1. Rappels de 4e : côtés et cosinus

Ex. 1 ★☆☆ **Nommer les côtés d'un triangle à l'envers**

(a) L'hypoténuse est en face de l'angle droit, qui est en L : c'est [KM]. C'est le plus long côté, même s'il est en bas de la figure.

(b) Le sommet de $\widehat{LKM}$ est K (la lettre du milieu). Le côté adjacent est le côté de l'angle droit qui passe par K : c'est [KL]. [KM] passe aussi par K, mais c'est l'hypoténuse.

(c) Le côté opposé est le côté de l'angle droit en face de K : c'est [LM].

(d) Le sommet de $\widehat{KML}$ est M. Le côté adjacent est [ML] et le côté opposé est [KL] : les rôles s'échangent quand on change d'angle, mais l'hypoténuse reste [KM].

(e) Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos(\widehat{KML}) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{ML}{KM}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Le cosinus à la calculatrice**

(a) $\cos(52°) \approx 0{,}62$.

(b) L'angle cherché est $\cos^{-1}(0{,}35) \approx 69{,}5°$.

(c) Un cosinus d'angle aigu est toujours entre 0 et 1, donc $-0{,}95$ est impossible : la calculatrice de Yanis était en mode radians. En mode degrés, $\cos(60°) = 0{,}5$.

(d) Dans le triangle EFG rectangle en F, [EF] est le côté adjacent à $\widehat{FEG}$ et [EG] est l'hypoténuse : $\cos(\widehat{FEG}) = \dfrac{EF}{EG} = \dfrac{3{,}6}{5} = 0{,}72$. Pour retrouver l'angle, il faut la touche inverse : $\widehat{FEG} = \cos^{-1}(0{,}72) \approx 43{,}9°$.

(e) Le cosinus diminue quand l'angle augmente, donc $\cos(75°) < \cos(48°) < \cos(20°)$.

Ex. 3 ★★☆ **Un triangle penché et ses deux angles aigus**

(a) $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{7}{4{,}2} \approx 1{,}67 > 1$, mais un cosinus est toujours compris entre 0 et 1. Ahmed a inversé le quotient. [PR] est en face de l'angle droit, c'est donc l'hypoténuse, et [PQ] est le côté adjacent à $\widehat{QPR}$ (sommet P) : $\cos(\widehat{QPR}) = \dfrac{PQ}{PR}$.

(b) Dans le triangle PQR rectangle en Q : $\cos(\widehat{QPR}) = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{4{,}2}{7} = 0{,}6$, donc $\widehat{QPR} = \cos^{-1}(0{,}6) \approx 53{,}1°$.

(c) Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus font 90° au total : $\widehat{PRQ} \approx 90° - 53{,}1° = 36{,}9°$.

Ex. 4 ★★☆ **L'échelle contre le garage**

(a) $1{,}3 \times \cos(72°) \approx 0{,}40$ m. Or l'échelle [AB] est l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en C : elle doit être plus longue que $BC = 1{,}3$ m. AB est au dénominateur du cosinus, donc il fallait diviser et non multiplier.

(b) Dans le triangle ABC rectangle en C, [BC] est le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ et [AB] est l'hypoténuse : $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BC}{AB}$, donc $AB = \dfrac{1{,}3}{\cos(72°)} \approx 4{,}21$ m.

(c) L'échelle mesure toujours AB, et on garde la valeur de la calculatrice sans l'arrondir. Dans le nouveau triangle rectangle : $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{1{,}8}{AB}$, donc $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1{,}8}{AB}\right) \approx 64{,}7°$.

Ex. 5 ★★★ **Prouver l'angle droit avant le cosinus**

(a) Le plus long côté est [UW]. D'une part $UW^2 = 8{,}7^2 = 75{,}69$. D'autre part $UV^2 + VW^2 = 6^2 + 6{,}3^2 = 36 + 39{,}69 = 75{,}69$. Comme $UW^2 = UV^2 + VW^2$, la réciproque du théorème de Pythagore dit que le triangle UVW est rectangle en V, le sommet en face de [UW].

(b) Le sommet de $\widehat{VUW}$ est U. Dans le triangle UVW rectangle en V, l'hypoténuse est [UW] et le côté adjacent à $\widehat{VUW}$ est [UV] : $\cos(\widehat{VUW}) = \dfrac{UV}{UW} = \dfrac{6}{8{,}7}$, donc $\widehat{VUW} = \cos^{-1}\left(\dfrac{6}{8{,}7}\right) \approx 46{,}4°$.

(c) Léa a tort : le sommet de $\widehat{UWV}$ est W, et le côté de l'angle droit qui touche W est [VW]. [UV] est le côté opposé à cet angle.
Donc $\cos(\widehat{UWV}) = \dfrac{VW}{UW} = \dfrac{6{,}3}{8{,}7}$, et $\widehat{UWV} = \cos^{-1}\left(\dfrac{6{,}3}{8{,}7}\right) \approx 43{,}6°$.

(d) Les deux angles aigus d'un triangle rectangle ont pour somme 90°. Ici, $46{,}4° + 43{,}6° = 90°$: les résultats sont cohérents.

(e) Dans ce triangle rectangle en V, [UV] est le côté adjacent à $\widehat{VUW}$ et [UW] est l'hypoténuse : $\cos(60°) = \dfrac{UV}{8{,}7}$. L'inconnue est en haut, donc on multiplie : $UV = 8{,}7 \times \cos(60°) = 8{,}7 \times 0{,}5 = 4{,}35$ cm.

Ex. 6 ★★★ **Le téléphérique en deux tronçons**

(a) Le triangle AHB est rectangle en H. L'hypoténuse est le côté en face de H : c'est [AB]. Le côté adjacent à $\widehat{BAH}$ (sommet A) est le côté de l'angle droit qui touche A : c'est [AH].

Ex. 6 **(suite)**

(b) Dans le triangle AHB rectangle en H : $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB} = \frac{1\,100}{1\,250} = 0{,}88$, donc $\widehat{BAH} = \cos^{-1}(0{,}88) \approx 28°$.

(c) La calculatrice de Tom n'est pas en mode degrés : 0,49 n'est pas une mesure en degrés. Un angle de 0,49° donnerait un câble presque horizontal, ce qui est impossible pour un téléphérique qui monte. En mode degrés, on trouve environ 28°.

(d) Dans le triangle AHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore : $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 1\,562\,500 - 1\,210\,000 = 352\,500$, donc $BH = \sqrt{352\,500} \approx 594$ m.

(e) Dans le triangle BKC rectangle en K, [BK] est le côté adjacent à $\widehat{CBK}$ et [BC] est l'hypoténuse : $\cos(35°) = \frac{BK}{BC}$. L'inconnue est en bas, donc on divise : $BC = \frac{600}{\cos(35°)} \approx 732$ m.

Ex. 7 ★★★ **Un angle, deux triangles rectangles**

(a) Le triangle JHK est rectangle en H (car (JH) est une hauteur). Son hypoténuse est en face de H : c'est [JK], et non [KL]. Dans JKL, rectangle en J : $\cos(\widehat{JKL}) = \frac{JK}{KL}$. Comme H est sur [KL], $\widehat{JKH} = \widehat{JKL}$. Dans JHK : $\cos(\widehat{JKL}) = \frac{KH}{JK}$.

(b) Dans le triangle JKL rectangle en J : $\cos(\widehat{JKL}) = \frac{JK}{KL} = \frac{4}{9}$, donc $\widehat{JKL} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \approx 63{,}6°$.

(c) Les deux écritures sont égales : $\frac{KH}{JK} = \frac{4}{9}$. L'inconnue est en haut, donc on multiplie : $KH = 4 \times \frac{4}{9} = \frac{16}{9} \approx 1{,}78$ cm.

(d) Non. [KL] touche bien L, mais c'est l'hypoténuse du triangle JKL, qui n'est jamais le côté adjacent. Le côté adjacent à $\widehat{JLK}$ est [JL]. Les angles aigus de JKL sont complémentaires, donc $\widehat{JLK} = 90° - \widehat{JKL} \approx 90° - 63{,}6° = 26{,}4°$.

(e) Le sommet de $\widehat{KJH}$ est la lettre du milieu : J. Dans le triangle JHK rectangle en H, le côté adjacent est [JH] et le côté opposé est [KH]. Les angles aigus de JHK sont complémentaires, donc $\widehat{KJH} = 90° - \widehat{JKH} \approx 90° - 63{,}6° = 26{,}4°$.

2. *Écrire le sinus et la tangente, choisir la formule (SOH-CAH-TOA)*

Ex. 8 ★★★ **Automatisme : écrire le sinus et la tangente avec les lettres**

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L, l'hypoténuse est [KM] (le côté opposé à l'angle droit). [LM] est le côté opposé à l'angle $\widehat{LKM}$: $\sin(\widehat{LKM}) = \frac{LM}{KM}$.

(b) L'angle a changé : pour $\widehat{KML}$, le côté opposé est [KL] et l'hypoténuse reste [KM], donc $\sin(\widehat{KML}) = \frac{KL}{KM}$.

