne correspond pas à la figure. En mode degrés, on obtient 30,5°.

Ex. 47 (suite)

(d) On connaît deux longueurs du triangle KOL et on cherche la troisième : on utilise le théorème de Pythagore. Dans le triangle KOL rectangle en O : $LO^2 = KL^2 - KO^2 = 65^2 - 56^2 = 4\,225 - 3\,136 = 1\,089$; $LO = 33$ cm.
Donc $LN = 2 \times 33 = 66$ cm. Inès doit acheter une baguette de 66 cm.

Ex. 48 ★★★ **Le mât et ses deux haubans**

(a) On connaît deux longueurs du triangle MPA et on cherche la troisième : théorème de Pythagore. Dans le triangle MPA rectangle en P : $MP^2 = MA^2 - AP^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$; $MP = 12$ m.

(b) Dans le triangle MPA rectangle en P : $\cos(\widehat{MAP}) = \frac{AP}{MA} = \frac{5}{13}$; $\widehat{MAP} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67{,}4°$. Comme $67{,}4° \geq 50°$, le hauban [MA] respecte la règle.

(c) Dans le triangle MPB rectangle en P : $\cos(\widehat{PMB}) = \frac{MP}{MB}$; $\cos(42°) = \frac{12}{MB}$; $MB = \frac{12}{\cos(42°)}$; $MB \approx 16{,}15$ m. Donc MB > MA : le hauban [MB] est plus long d'environ 3,15 m.

(d) $\widehat{MBP} = 90° - 42° = 48°$. [PB] est opposé à $\widehat{PMB}$ mais adjacent à $\widehat{MBP}$. Dans le triangle MPB rectangle en P : $\cos(\widehat{MBP}) = \frac{PB}{MB}$; $PB = \frac{12}{\cos(42°)} \times \cos(48°) \approx 10{,}80$ m. Comme $48° < 50°$, le hauban [MB] ne respecte pas la règle.

(e) A, P et B sont alignés et P est entre A et B : $AB = AP + PB \approx 5 + 10{,}80 = 15{,}80$ m. Les deux points d'ancrage sont à environ 15,80 m l'un de l'autre.