49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 3e : cosinus et sinus dans le triangle rectangle*

À retenir : L'hypoténuse est le côté en face de l'angle droit. $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ et $\sin = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$: pour un angle aigu, ils sont entre 0 et 1. Calculatrice en degrés, touche $\cos^{-1}$ pour trouver un angle. Attention : $\cos 60° \neq 2\cos 30°$.

Ex. 1 ★☆☆ **Lire cosinus et sinus dans un triangle rectangle** — Le triangle RST est rectangle en S, avec $RS = 5$ cm, $ST = 12$ cm et $RT = 13$ cm. Donne les valeurs exactes sous forme de fractions.

a. Nomme l'hypoténuse du triangle RST et justifie.

b. Calcule $\cos \widehat{SRT}$.

c. Calcule $\sin \widehat{SRT}$.

d. Nathan affirme que $\cos \widehat{STR} = \dfrac{5}{13}$, comme $\cos \widehat{SRT}$. A-t-il raison ? Justifie.

e. Calcule $\sin \widehat{STR}$.

f. La tangente d'un angle aigu est $\dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$. Calcule $\tan \widehat{SRT}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Longueurs et angles à la calculatrice** — Règle ta calculatrice en mode degrés et arrondis comme demandé.

a. Le triangle KLM est rectangle en L, avec $KM = 8$ cm et $\widehat{LKM} = 35°$. Calcule KL arrondi au mm.

b. Le triangle EFG est rectangle en F, avec $FG = 4$ cm et $\widehat{FEG} = 50°$. Calcule EG arrondi au mm.

c. Le triangle PQR est rectangle en Q, avec $PQ = 7$ cm et $PR = 10$ cm. Calcule $\widehat{QPR}$ arrondi au dixième de degré.

d. Zoé tape la touche cos suivie de 60 et lit environ $-0{,}952$. Explique son erreur et donne la valeur exacte de $\cos 60°$.

Ex. 3 ★★☆ **De Pythagore à $\cos^2 + \sin^2 = 1$** — Le triangle ABC est rectangle en A. On note α la mesure de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

a. Exprime $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ à l'aide des longueurs AB, AC et BC.

b. Déduis-en, à l'aide du théorème de Pythagore, que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

c. Justifie que $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$.

d. Lina affirme qu'un angle aigu peut avoir pour cosinus $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 3 (suite)

e. Un angle aigu β d'un autre triangle rectangle vérifie $\sin\beta = \dfrac{2}{7}$. Calcule la valeur exacte de $\cos\beta$.

Ex. 4 ★★☆ **L'échelle contre le mur** — Ben pose une échelle de 4 m contre un mur vertical, sur un sol horizontal. On note θ l'angle entre l'échelle et le sol. On rappelle que $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

a. Pour $\theta = 30°$, calcule la valeur exacte de la distance entre le pied de l'échelle et le mur.

b. Pour $\theta = 60°$, calcule cette distance.

c. Malo affirme : « De 30° à 60°, l'angle double, donc la distance au mur double aussi. » A-t-il raison ? Justifie.

d. Calcule la valeur exacte de $\sin 60°$, puis la hauteur atteinte par le haut de l'échelle pour $\theta = 60°$.

e. Ben veut placer le pied de l'échelle à 1 m du mur. Calcule θ arrondi au dixième de degré.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux sur les angles aigus** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie. Les angles cités sont aigus et la calculatrice est réglée en mode degrés.

a. « Si on multiplie par 2 les trois côtés d'un triangle rectangle, le cosinus de chaque angle aigu est multiplié par 2. »

b. « Si $\cos\alpha = 0{,}8$ et $\cos\beta = 0{,}4$, alors $\beta = 2\alpha$. »

c. « Si $\cos\alpha = 0{,}28$, alors $\sin\alpha = 0{,}72$. »

d. « Dans un triangle EFG rectangle en F, on a toujours $\cos\widehat{FEG} = \sin\widehat{FGE}$. »

e. « $\cos 20° + \sin 20° = 1$. »

Ex. 6 ★★★ **Un triangle qui n'est pas rectangle** — Dans le triangle ABC, $AB = 10$ cm, $\widehat{ABC} = 30°$ et $\widehat{ACB} = 45°$. Le pied H de la hauteur issue de A est sur $[BC]$: ABH et ACH sont rectangles en H. On rappelle que $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Dans le triangle ABH, nomme l'hypoténuse. Nomme ensuite le côté adjacent et le côté opposé à l'angle $\widehat{ABH}$.

b. Calcule les valeurs exactes de AH et de BH.

c. Dans le triangle ACH, calcule les valeurs exactes de AC et de HC.

d. Déduis-en les valeurs exactes du périmètre et de l'aire du triangle ABC.

Ex. 7 ★★★ **La rampe d'accès est-elle aux normes ?** — Une rampe pour fauteuil roulant est modélisée par le triangle PQR rectangle en Q. La rampe est $[PR]$, $[PQ]$ est au sol et $[QR]$ est vertical. On a $PR = 4{,}5$ m et $PQ = 4{,}48$ m. La norme impose que l'angle $\widehat{QPR}$ mesure au plus $5°$.