(c) Non. [KM] est l'hypoténuse, or la tangente n'utilise jamais l'hypoténuse. Pour $\widehat{KML}$, [KL] est le côté opposé et [LM] le côté adjacent : $\tan(\widehat{KML}) = \frac{KL}{LM}$.

(d) [LM] est le côté opposé à l'angle $\widehat{LKM}$ et [KL] le côté adjacent.
Donc $\frac{LM}{KL} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \tan(\widehat{LKM})$: c'est la tangente de l'angle $\widehat{LKM}$.

Ex. 9 ★★★ **Automatisme : SOH, CAH ou TOA ?**

(a) Depuis $\widehat{GEF}$, [FG] est le côté opposé et [EF] l'hypoténuse. Opposé et hypoténuse, c'est SOH : $\sin(\widehat{GEF}) = \frac{FG}{EF}$.

(b) Non. Depuis $\widehat{GEF}$, [FG] est le côté opposé et [EG] le côté adjacent. L'hypoténuse n'intervient pas, donc ce n'est pas le cosinus. Opposé et adjacent, c'est TOA : $\tan(\widehat{GEF}) = \frac{FG}{EG}$.

(c) L'angle est maintenant en F : [FG] est le côté adjacent à $\widehat{EFG}$ et [EF] l'hypoténuse. Adjacent et hypoténuse, c'est CAH : $\cos(\widehat{EFG}) = \frac{FG}{EF}$.

(d) Depuis $\widehat{GEF}$, [EG] est le côté adjacent et [EF] l'hypoténuse. C'est CAH, donc on utilise la touche $\cos^{-1}$: $\widehat{GEF} = \cos^{-1}\left(\frac{EG}{EF}\right)$
(calculatrice en mode degrés).

(e) SOH : sinus = opposé ÷ hypoténuse. TOA : tangente = opposé ÷ adjacent, sans l'hypoténuse.

Ex. 10 ★★★ **Valeur exacte avant l'arrondi**

(a) Dans le triangle PQR rectangle en Q, [QR] est le côté opposé à $\widehat{QPR}$ et [PR] est l'hypoténuse : $\sin(\widehat{QPR}) = \frac{QR}{PR} = \frac{4{,}2}{5{,}8} = \frac{21}{29} \approx 0{,}72$.

(b) [QR] est le côté opposé et [PQ] le côté adjacent : $\tan(\widehat{QPR}) = \frac{QR}{PQ} = \frac{4{,}2}{4} = \frac{21}{20} = 1{,}05$. Ce résultat est plus grand que 1, et c'est possible : la tangente n'utilise pas l'hypoténuse, et ici le côté opposé est plus long que le côté adjacent.

(c) Pour $\widehat{PRQ}$, les rôles s'échangent : [PQ] est le côté opposé et [QR] le côté adjacent.
Donc $\tan(\widehat{PRQ}) = \frac{PQ}{QR} = \frac{4}{4{,}2} = \frac{20}{21} \approx 0{,}95$.

Ex. 10 **(suite)**

(d) [PQ] est le côté opposé à $\widehat{PRQ}$ et [PR] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{PRQ}) = \frac{PQ}{PR} = \frac{4}{5{,}8} = \frac{20}{29} \approx 0{,}69$. Il est plus petit que $\tan(\widehat{PRQ}) \approx 0{,}95$: les deux quotients ont le même numérateur PQ, mais l'hypoténuse PR $= 5{,}8$ cm est plus longue que le côté adjacent QR $= 4{,}2$ cm.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux : deux élèves et un triangle**

(a) Faux. $\frac{UW}{VW} = \frac{12{,}5}{10} = 1{,}25$, et un sinus plus grand que 1 est impossible : les côtés sont inversés. Dans le triangle UVW rectangle en V, [VW] est le côté opposé à $\widehat{VUW}$ et [UW] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{VUW}) = \frac{VW}{UW} = \frac{10}{12{,}5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

(b) Faux. [UW] est l'hypoténuse, or la tangente ne l'utilise jamais. [VW] est le côté opposé et [UV] le côté adjacent : $\tan(\widehat{VUW}) = \frac{VW}{UV} = \frac{10}{7{,}5} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$. Une tangente plus grande que 1, c'est possible.

(c) Pour $\widehat{UWV}$, le côté opposé est [UV] et le côté adjacent est [VW] : $\tan(\widehat{UWV}) = \frac{UV}{VW} = \frac{7{,}5}{10} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Ce n'est pas la même valeur que $\tan(\widehat{VUW}) = \frac{4}{3}$: pour l'autre angle aigu, le côté opposé et le côté adjacent échangent leurs rôles, donc le quotient est inversé.

(d) Dans le triangle UVW rectangle en V, $\sin(\widehat{VUW}) = \frac{VW}{UW} = \frac{4}{5}$. Avec la calculatrice en mode degrés : $\widehat{VUW} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53°$.

Ex. 12 ★★★ **Un triangle penché : prouver l'angle droit, puis écrire sinus et tangente**

(a) $[MJ]$ est le plus grand côté. $MJ^2 = 10^2 = 100$ et $MR^2 + RJ^2 = 9{,}6^2 + 2{,}8^2 = 92{,}16 + 7{,}84 = 100$. Comme $MJ^2 = MR^2 + RJ^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MRJ est rectangle en R.

(b) Dans le triangle MRJ rectangle en R, l'hypoténuse est $[MJ]$. Pour l'angle $\widehat{RMJ}$, $[RJ]$ est le côté opposé et $[MR]$ le côté adjacent. $\sin(\widehat{RMJ}) = \frac{RJ}{MJ} = \frac{2{,}8}{10} = \frac{7}{25} = 0{,}28$ et $\tan(\widehat{RMJ}) = \frac{RJ}{MR} = \frac{2{,}8}{9{,}6} = \frac{7}{24} \approx 0{,}29$.

(c) Première erreur : $\frac{MJ}{MR} = \frac{10}{9{,}6}$ est plus grand que 1, et un sinus plus grand que 1 est impossible : Maël a inversé les côtés. Pour l'angle $\widehat{RJM}$, le côté opposé est $[MR]$ et l'hypoténuse est $[MJ]$, donc $\sin(\widehat{RJM}) = \frac{MR}{MJ} = \frac{9{,}6}{10} = \frac{24}{25} = 0{,}96$. Seconde erreur : $\frac{RJ}{MR}$ est la tangente de l'angle $\widehat{RMJ}$. Pour l'autre angle aigu, le côté opposé et le côté adjacent sont échangés : le côté adjacent à $\widehat{RJM}$ est $[RJ]$, donc $\tan(\widehat{RJM}) = \frac{MR}{RJ} = \frac{9{,}6}{2{,}8} = \frac{24}{7} \approx 3{,}43$. Cette tangente est plus grande que 1, ce qui est possible.

Ex. 12 **(suite)**

(d) En mode degrés : $\widehat{RMJ} = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) \approx 16{,}3°$. Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, donc $\widehat{RJM} \approx 90° - 16{,}3° = 73{,}7°$. Vérification : $\tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right) \approx 73{,}7°$.

Ex. 13 ★★★ **Le toboggan du parc de Valence**

(a) L'échelle est verticale et le sol horizontal, donc le triangle PBG est rectangle en B. $[PG]$ est l'hypoténuse et $[PB]$ le côté opposé à l'angle $\widehat{PGB}$. Ces deux côtés vont avec SOH : $\sin(\widehat{PGB}) = \frac{PB}{PG}$, donc $PB = 4{,}5 \times \sin(34°) \approx 2{,}52$ m.

(b) La tangente n'utilise jamais l'hypoténuse. Ici, on connaît l'hypoténuse $[PG]$ et on cherche $[BG]$, le côté adjacent à l'angle $\widehat{PGB}$: il faut CAH. $\cos(\widehat{PGB}) = \frac{BG}{PG}$, donc $BG = 4{,}5 \times \cos(34°) \approx 3{,}73$ m.

(c) Dans le nouveau triangle rectangle, la hauteur PB est le côté opposé à l'angle de 25° et le toboggan est l'hypoténuse L. On utilise SOH : $\sin(25°) = \frac{PB}{L}$. L'inconnue est en bas du quotient, donc on divise : $L = \frac{4{,}5 \times \sin(34°)}{\sin(25°)} \approx 5{,}95$ m. On garde la valeur exacte de PB dans la calculatrice.

(d) La hauteur PB est le côté opposé à l'angle et la distance au sol de 3 m est le côté adjacent : il faut TOA. $\tan(\text{angle}) = \frac{4{,}5 \times \sin(34°)}{3}$, donc angle $= \tan^{-1}\left(\frac{4{,}5 \times \sin(34°)}{3}\right) \approx 40{,}0°$.

Ex. 14 ★★★ **Type brevet : une hauteur, deux triangles rectangles**

(a) $[BH]$ est une hauteur, donc le triangle ABH est rectangle en H. Son hypoténuse est $[AB]$ et $[BH]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAH}$. On utilise SOH : $\sin(\widehat{BAH}) = \frac{BH}{AB}$, donc $BH = 6{,}4 \times \sin(41°) \approx 4{,}2$ cm.

(b) $[AH]$ est un côté de l'angle droit du triangle ABH, donc il est plus court que l'hypoténuse $AB = 6{,}4$ cm : 8,5 cm est impossible. Lina a mal récité CAH : cos $= \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$, et sa version revient à calculer $\frac{6{,}4}{\cos(41°)} \approx 8{,}5$. Correction : $[AH]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAH}$, donc $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB}$ et $AH = 6{,}4 \times \cos(41°) \approx 4{,}8$ cm.

(c) H est sur $[AC]$ et $(BH) \perp (AC)$, donc le triangle BHC est rectangle en H, et $\widehat{BCA} = \widehat{BCH}$. Pour l'angle $\widehat{BCH}$, $[BH]$ est le côté opposé et $[HC]$ le côté adjacent. On utilise TOA : $\tan(\widehat{BCH}) = \frac{BH}{HC} = \frac{6{,}4 \times \sin(41°)}{3{,}3}$, donc $\widehat{BCA} = \tan^{-1}\left(\frac{6{,}4 \times \sin(41°)}{3{,}3}\right) \approx 51{,}8°$.

Ex. 14 **(suite)**

(d) Hugo utilise $BH \approx 4$ cm : il trouve $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3{,}3}\right) \approx 50{,}5°$ au lieu de 51,8°. L'écart de 0,2 cm sur BH change l'angle d'environ 1,3°. Il faut garder la valeur exacte $6{,}4 \times \sin(41°)$ dans la calculatrice et n'arrondir qu'à la fin.

(e) Dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{ABC} \approx 180° - 41° - 51{,}8° = 87{,}2°$. Cet angle n'est pas égal à 90°, donc le triangle ABC n'est pas rectangle en B.

3. Calculer une longueur

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes — la longueur cherchée est en haut : je multiplie**

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L, [KM] est l'hypoténuse et [KL] le côté adjacent à l'angle $\widehat{LKM}$: $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{KL}{KM}$, donc $\cos(41°) = \frac{KL}{9}$. KL est en haut, je multiplie : $KL = 9 \times \cos(41°) \approx 6{,}79$ cm.

(b) Dans le triangle UVW rectangle en V, [UW] est l'hypoténuse et [UV] le côté opposé à l'angle $\widehat{VWU}$: $\sin(\widehat{VWU}) = \frac{UV}{UW}$, donc $\sin(63°) = \frac{UV}{7{,}6}$. UV est en haut, je multiplie : $UV = 7{,}6 \times \sin(63°) \approx 6{,}77$ cm.

(c) Dans le triangle NOP rectangle en O, [OP] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ONP}$ et [ON] son côté adjacent : $\tan(\widehat{ONP}) = \frac{OP}{ON}$, donc $\tan(29°) = \frac{OP}{4{,}4}$. OP est en haut, je multiplie : $OP = 4{,}4 \times \tan(29°) \approx 2{,}44$ cm.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes — la longueur cherchée est en bas : je divise**

(a) Dans le triangle HIJ rectangle en I, [HI] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{IHJ}$ et [HJ] l'hypoténuse : $\cos(\widehat{IHJ}) = \frac{HI}{HJ}$, donc $\cos(34°) = \frac{5{,}2}{HJ}$. HJ est en bas, je divise : $HJ = \frac{5{,}2}{\cos(34°)} \approx 6{,}3$ cm. Contrôle : l'hypoténuse mesure 6,3 cm, elle est plus longue que $HI = 5{,}2$ cm.

(b) Dans le triangle PQR rectangle en P, [PR] est le côté opposé à l'angle $\widehat{PQR}$ et [PQ] son côté adjacent : $\tan(\widehat{PQR}) = \frac{PR}{PQ}$, donc $\tan(58°) = \frac{7}{PQ}$. PQ est en bas, je divise : $PQ = \frac{7}{\tan(58°)} \approx 4{,}4$ cm. Contrôle : l'angle de 58° est plus grand que 45°, donc le côté adjacent est plus court que le côté opposé : 4,4 cm $<$ 7 cm.

Ex. 16 **(suite)**

(c) Dans le triangle CDE rectangle en D, [DE] est le côté opposé à l'angle $\widehat{DCE}$ et [CE] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{DCE}) = \frac{DE}{CE}$, donc $\sin(47{,}5°) = \frac{4{,}1}{CE}$. CE est en bas, je divise : $CE = \frac{4{,}1}{\sin(47{,}5°)} \approx 5{,}6$ cm. Contrôle : l'hypoténuse mesure 5,6 cm, elle est plus longue que $DE = 4{,}1$ cm.

Ex. 17 ★★☆ **Trois élèves, trois erreurs**

(a) Le résultat de Noah, 3,17 cm, est plus court que le côté opposé $AC = 5{,}4$ cm : c'est impossible pour une hypoténuse, qui est le plus long côté. Dans le triangle ABC rectangle en A, [AC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ et [BC] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$, donc $\sin(36°) = \frac{5{,}4}{BC}$. BC est en bas, il faut diviser : $BC = \frac{5{,}4}{\sin(36°)} \approx 9{,}19$ cm.

(b) Inès obtient $\frac{5{,}4}{0{,}59} \approx 9{,}15$ cm au lieu de 9,19 cm : arrondir le sinus avant de diviser fausse le résultat. Il faut garder la valeur de la calculatrice et n'arrondir qu'à la fin.

(c) Une longueur ne peut pas être négative. En plus, le sinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1, donc $\frac{5{,}4}{\sin(36°)}$ doit être positif et plus grand que 5,4. La calculatrice de Sami n'est pas en mode degrés : une fois en mode degrés, il trouve $BC \approx 9{,}19$ cm.

Ex. 18 ★★☆ **Le toboggan de Malo**

(a) Dans le triangle STH rectangle en H, [TH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{HST}$ et [ST] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{HST}) = \frac{TH}{ST}$. Avec $ST = 480$ cm $= 4{,}8$ m, on a $TH = 4{,}8 \times \sin(32°) \approx 2{,}5$ m.

(b) [SH] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{HST}$: $\cos(\widehat{HST}) = \frac{SH}{ST}$, donc $SH = 4{,}8 \times \cos(32°) \approx 4{,}1$ m.

(c) Dans le triangle STH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, $SH^2 = ST^2 - TH^2 = 4{,}8^2 - (4{,}8 \times \sin(32°))^2$, donc $SH = \sqrt{4{,}8^2 - (4{,}8 \times \sin(32°))^2} \approx 4{,}1$ m : on retrouve le même résultat.

(d) $SH = 4{,}8 \times \cos(32°) \approx 4{,}07$ m, soit environ 407 cm. Comme 407 cm $<$ 420 cm, le toboggan tient dans le jardin
(on compare dans la même unité).

Ex. 19 ★★★ **Brevet — de Pythagore à la tangente**

(a) [EG] est le plus long côté. $EG^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$ et $EF^2 + FG^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25$. Comme $EG^2 = EF^2 + FG^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F.

(b) G et H sont sur la même demi-droite [FG], donc $\widehat{EFH} = \widehat{EFG} = 90°$: le triangle EFH est rectangle en F. [FH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{FEH}$ et [EF] le côté adjacent : $\tan(\widehat{FEH}) = \frac{FH}{EF}$, donc $FH = 4{,}5 \times \tan(62°) \approx 8{,}46$ cm. Ensuite $GH = FH - FG \approx 8{,}46 - 6 = 2{,}46$ cm.

(c) Dans le triangle EFH rectangle en F, [EF] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{FEH}$ et [EH] l'hypoténuse : $\cos(\widehat{FEH}) = \frac{EF}{EH}$, donc $\cos(62°) = \frac{4{,}5}{EH}$. EH est en bas, je divise : $EH = \frac{4{,}5}{\cos(62°)} \approx 9{,}59$ cm. Contrôle : 9,59 cm est plus long que $FH \approx 8{,}46$ cm.

(d) La droite (EF) est perpendiculaire à (FH), donc [EF] est la hauteur issue de E du triangle EGH, de base [GH]. Aire $= \frac{GH \times EF}{2} = \frac{(4{,}5 \times \tan(62°) - 6) \times 4{,}5}{2} \approx 5{,}54$ cm².

(e) Le triangle EFH est rectangle en F. D'après le théorème de Pythagore, $EH^2 = EF^2 + FH^2 = 4{,}5^2 + (4{,}5 \times \tan(62°))^2 \approx 91{,}88$, donc $EH \approx 9{,}59$ cm. On retrouve bien le même résultat.
(Avec FH arrondi à 8,46, on obtiendrait 9,58 cm.)

Ex. 20 ★★★ **Le phare vu de la mer**

(a) Dans le triangle BPS rectangle en P, [PS] est le côté opposé à l'angle $\widehat{PBS}$ et [BP] le côté adjacent : $\tan(\widehat{PBS}) = \frac{PS}{BP}$, donc $\tan(14°) = \frac{32}{BP}$. BP est en bas, je divise : $BP = \frac{32}{\tan(14°)} \approx 128{,}3$ m.