(a) Calcule $\cos\widehat{QPR}$, arrondi au dix-millième. Déduis-en la mesure de $\widehat{QPR}$ arrondie au dixième de degré.

(b) La rampe respecte-t-elle la norme ? Justifie.

(c) Hugo trouve 0,0943 pour l'angle à la calculatrice et conclut que la rampe est presque horizontale. Explique son erreur.

(d) Calcule la hauteur QR en valeur exacte, puis donne son arrondi au centimètre.

(e) On garde la même hauteur QR et on veut un angle de $4°$. En utilisant la valeur exacte de QR, calcule la longueur de la rampe arrondie au centimètre.

2. *Convertir degrés et radians, longueur d'un arc*

À retenir : $180° = \pi$ rad, donc $x° = \frac{x\pi}{180}$ rad ; 1 rad $\approx 57{,}3°$. Arc : $\ell = r\alpha$ et $\alpha = \frac{\ell}{r}$, avec α en radians (jamais en degrés) et ℓ dans l'unité de r. Ex. : $r = 3$ cm, $\alpha = 2$ rad, $\ell = 6$ cm.

Ex. 8 ★☆☆ **Convertir degrés et radians** — Convertis chaque mesure. Donne la valeur exacte, avec une fraction simplifiée.

(a) Convertis $72°$ en radians.

(b) Convertis $\frac{5\pi}{12}$ rad en degrés.

(c) Convertis $330°$ en radians.

(d) Convertis $\frac{7\pi}{9}$ rad en degrés.

(e) Convertis 0,8 rad en degrés : donne la valeur exacte, puis l'arrondi au dixième.

Ex. 9 ★☆☆ **Longueur d'un arc, angle au centre** — Sur un cercle de rayon r, α est la mesure en radians de l'angle au centre et ℓ la longueur de l'arc qu'il intercepte. Donne les valeurs exactes.

(a) $r = 5$ m et l'angle au centre mesure 2,4 rad. Calcule ℓ.

(b) $r = 8$ cm et l'angle au centre mesure $45°$. Calcule ℓ.

(c) $r = 1{,}5$ m et $\alpha = \frac{\pi}{5}$. Calcule ℓ en centimètres.

(d) $\ell = 18$ cm et $r = 8$ cm. Calcule α.

(e) $\ell = 2\pi$ cm et $r = 9$ cm. Calcule α.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les radians** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) Nolan affirme : « Un angle de 1 rad est plus petit qu'un angle de $50°$, car $1 < 50$. »

(b) Inès affirme : « Sur un cercle de rayon 10 cm, un angle au centre de $36°$ intercepte un arc de 360 cm. »

Ex. 10 (suite)

(c) Yanis affirme : « Une mesure de 2 rad n'existe pas, car elle ne contient pas π. » Donne aussi 2 rad en degrés, arrondi au dixième.

(d) Lou affirme : « Sur un cercle de rayon 4 cm, un arc de 0,2 m correspond à un angle au centre de 0,05 rad. »

Ex. 11 ★★☆ **L'arroseur du jardin** — Le jet de l'arroseur de Léna mouille un secteur de disque de rayon 6 m. Le bras pivote d'un angle de $105°$, et l'extrémité du jet décrit un arc de ce cercle. On admet que l'aire d'un secteur de rayon r et d'angle au centre α radians vaut $\frac{r^2\alpha}{2}$.

(a) Convertis en radians l'angle de pivot de $105°$.

(b) Calcule la valeur exacte de la longueur de l'arc décrit par l'extrémité du jet, puis arrondis-la au dixième de mètre.

(c) Calcule la valeur exacte de l'aire arrosée, puis arrondis-la au m².

(d) Léna règle l'arroseur pour que l'arc mesure 10 m. Déduis-en la valeur exacte de l'angle de pivot en radians, puis sa mesure en degrés, arrondie au degré.

Ex. 12 ★★★ **Le pendule de l'horloge** — Le pendule de l'horloge de Mila est un fil de longueur 80 cm. Entre ses deux positions extrêmes, l'extrémité du fil décrit un arc de cercle de longueur 28 cm. Le centre de cet arc est le point d'attache du fil.

(a) Calcule la mesure α en radians de l'angle balayé par le fil entre ses deux positions extrêmes.

(b) Donne cette mesure en degrés : d'abord la valeur exacte, puis l'arrondi au dixième.

(c) Sacha affirme : « Si on double la longueur du fil en gardant un arc de 28 cm, l'angle balayé double aussi. » A-t-il raison ? Justifie en calculant le nouvel angle.

(d) Hugo veut un pendule qui balaie un angle de $18°$ avec un arc de 28 cm, lui aussi. Calcule la longueur exacte du fil, puis son arrondi au dixième de cm.

Ex. 13 ★★★ **Éventails et secteurs de disque** — Un secteur de disque de rayon r a un angle au centre de α radians, avec $0 < \alpha \leqslant 2\pi$. On admet que son aire vaut $A = \frac{r^2\alpha}{2}$. Son contour est formé de deux rayons et d'un arc : il mesure $2r + r\alpha$.