(b) Avec un angle de 14°, très petit, le bateau doit être bien plus loin du phare que la hauteur du phare (32 m) : 4,42 m est impossible. La calculatrice de Jade est en mode radians, car $\frac{32}{\tan(14)}$ en radians donne environ 4,42. Il faut la mettre en mode degrés.

(c) Dans le triangle CPS rectangle en P : $\tan(\widehat{PCS}) = \frac{PS}{CP}$, donc $CP = \frac{32}{\tan(25°)} \approx 68{,}6$ m. C est entre B et P, donc $BC = BP - CP \approx 128{,}3 - 68{,}6 = 59{,}7$ m.

(d) Dans le triangle CPS rectangle en P, [PS] est le côté opposé à l'angle $\widehat{PCS}$ et [CS] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{PCS}) = \frac{PS}{CS}$, donc $CS = \frac{32}{\sin(25°)} \approx 75{,}7$ m. Contrôle : l'hypoténuse, 75,7 m, est bien plus longue que $CP \approx 68{,}6$ m et que $PS = 32$ m.

Ex. 21 ★★★ **Capucine décolle de Nantes**

(a) $DA = 2{,}8$ km $= 2\,800$ m. Dans le triangle DHA rectangle en H, [AH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{HDA}$ et [DA] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{HDA}) = \frac{AH}{DA}$, donc $AH = 2\,800 \times \sin(9°) \approx 438{,}0$ m.

(b) [DH] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{HDA}$: $\cos(\widehat{HDA}) = \frac{DH}{DA}$, donc $DH = 2\,800 \times \cos(9°) \approx 2\,765{,}5$ m.
(Avec le théorème de Pythagore : $DH = \sqrt{2\,800^2 - AH^2} \approx 2\,765{,}5$ m.)

(c) Au-dessus de l'antenne, l'avion, le point D et le pied de l'antenne forment un triangle rectangle. Le côté adjacent à l'angle de 9° mesure 3 000 m et l'altitude est le côté opposé : altitude $= 3\,000 \times \tan(9°) \approx 475{,}2$ m. Il faut au moins $150 + 300 = 450$ m. Comme $475{,}2 > 450$, la consigne est respectée.

(d) 1 km = 1 000 m. On a $\sin(9°) = \frac{1\,000}{DA}$. La distance cherchée est en bas, je divise : $DA = \frac{1\,000}{\sin(9°)} \approx 6\,392{,}5$ m. Contrôle : l'hypoténuse, 6 392,5 m, est plus longue que l'altitude de 1 000 m. Multiplier aurait donné environ 156,4 m, ce qui est impossible.

4. *Calculer un angle avec les touches inverses*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes — les touches inverses**

(a) $\widehat{A} = \cos^{-1}(0{,}35) \approx 69{,}5°$.

(b) On tape le quotient exact avec les parenthèses : $\widehat{C} = \tan^{-1}\left(\frac{9}{4}\right) \approx 66{,}0°$.

(c) Vrai : l'angle mesure $\sin^{-1}(0{,}8) \approx 53{,}1°$, et $53{,}1° > 50°$.

(d) Le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1 (l'hypoténuse est le plus grand côté). Or $7 \div 5 = 1{,}4 > 1$: Lou a inversé les deux côtés, il faut l'hypoténuse en bas.

(e) Faux : la tangente d'un angle aigu peut dépasser 1. $\tan^{-1}(3) \approx 71{,}6°$, donc un angle aigu d'environ 71,6° a une tangente égale à 3.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes — choisir la bonne touche**

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L, [KL] est le côté adjacent à $\widehat{LKM}$ et [KM] l'hypoténuse : CAH. $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{KL}{KM} = \frac{4}{7}$, donc $\widehat{LKM} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 55°$.

Ex. 23 **(suite)**

(b) Dans le triangle PQR rectangle en Q, [QR] est le côté opposé à $\widehat{QPR}$ et [PR] l'hypoténuse : SOH. $\sin(\widehat{QPR}) = \frac{QR}{PR} = \frac{3{,}1}{7{,}5}$, donc $\widehat{QPR} = \sin^{-1}\left(\frac{3{,}1}{7{,}5}\right) \approx 24°$.

(c) Dans le triangle EFG rectangle en G, [FG] est le côté opposé à $\widehat{GEF}$ et [EG] le côté adjacent : TOA. $\tan(\widehat{GEF}) = \frac{FG}{EG} = \frac{3{,}8}{5}$, donc $\widehat{GEF} = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8}{5}\right) \approx 37°$. Les deux angles aigus sont complémentaires : $\widehat{EFG} \approx 90° - 37° = 53°$.

Ex. 24 ★★☆ **Les trois erreurs de Yanis**

(a) Dans le triangle WXY rectangle en X, [WX] est le côté adjacent à $\widehat{XWY}$ et [WY] l'hypoténuse : c'est CAH, pas TOA. $\cos(\widehat{XWY}) = \frac{WX}{WY} = \frac{3{,}7}{5{,}3}$.

(b) Il a arrondi le quotient trop tôt : $\cos^{-1}(0{,}70) \approx 45{,}6°$, mais avec le quotient exact $\widehat{XWY} = \cos^{-1}\left(\frac{3{,}7}{5{,}3}\right) \approx 45{,}7°$. On arrondit seulement l'angle.

(c) $5{,}3 \div 3{,}7 \approx 1{,}43 > 1$, or le sinus d'un angle aigu est entre 0 et 1 : les côtés sont inversés. [WX] est le côté opposé à $\widehat{WYX}$: $\sin(\widehat{WYX}) = \frac{WX}{WY} = \frac{3{,}7}{5{,}3}$, donc $\widehat{WYX} = \sin^{-1}\left(\frac{3{,}7}{5{,}3}\right) \approx 44{,}3°$ (on vérifie : $90° - 45{,}7° = 44{,}3°$).

Ex. 25 ★★☆ **Le panneau du col**

(a) Non. Dans le triangle DHM rectangle en H, [HM] est le côté opposé à $\widehat{HDM}$ et [DH] le côté adjacent : $\tan(\widehat{HDM}) = \frac{9}{100} = 0{,}09$, donc $\widehat{HDM} = \tan^{-1}(0{,}09) \approx 5{,}1°$. Le pourcentage n'est pas la mesure de l'angle.

(b) Il a utilisé la touche tan au lieu de la touche inverse $\tan^{-1}$: 0,09 est la tangente de l'angle, pas l'angle. Il fallait taper $\tan^{-1}(0{,}09)$.

(c) Sa calculatrice n'est pas en mode degrés : il faut la régler en mode degrés pour obtenir $\tan^{-1}(0{,}09) \approx 5{,}1°$.

(d) La pente est la tangente de l'angle : $\tan(8°) \approx 0{,}1405$, soit une pente d'environ 14,1 %.

Ex. 26 ★★★ **Le cerf-volant de Quiberon**

(a) $32 \div 19 \approx 1{,}68$ est plus grand que 1. Or le sinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1 : Tom a inversé les deux côtés. Dans le triangle MHK rectangle en H, [KH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{KMH}$ et [MK] est l'hypoténuse : $\sin(\widehat{KMH}) = \frac{KH}{MK} = \frac{19}{32}$, donc $\widehat{KMH} = \sin^{-1}\left(\frac{19}{32}\right) \approx 36{,}4°$.

Ex. 26 **(suite)**

(b) Dans le triangle MHK rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore : $MH^2 = MK^2 - KH^2 = 32^2 - 19^2 = 1\,024 - 361 = 663$, donc $MH = \sqrt{663} \approx 25{,}7$ m. Léa obtient $\cos^{-1}\left(\frac{25{,}7}{32}\right) \approx 36{,}6°$ au lieu de $36{,}4°$, car elle a arrondi MH trop tôt. Avec la valeur exacte, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{663}}{32}\right) \approx 36{,}4°$. On garde les valeurs exactes et on arrondit seulement l'angle.

(c) Dans le triangle MHK rectangle en H, les deux angles aigus sont complémentaires : $\widehat{MKH} \approx 90° - 36{,}4° = 53{,}6°$.

(d) Dans le triangle MHK rectangle en H, on a maintenant $\sin(\widehat{KMH}) = \frac{15}{32}$, donc $\widehat{KMH} = \sin^{-1}\left(\frac{15}{32}\right) \approx 28{,}0°$. Avec les valeurs non arrondies, l'angle diminue de $\sin^{-1}\left(\frac{19}{32}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{15}{32}\right) \approx 8{,}5°$, donc de plus de $8°$. Inès a raison.

Ex. 27 ★★★ **Le toboggan du parc**

(a) [GT] est le plus grand côté. D'une part $GT^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$. D'autre part $ST^2 + SG^2 = 3{,}3^2 + 5{,}6^2 = 10{,}89 + 31{,}36 = 42{,}25$. On a $GT^2 = ST^2 + SG^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle GST est rectangle en S.

(b) Dans le triangle GST rectangle en S, [ST] est le côté opposé à l'angle $\widehat{SGT}$ et [SG] le côté adjacent : $\tan(\widehat{SGT}) = \frac{ST}{SG} = \frac{3{,}3}{5{,}6}$, donc $\widehat{SGT} = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}3}{5{,}6}\right) \approx 30{,}5°$.

(c) Oui. Dans le triangle GST rectangle en S, [SG] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{SGT}$ et [GT] l'hypoténuse : $\cos(\widehat{SGT}) = \frac{SG}{GT} = \frac{5{,}6}{6{,}5}$, donc $\widehat{SGT} = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}6}{6{,}5}\right) \approx 30{,}5°$. C'est le même angle : on peut utiliser n'importe quelle formule qui contient deux côtés connus.

(d) Une pente de 40 % veut dire que la glissière descend de 40 m pour 100 m à l'horizontale. Ce n'est pas un angle de $40°$: $\tan(\text{angle}) = \frac{40}{100} = 0{,}4$, donc l'angle mesure $\tan^{-1}(0{,}4) \approx 21{,}8°$. Comme $21{,}8° < 30{,}5°$, le premier toboggan est le plus raide.

(e) Si on appelle d la longueur au sol, $\tan(\text{angle}) = \frac{3{,}3}{d} = 0{,}4$. L'inconnue est en bas du quotient, donc on divise : $d = 3{,}3 \div 0{,}4 = 8{,}25$ m.

Ex. 28 ★★★ **Deux triangles emboîtés**

(a) Le triangle ABC est rectangle en B, donc (BC) est perpendiculaire à (AB). Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre : (DE) est perpendiculaire à (AB). Le triangle ADE est donc rectangle en D.

(b) Malik a utilisé la touche cos au lieu de la touche $\cos^{-1}$: 0,9999 est le cosinus de 0,75°, ce n'est pas un angle.
Dans le triangle ADE rectangle en D, on connaît AD, le côté adjacent à l'angle $\widehat{DAE}$, et AE, l'hypoténuse : CAH. $\cos(\widehat{DAE}) = \frac{AD}{AE} = \frac{4{,}8}{6{,}4}$, donc $\widehat{DAE} = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}8}{6{,}4}\right) \approx 41{,}4°$.

(c) Théo trouve $180° - 41{,}4° = 138{,}6°$. Or $\widehat{ACB}$ est un angle aigu du triangle ABC rectangle en B : il mesure entre 0° et 90°. Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires (leur somme vaut 90°, pas 180°). Comme D est sur [AB] et E sur [AC], $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$, donc $\widehat{ACB} \approx 90° - 41{,}4° = 48{,}6°$.

(d) Les points A, D, B et A, E, C sont alignés, et les droites (DE) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, donc $\frac{4{,}8}{8{,}4} = \frac{6{,}4}{AC}$ et $AC = \frac{6{,}4 \times 8{,}4}{4{,}8} = 11{,}2$ cm.

(e) Dans le triangle ABC rectangle en B, [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ et [AC] l'hypoténuse : SOH. $\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC} = \frac{8{,}4}{11{,}2}$, donc $\widehat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{8{,}4}{11{,}2}\right) \approx 48{,}6°$. On retrouve bien le résultat de la question 3.

5. *Angles complémentaires et relations*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : l'autre angle aigu**

(a) Dans le triangle RST rectangle en S, les deux angles aigus sont complémentaires : leur somme vaut 90° (pas 180°).
Donc $\widehat{RTS} = 90° - 42° = 48°$.

(b) Dans le triangle RST rectangle en S, [RS] est le côté opposé à l'angle $\widehat{RTS}$: $\sin(\widehat{RTS}) = \frac{RS}{RT}$. [RS] est aussi le côté adjacent à l'angle $\widehat{SRT}$: $\cos(\widehat{SRT}) = \frac{RS}{RT}$. C'est le même quotient, donc $\sin(\widehat{RTS}) = \cos(\widehat{SRT})$.

(c) $18° + 72° = 90°$: les angles sont complémentaires, donc $\sin(18°) = \cos(72°) \approx 0{,}309$.

(d) $\sin(x) = \cos(90° - x)$, donc il faut $90° - x = 25°$, ce qui donne $x = 90° - 25° = 65°$.

Ex. 29 (suite)

(e) $40° + 50° = 90°$: la tangente de l'un est l'inverse de la tangente de l'autre, donc $\tan(40°) = \frac{1}{\tan(50°)} \approx \frac{1}{1{,}192} \approx 0{,}839$.

(f) Non. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires : leur somme vaut 90°. Or $35° + 65° = 100°$, et $100° \neq 90°$. C'est donc impossible.

Ex. 30 ★★☆ **Automatismes : valeurs remarquables et pièges**

(a) Le triangle EFG est isocèle en F, donc $\widehat{FEG} = \widehat{FGE}$. Il est rectangle en F, donc ces deux angles aigus sont complémentaires : leur somme vaut 90°.
Donc $\widehat{FEG} = 90° \div 2 = 45°$.

(b) Dans le triangle EFG rectangle en F, [FG] est le côté opposé à l'angle $\widehat{FEG}$ et [FE] le côté adjacent : $\tan(\widehat{FEG}) = \frac{FG}{FE}$. Comme $FG = FE$, ce quotient vaut 1.

(c) Non. C'est $\sin(30°) = \cos(60°) = 0{,}5$. Quand l'angle aigu augmente, son sinus augmente, donc $\sin(60°)$ est plus grand que $\sin(30°) = 0{,}5$: $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$.

(d) $2 \times \cos(30°) \approx 2 \times 0{,}866 = 1{,}732$. Un cosinus est compris entre 0 et 1, donc c'est impossible : en fait $\cos(60°) = 0{,}5$. Tom a tort, les quotients ne sont pas proportionnels aux angles.

(e) Quand l'angle aigu augmente, son cosinus diminue. Donc $\cos(80°) < \cos(50°) < \cos(20°)$.

Ex. 31 ★★☆ **Retrouver les valeurs de 30° et 60°**

(a) La hauteur [AH] est perpendiculaire à (BC), donc le triangle ABH est rectangle en H. Dans un triangle équilatéral, la hauteur coupe le côté opposé en son milieu : $BH = 10 \div 2 = 5$ cm. Les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°, donc $\widehat{ABH} = 60°$. Les angles aigus de ABH sont complémentaires, donc $\widehat{BAH} = 90° - 60° = 30°$.

(b) Dans le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$.
Donc $AH = \sqrt{75} \approx 8{,}7$ cm.

(c) Dans le triangle ABH rectangle en H, [BH] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABH}$: $\cos(60°) = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
[BH] est aussi le côté opposé à l'angle $\widehat{BAH}$: $\sin(30°) = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Les deux valent 0,5 : c'est le cosinus de 60° et le sinus de 30°, pas l'inverse.

Ex. 31 **(suite)**

(d) [AH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABH}$: $\sin(60°) = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{75}}{10}$. [AH] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAH}$: $\cos(30°) = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{75}}{10}$. C'est le même quotient : $\sin(60°) = \cos(30°)$, car $60° + 30° = 90°$.

Ex. 32 ★★☆ **Complément guidé : $\cos^2 + \sin^2 = 1$**

(a) Dans le triangle KLM rectangle en L, d'après le théorème de Pythagore : $LM^2 = KM^2 - KL^2 = 5{,}3^2 - 4{,}5^2 = 28{,}09 - 20{,}25 = 7{,}84$.
Donc $LM = \sqrt{7{,}84} = 2{,}8$ cm.

(b) Dans le triangle KLM rectangle en L, [KL] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{LKM}$, [LM] le côté opposé et [KM] l'hypoténuse : $\cos(\widehat{LKM}) = \frac{4{,}5}{5{,}3} = \frac{45}{53}$ et $\sin(\widehat{LKM}) = \frac{2{,}8}{5{,}3} = \frac{28}{53}$. Alors $\left(\frac{45}{53}\right)^2 + \left(\frac{28}{53}\right)^2 = \frac{2025}{2809} + \frac{784}{2809} = \frac{2809}{2809} = 1$.

(c) Dans le triangle KLM rectangle en L : $\cos^2(\widehat{LKM}) = \left(\frac{KL}{KM}\right)^2 = \frac{KL^2}{KM^2}$ et $\sin^2(\widehat{LKM}) = \left(\frac{LM}{KM}\right)^2 = \frac{LM^2}{KM^2}$.
Donc $\cos^2(\widehat{LKM}) + \sin^2(\widehat{LKM}) = \frac{KL^2+LM^2}{KM^2}$. D'après le théorème de Pythagore, $KL^2 + LM^2 = KM^2$, donc la somme vaut $\frac{KM^2}{KM^2} = 1$.

(d) [LM] est le côté opposé à l'angle $\widehat{LKM}$ et [KL] le côté adjacent : $\tan(\widehat{LKM}) = \frac{2{,}8}{4{,}5} = \frac{28}{45}$. Avec les fractions : $\frac{28}{53} \div \frac{45}{53} = \frac{28}{53} \times \frac{53}{45} = \frac{28}{45}$. On trouve le même résultat.

Ex. 33 ★★★ **L'échelle contre le mur**

(a) Le triangle EWV est rectangle en W : ses deux angles aigus sont complémentaires, leur somme vaut 90° et non 180°. Noé a oublié l'angle droit.
$\widehat{EVW} = 90° - 71° = 19°$.

(b) Dans le triangle EWV rectangle en W, [EW] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{WEV}$ et [EV] est l'hypoténuse : $\cos(\widehat{WEV}) = \frac{EW}{EV}$, donc $EW = 4{,}8 \times \cos(71°) \approx 1{,}56$ m. Vu depuis V, [EW] est le côté opposé à l'angle $\widehat{EVW}$: $\sin(\widehat{EVW}) = \frac{EW}{EV}$. C'est le même quotient, donc $\sin(19°) = \cos(71°)$ et $4{,}8 \times \sin(19°) \approx 1{,}56$ m aussi.

(c) Le nouveau cosinus vaut $\frac{EW}{EV} = \frac{1{,}2}{4{,}8} = 0{,}25$. C'est moins que $\cos(71°) \approx 0{,}33$. Or, quand un angle aigu augmente, son cosinus diminue. L'angle avec le sol a donc augmenté : Léna a raison.

(d) $\cos(\widehat{WEV}) = \frac{1{,}2}{4{,}8} = 0{,}25$, donc $\widehat{WEV} = \cos^{-1}(0{,}25) \approx 75{,}5°$ (calculatrice en mode degrés). Comme $75{,}5° > 75°$, l'échelle n'est plus bien placée : elle est trop droite.

Ex. 33 **(suite)**

(e) Le triangle EWV est toujours rectangle en W. D'après le théorème de Pythagore : $WV^2 = EV^2 - EW^2 = 4{,}8^2 - 1{,}2^2 = 23{,}04 - 1{,}44 = 21{,}6$, donc $WV = \sqrt{21{,}6} \approx 4{,}65$ m.

Ex. 34 ★★★ **Une hauteur, 45° et 30° : figure composée**

(a) [KH] est une hauteur, donc le triangle KHL est rectangle en H. Ses angles aigus sont complémentaires : $\widehat{LKH} = 90° - 45° = 45°$. Ses deux angles aigus sont égaux, donc le triangle KHL est isocèle en H, et LH = KH = 4 cm. (Autre méthode : $\tan(45°) = \frac{KH}{LH} = 1$, donc LH = KH.)

(b) Sacha a confondu : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\cos(30°)$, alors que $\sin(30°) = 0{,}5$. Dans le triangle KHM rectangle en H, [KH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{KMH}$ et [KM] est l'hypoténuse : $\sin(30°) = \frac{KH}{KM}$, donc $KM = \frac{4}{0{,}5} = 8$ cm.

(c) Dans le triangle KHM rectangle en H, les angles aigus sont complémentaires : $\widehat{HKM} = 90° - 30° = 60°$. [HM] est le côté opposé à l'angle $\widehat{HKM}$ et [KH] est le côté adjacent : $\tan(60°) = \frac{HM}{KH}$, donc $HM = 4 \times \tan(60°) \approx 6{,}93$ cm.

(d) Non. $\tan(60°) \approx 1{,}73$, alors que $2 \times \tan(30°) \approx 1{,}15$: les tangentes ne sont pas proportionnelles aux angles. Comme 60° et 30° sont complémentaires, $\tan(60°) = \frac{1}{\tan(30°)}$: c'est l'inverse, pas le double.

Ex. 35 ★★★ **Complément guidé : passer d'un quotient aux autres**

(a) $\cos^2(x)$ veut dire $(\cos(x))^2$: on met le cosinus au carré, pas l'angle. Mila a calculé $\cos(x^2)$. $\cos^2(\widehat{VUW}) = \left(\frac{9}{41}\right)^2 = \frac{81}{1681}$.

(b) $\sin^2(\widehat{VUW}) = 1 - \frac{81}{1681} = \frac{1600}{1681}$. Or $1600 = 40^2$ et $1681 = 41^2$. Un sinus est un quotient de deux longueurs, il est donc positif : $\sin(\widehat{VUW}) = \frac{40}{41}$. La valeur $-\frac{40}{41}$ est négative : on la rejette.

(c) $\tan(\widehat{VUW}) = \frac{40}{41} \div \frac{9}{41} = \frac{40}{41} \times \frac{41}{9} = \frac{40}{9} \approx 4{,}44$.

(d) Les angles $\widehat{VUW}$ et $\widehat{UWV}$ sont complémentaires. Le côté adjacent à l'un est le côté opposé à l'autre, donc on échange cosinus et sinus : $\cos(\widehat{UWV}) = \frac{40}{41}$ et $\sin(\widehat{UWV}) = \frac{9}{41}$. La tangente est l'inverse : $\tan(\widehat{UWV}) = \frac{9}{40} = 0{,}225$.

(e) $\widehat{VUW} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{41}\right) \approx 77{,}3°$ (calculatrice en mode degrés). Les deux angles aigus sont complémentaires, donc $\widehat{UWV} \approx 90° - 77{,}3° = 12{,}7°$.

6. Problèmes : hauteurs, pentes, distances

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : le schéma avant le calcul**

(a) Schéma : l'échelle [EP] a son haut E sur le mur et son pied P au sol. H est le pied du mur. Le triangle EHP est rectangle en H et $\widehat{HEP} = 16°$: c'est l'angle avec le mur, pas l'angle avec le sol (celui-ci mesure $90° - 16° = 74°$). Par rapport à $\widehat{HEP}$, [EH] est le côté adjacent et [EP] l'hypoténuse. Dans le triangle EHP rectangle en H, $\cos(\widehat{HEP}) = \frac{EH}{EP}$, donc $EH = 4{,}8 \times \cos(16°) \approx 4{,}6$ m. L'échelle arrive à environ 4,6 m de hauteur.

(b) Schéma : M est la main, C le cerf-volant et K le point situé à la hauteur de la main, à la verticale de C. Le triangle MKC est rectangle en K et $\widehat{CMK} = 48°$. [CK] est le côté opposé à cet angle et [MC] l'hypoténuse. Dans le triangle MKC rectangle en K, $\sin(\widehat{CMK}) = \frac{CK}{MC}$, donc $CK = 35 \times \sin(48°) \approx 26{,}0$ m. Le cerf-volant est environ 26,0 m plus haut que la main d'Inès.

(c) Schéma : T est le haut du toboggan, B son bas et H le point du sol à la verticale de T. Le triangle THB est rectangle en H et $\widehat{TBH} = 34°$. Les 3,6 m sont la longueur sur la pente, donc l'hypoténuse [TB]. [BH] est le côté adjacent. Dans le triangle THB rectangle en H, $\cos(\widehat{TBH}) = \frac{BH}{TB}$, donc $BH = 3{,}6 \times \cos(34°) \approx 3{,}0$ m. Le toboggan occupe environ 3,0 m au sol, ce qui est moins que sa longueur de 3,6 m.

(d) Schéma : D est le point de décollage, A l'avion et S le point du sol à la verticale de A. Le triangle DSA est rectangle en S et $DS = 1{,}8$ km $= 1\,800$ m. [AS] est le côté opposé à $\widehat{ADS}$ et [DS] le côté adjacent. Dans le triangle DSA rectangle en S, $\tan(\widehat{ADS}) = \frac{AS}{DS}$, donc $AS = 1\,800 \times \tan(14°) \approx 448{,}8$ m. L'avion vole à environ 448,8 m d'altitude.

(e) Dans le triangle AHT rectangle en H, [HT] est le côté opposé à $\widehat{TAH}$ et [AT] l'hypoténuse : $\sin(\widehat{TAH}) = \frac{HT}{AT}$. La longueur cherchée est en bas du quotient, donc on divise : $AT = \frac{1{,}7}{\sin(22°)} \approx 4{,}5$ m. Contrôle : 4,5 m est plus long que 1,7 m. La rampe mesure environ 4,5 m.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : pente et angle**

(a) Une pente de 7 % signifie que la tangente de l'angle vaut 0,07.
Donc l'angle mesure $\tan^{-1}(0{,}07) \approx 4{,}0°$, calculé en mode degrés. La route fait un angle d'environ 4,0° avec l'horizontale.

Ex. 37 (suite)

(b) $\tan(3°) \approx 0{,}052$, soit environ 5,2 %. La piste a une pente d'environ 5,2 %.

(c) Non. Une pente de 15 % signifie que la tangente de l'angle vaut 0,15. L'angle mesure donc $\tan^{-1}(0{,}15) \approx 8{,}5°$, et non 15°. Léo a confondu le pourcentage de la pente avec la mesure de l'angle.

(d) Dans le triangle PQU rectangle en Q, [QU] est le côté opposé à $\widehat{QPU}$ et [PQ] le côté adjacent. On a donc $\tan(\widehat{QPU}) = \frac{QU}{PQ} = \frac{0{,}3}{7{,}5} = 0{,}04$. On en déduit $\widehat{QPU} = \tan^{-1}(0{,}04) \approx 2{,}3°$. Comme $2{,}3° < 5°$, la rampe est conforme.

Ex. 38 ★★☆ **La hauteur du phare**

(a) Nadia [OE] et le phare [PS] sont verticaux, le sol [OP] est horizontal et [EH] est horizontal. Le quadrilatère OEHP a donc trois angles droits, en O, en P et en E : c'est un rectangle. Son angle en H est donc droit : le triangle EHS est rectangle en H. De plus, $EH = OP = 45$ m.

(b) Avec un angle de 45°, le triangle EHS serait rectangle isocèle et HS vaudrait 45 m. Ici l'angle est plus petit ($31°$), donc HS est inférieur à 45 m : 74,9 m est impossible. Dans le triangle EHS rectangle en H, [HS] est le côté opposé à $\widehat{SEH}$ et [EH] le côté adjacent : $\tan(\widehat{SEH}) = \frac{HS}{EH}$. HS est en haut du quotient, il fallait donc multiplier : $HS = 45 \times \tan(31°) \approx 27{,}0$ m.

(c) $PS = PH + HS$ avec $PH = OE = 1{,}6$ m. Il ne faut pas oublier la hauteur des yeux. On calcule $PS = 1{,}6 + 45 \times \tan(31°) \approx 28{,}6$ m. Le phare mesure environ 28,6 m.

(d) Ses yeux restent à 1,6 m du sol, donc le point H ne change pas. Dans le nouveau triangle rectangle en H, l'angle d'élévation mesure 45°, donc l'autre angle aigu mesure $90° - 45° = 45°$: le triangle est rectangle isocèle en H. Sa distance horizontale au phare est donc égale à $HS \approx 27{,}0$ m. Nadia est alors à environ 27,0 m du pied du phare.

Ex. 39 ★★☆ **Deux bateaux au pied de la falaise**

(a) La falaise est verticale et la mer horizontale, donc le triangle FHA est rectangle en H. [HF] est le côté opposé à $\widehat{FAH}$ et [HA] le côté adjacent : $\tan(\widehat{FAH}) = \frac{HF}{HA}$. HA est en bas du quotient, donc on divise : $HA = \frac{80}{\tan(22°)} \approx 198{,}0$ m.

(b) Le triangle FHB est rectangle en H. On a $\tan(\widehat{FBH}) = \frac{HF}{HB}$, donc $HB = \frac{80}{\tan(35°)} \approx 114{,}3$ m.

Ex. 39 **(suite)**

(c) Les points H, B et A sont alignés dans cet ordre, donc $AB = HA - HB$. On calcule $AB = \frac{80}{\tan(22°)} - \frac{80}{\tan(35°)} \approx 83{,}8$ m. Les deux bateaux sont à environ 83,8 m l'un de l'autre. Avec les valeurs déjà arrondies, on trouverait $198{,}0 - 114{,}3 = 83{,}7$ m : il ne faut pas arrondir trop tôt.

(d) 0,2 km = 200 m et $HA \approx 198{,}0$ m. Comme $198{,}0 < 200$, le bateau A est à moins de 0,2 km du pied de la falaise, mais de peu.

Ex. 40 ★★★ **La rampe de la médiathèque**

(a) Sur le schéma, [AC] est horizontal et [BC] est vertical : ils sont perpendiculaires, donc le triangle ABC est rectangle en C et [AB] est son hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, donc $AC^2 = 9{,}6^2 - 0{,}45^2 = 92{,}16 - 0{,}2025 = 91{,}9575$ et $AC = \sqrt{91{,}9575} \approx 9{,}59$ m. La distance horizontale vaut environ 9,59 m : elle est plus courte que la rampe, qui fait 9,6 m.

(b) Dans le triangle ABC rectangle en C, [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ et [AB] est l'hypoténuse : $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}45}{9{,}6}$, donc $\widehat{BAC} = \sin^{-1}\left(\frac{0{,}45}{9{,}6}\right) \approx 2{,}7°$. C'est vraisemblable : une rampe d'accès est presque horizontale, son angle reste inférieur à 5°.

(c) La pente est la tangente de l'angle avec l'horizontale : $\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC} = \frac{0{,}45}{\sqrt{91{,}9575}} \approx 0{,}047$, soit environ 4,7 %. Attention : on divise par la distance horizontale AC, pas par la longueur de la rampe AB. Comme 4,7 % ≤ 5 %, la rampe respecte le règlement.

(d) Une pente de 5 % signifie que la tangente de l'angle avec l'horizontale vaut 0,05 : hauteur ÷ distance horizontale = 0,05. La distance horizontale vaut donc $\frac{0{,}55}{0{,}05} = 11$ m. La rampe est l'hypoténuse du triangle rectangle ainsi formé. D'après le théorème de Pythagore, sa longueur vaut $\sqrt{11^2 + 0{,}55^2} = \sqrt{121{,}302\,5} \approx 11{,}01$ m. La rampe mesure environ 11,01 m, un peu plus que la distance horizontale.

Ex. 41 ★★★ **Le téléphérique du Pic Blanc**

(a) 2,6 km = 2 600 m. [AH] est vertical et [DH] horizontal, donc le triangle DHA est rectangle en H. [AH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{HDA}$ et [DA] est l'hypoténuse : $\sin(\widehat{HDA}) = \frac{AH}{DA}$, donc $\sin(18°) = \frac{AH}{2\,600}$ et $AH = 2\,600 \times \sin(18°) \approx 803$ m. Le dénivelé est d'environ 803 m.

Ex. 41 **(suite)**

(b) Yanis a ajouté la longueur du câble, qui est l'hypoténuse. Or c'est le dénivelé AH qu'il faut ajouter. Altitude de A : $1\,350 + 2\,600 \times \sin(18°) \approx 2\,153$ m. La gare d'arrivée est à environ 2 153 m d'altitude.

(c) Dans le triangle DHA rectangle en H, [DH] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{HDA}$: $\cos(\widehat{HDA}) = \frac{DH}{DA}$, donc $DH = 2{,}6 \times \cos(18°) \approx 2{,}47$ km. La carte donne environ 2,47 km. C'est moins que 2,6 km, car le câble est l'hypoténuse, qui est le plus long côté : la longueur parcourue n'est pas la distance horizontale.

(d) La pente est la tangente de l'angle avec l'horizontale : $\tan(\widehat{HDA}) = \tan(18°) \approx 0{,}325$. La pente moyenne du câble est d'environ 32,5 %.

Ex. 42 ★★★ **L'arbre vu des deux côtés**

(a) L'arbre est vertical et le sol est horizontal, donc le triangle MTS est rectangle en T. [TS] est le côté opposé à l'angle $\widehat{SMT}$ et [MT] est le côté adjacent : $\tan(\widehat{SMT}) = \frac{TS}{MT}$. TS est en haut du quotient, donc $TS = 12 \times \tan(35°) \approx 8{,}40$ m. L'arbre mesure environ 8,40 m.

(b) Non. [EH] est horizontal et [HS] vertical, donc le triangle EHS est rectangle en H. Ses deux angles aigus sont complémentaires. L'angle de 58° est $\widehat{HSE}$, l'angle avec la verticale.
Donc $\widehat{HES} = 90° - 58° = 32°$: l'angle d'élévation mesure 32°.

(c) Il faut retirer la hauteur des yeux : $SH = TS - 1{,}5 = 12 \times \tan(35°) - 1{,}5 \approx 6{,}90$ m. Dans le triangle EHS rectangle en H, [SH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{HES}$ et [EH] est le côté adjacent : $\tan(\widehat{HES}) = \frac{SH}{EH}$. EH est en bas du quotient, donc $EH = \frac{SH}{\tan(32°)} \approx 11{,}05$ m (avec SH non arrondi).

(d) TIEH est un rectangle, donc $TI = EH$. Les points M, T et I sont alignés et T est entre M et I, donc $MI = MT + TI = 12 + EH \approx 23{,}05$ m. Malo et Iris sont à environ 23,05 m l'un de l'autre.

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Choisir le bon outil**

(a) On connaît deux côtés du triangle KLM rectangle en L et on cherche le troisième : on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KLM ([KM] est l'hypoténuse).

Ex. 43 **(suite)**

(b) On connaît un angle aigu et l'hypoténuse [PR], et on cherche [QR], le côté opposé à $\widehat{QPR}$: on utilise le sinus dans le triangle PQR rectangle en Q, $\sin(\widehat{QPR}) = \frac{QR}{PR}$.

(c) On connaît les trois côtés et on ne sait pas si le triangle est rectangle : on utilise la réciproque du théorème de Pythagore dans le triangle ABC (on compare AC^2 et $AB^2 + BC^2$).

(d) Il y a des droites parallèles et des points alignés : on utilise le théorème de Thalès dans le triangle EFG, $\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG} = \frac{HI}{FG}$.

(e) On cherche un angle et on connaît le côté opposé [TU] et le côté adjacent [ST] : on utilise la tangente dans le triangle STU rectangle en T, $\tan(\widehat{TSU}) = \frac{TU}{ST}$, puis la touche $\tan^{-1}$. Ce n'est pas Pythagore : on ne cherche pas un côté.

Ex. 44 ★☆☆ **L'angle droit est-il prouvé ?**

(a) [UW] est le plus grand côté. $UW^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$ et $UV^2 + VW^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle UVW est rectangle en V. [UV] est donc le côté adjacent à $\widehat{VUW}$ et [UW] l'hypoténuse : oui, on peut écrire $\cos(\widehat{VUW}) = \frac{UV}{UW}$.

(b) [HK] est le plus grand côté. $HK^2 = 121$ et $HJ^2 + JK^2 = 36 + 81 = 117$. Comme $121 \neq 117$, le triangle HJK n'est pas rectangle (sinon on aurait l'égalité de Pythagore). Noé a tort : sans angle droit, on ne peut pas utiliser le sinus.

(c) $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$: les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux. Comme $\widehat{ABC} = 90°$, on a $\widehat{AMN} = 90°$: le triangle AMN est rectangle en M.

(d) S est sur [EF] et T est sur [EG] : l'angle $\widehat{SET}$ est le même que l'angle $\widehat{FEG}$, qui est droit.
Donc le triangle EST est rectangle en E.

Ex. 45 ★★☆ **Pythagore puis tangente : garder la valeur exacte**

(a) Le triangle RST est rectangle en S. D'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2 = 9 + 49 = 58$, donc $RT = \sqrt{58}$ cm (valeur exacte), soit $RT \approx 7{,}6$ cm.

(b) Dans le triangle RTU rectangle en T, [TU] est le côté opposé à l'angle $\widehat{TRU}$ et [RT] le côté adjacent : $\tan(\widehat{TRU}) = \frac{TU}{RT} = \frac{4}{\sqrt{58}}$, donc $\widehat{TRU} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{58}}\right) \approx 27{,}7°$.

Ex. 45 **(suite)**

(c) Zoé calcule $\tan^{-1}\left(\frac{4}{7{,}6}\right) \approx 27{,}8°$. Elle a réutilisé une valeur arrondie de RT : l'erreur d'arrondi se retrouve dans le résultat final, et le dixième est faux. La bonne réponse est $\widehat{TRU} \approx 27{,}7°$.

Ex. 46 ★★☆ **Thalès puis trigonométrie**

(a) $T \in [VW]$, $Y \in [VX]$ et $(TY) \parallel (WX)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{VT}{VW} = \frac{VY}{VX} = \frac{TY}{WX}$, soit $\frac{3}{7{,}5} = \frac{TY}{5}$. Donc $TY = \frac{3 \times 5}{7{,}5} = 2$ cm.

(b) $(TY) \parallel (WX)$ et T est sur [VW] : les angles correspondants $\widehat{VTY}$ et $\widehat{VWX}$ sont égaux. Comme $\widehat{VWX} = 90°$, on a $\widehat{VTY} = 90°$: le triangle VTY est rectangle en T.

(c) Dans le triangle VTY rectangle en T, [VT] est le côté opposé à l'angle $\widehat{VYT}$ et [TY] le côté adjacent : $\tan(\widehat{VYT}) = \frac{VT}{TY} = \frac{3}{2} = 1{,}5$, donc $\widehat{VYT} = \tan^{-1}(1{,}5) \approx 56{,}3°$. Conclusion : l'angle $\widehat{VYT}$ mesure environ $56{,}3°$.

Ex. 47 ★★★ **Réciproque, angle puis hauteur**

(a) Le plus grand côté est [EG]. $EG^2 = 5{,}8^2 = 33{,}64$ et $EF^2 + FG^2 = 17{,}64 + 16 = 33{,}64$.
Donc $EG^2 = EF^2 + FG^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F.

(b) Le triangle EFG est rectangle en F (question précédente). [FG] est le côté opposé à l'angle $\widehat{FEG}$ et [EF] le côté adjacent : $\tan(\widehat{FEG}) = \frac{FG}{EF} = \frac{4}{4{,}2}$, donc $\widehat{FEG} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4{,}2}\right) \approx 43{,}6°$.

(c) Le triangle EFH est rectangle en H, car (FH) est la hauteur. Son hypoténuse est [EF] et [FH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{FEG}$: $\sin(\widehat{FEG}) = \frac{FH}{EF}$, donc $FH = EF \times \sin(\widehat{FEG})$. Dans le triangle EFG rectangle en F, la valeur exacte est $\sin(\widehat{FEG}) = \frac{FG}{EG} = \frac{4}{5{,}8}$.
Donc $FH = 4{,}2 \times \frac{4}{5{,}8} = \frac{16{,}8}{5{,}8} \approx 2{,}90$ cm.

(d) Tom a calculé $4{,}2 \times \sin(44°) \approx 2{,}92$ cm. Il a arrondi $43{,}6°$ à $44°$ avant de réutiliser l'angle, et cet écart a faussé le centième. Il fallait garder la valeur exacte $\sin(\widehat{FEG}) = \frac{4}{5{,}8}$, ou toutes les décimales de la calculatrice : on trouve alors $FH \approx 2{,}90$ cm.

Ex. 48 ★★★ **Le toboggan d'Annecy**

(a) La plateforme est verticale et le sol est horizontal, donc le triangle SOL est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore : $SL^2 = SO^2 + OL^2$, donc $OL^2 = 5{,}3^2 - 2{,}8^2 = 28{,}09 - 7{,}84 = 20{,}25$ et $OL = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$ m.

Ex. 48 **(suite)**

(b) Dans le triangle SOL rectangle en O, [SO] est le côté opposé à l'angle $\widehat{SLO}$ et [OL] le côté adjacent : $\tan(\widehat{SLO}) = \frac{SO}{OL} = \frac{2{,}8}{4{,}5}$, donc $\widehat{SLO} = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}8}{4{,}5}\right) \approx 32°$. La glissière fait un angle d'environ $32°$ avec le sol.

(c) Non, Inès a tort. La pente est égale à la tangente de l'angle avec l'horizontale, écrite en pourcentage : $\frac{SO}{OL} = \frac{2{,}8}{4{,}5} \approx 0{,}622$, soit une pente d'environ $62{,}2\ \%$. Ce n'est pas $32\ \%$.

(d) Le triangle SOA est rectangle en O. Son hypoténuse est [AS] et [SO] est le côté opposé à l'angle $\widehat{SAO}$: $\sin(\widehat{SAO}) = \frac{SO}{AS}$. L'inconnue est en bas du quotient, donc on divise : $AS = \frac{2{,}8}{\sin(75°)} \approx 2{,}90$ m.
(Multiplier donnerait 2,70 m : ce serait plus court que la hauteur SO, ce qui est impossible.)

(e) Dans le triangle SOA rectangle en O, [OA] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{SAO}$: $\tan(\widehat{SAO}) = \frac{SO}{AO}$, donc $AO = \frac{2{,}8}{\tan(75°)} \approx 0{,}75$ m. Alors $AL = AO + OL \approx 0{,}75 + 4{,}5 = 5{,}25$ m. Comme $5{,}25 < 5{,}5$, le toboggan tient dans l'espace prévu.

Ex. 49 ★★★ **Papillon : Thalès, Pythagore puis tangente**

(a) Le triangle ABC est rectangle en B, donc $(AB) \perp (BE)$. Or $(DE) \parallel (AB)$. Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre : $(DE) \perp (BE)$.
Donc le triangle CDE est rectangle en E.

(b) Les droites (AD) et (BE) se coupent en C, et $(AB) \parallel (DE)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{CB}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DE}$, soit $\frac{4}{6} = \frac{1{,}8}{DE}$.
Donc $DE = \frac{1{,}8 \times 6}{4} = 2{,}7$ cm.

(c) Le triangle CDE est rectangle en E (question 1).
D'après le théorème de Pythagore dans ce triangle : $CD^2 = DE^2 + CE^2 = 7{,}29 + 36 = 43{,}29$, donc $CD = \sqrt{43{,}29} \approx 6{,}58$ cm.

(d) Dans le triangle CDE rectangle en E, [CE] est le côté opposé à l'angle $\widehat{CDE}$ et [DE] le côté adjacent. Ces deux longueurs sont exactes : $\tan(\widehat{CDE}) = \frac{CE}{DE} = \frac{6}{2{,}7}$, donc $\widehat{CDE} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{2{,}7}\right) \approx 65{,}8°$.

(e) Dans le triangle CDE rectangle en E, les angles aigus $\widehat{CDE}$ et $\widehat{DCE}$ sont complémentaires : leur somme vaut $90°$.
Donc $\widehat{DCE} \approx 90° - 65{,}8° = 24{,}2°$.