(a) Quelle mesure α correspond au disque entier ? Vérifie qu'alors l'arc est le périmètre du cercle et que A est l'aire du disque.

(b) L'éventail de Jade est un secteur de rayon 18 cm et d'aire 144π cm². Calcule son angle en radians et en degrés, puis la longueur exacte de son arc.

(c) Tom veut découper un secteur de rayon 8 cm dont le contour mesure 70 cm. Montre que c'est impossible, puis donne le plus grand contour possible pour ce rayon.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Le contour mesure maintenant 40 cm. Montre que $A = 100 - (r-10)^2$, puis déduis-en le rayon et l'angle qui donnent l'aire la plus grande.

Ex. 14 ★★★ **Un programme de conversion** — Ben a écrit cette fonction Python. Elle convertit en radians une mesure entière `d` en degrés. Le couple renvoyé `(p, q)` signifie $\frac{p\pi}{q}$ rad. La fonction `gcd` donne le PGCD de deux entiers.

```
from math import gcd

def en_radians(d):
    g = gcd(d, 180)
    return (d // g, 180 // g)
```

(a) Avec un tableau de proportionnalité, explique pourquoi $d^\circ = \frac{d\pi}{180}$ rad. Quel est le rôle de `g` dans la fonction ?

(b) Qu'affiche `print(en_radians(210))` ? Donne la mesure en radians qui correspond.

(c) Recherche tous les entiers d de 1 à 360 pour lesquels le couple renvoyé a pour second terme 4. Justifie.

(d) Zoé ajoute une fonction `arc(r, d)` qui renvoie `r * d` : la longueur de l'arc de rayon `r` et d'angle `d` en degrés. Explique son erreur et corrige la valeur renvoyée.

(e) Donne la valeur exacte que devrait renvoyer `arc(12, 210)` pour un rayon en cm.

3. *Placer un point sur le cercle, mesure principale*

À retenir : Mesure principale : j'écris 2π avec le même dénominateur, puis j'ajoute ou je retire des tours entiers jusqu'à $]-\pi\,;\,\pi]$: $\frac{11\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$. Même image $\iff$ différence multiple de 2π. Attention : $-\pi$ n'est pas une mesure principale, c'est π.

Ex. 15 ★☆☆ **Mesures principales** — Détermine la mesure principale de chaque réel, c'est-à-dire le réel de $]-\pi\,;\,\pi]$ qui a la même image sur le cercle trigonométrique.

(a) $\frac{17\pi}{6}$ (b) $-\frac{7\pi}{4}$ (c) $\frac{31\pi}{3}$

(d) $\frac{27\pi}{5}$ (e) $-\frac{19\pi}{8}$ (f) $-\frac{29\pi}{6}$

Ex. 16 ★☆☆ **Dans quel quart de cercle ?** — Pour chaque réel, indique dans quel quadrant se trouve son image sur le cercle trigonométrique. Justifie par un encadrement (tu peux utiliser $\pi \approx 3{,}14$).

(a) 3 (b) -1 (c) $\frac{5\pi}{8}$

(d) $-\frac{9\pi}{5}$ (e) $\frac{13\pi}{7}$ (f) 4

Ex. 17 ★★☆ **La grande aiguille de l'horloge** — On modélise le cadran de l'horloge de la cuisine de Zoé par le cercle trigonométrique : « 12 » est en J et « 3 » est en I. À midi, la pointe de la grande aiguille (celle des minutes) est en J, image de $\frac{\pi}{2}$.

(a) Zoé affirme : « La grande aiguille tourne dans le sens direct. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Quel réel est associé à la rotation de la pointe en 20 minutes ?

(c) Déduis-en la mesure principale du point atteint à 12 h 20, puis ses coordonnées.

(d) Détermine la mesure principale du point atteint à 14 h 45. Quel point est-ce ?

Ex. 18 ★★☆ **Même image ou pas ?** — Vrai ou faux ? Justifie.

(a) « Les réels $\frac{11\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique. »

(b) « Les réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique. »

(c) « Malik cherche la mesure principale de $\frac{13\pi}{4}$: il retire 3π et trouve $\frac{\pi}{4}$. Il a raison. »

(d) « La mesure principale des réels associés au point $I'(-1\,;\,0)$ est $-\pi$. »

Ex. 19 ★★★ **Les erreurs de Lina** — Dans son DS, Lina a écrit les quatre affirmations ci-dessous. Chacune contient une erreur. Pour chaque affirmation, explique l'erreur, puis donne la bonne réponse en justifiant.

(a) « $\frac{47\pi}{10} - 5\pi = -\frac{3\pi}{10}$, donc la mesure principale de $\frac{47\pi}{10}$ est $-\frac{3\pi}{10}$. »

(b) « $-\frac{22\pi}{5} + 2\pi = -\frac{20\pi}{5} = -4\pi$, qui a la même image que 0 : la mesure principale de $-\frac{22\pi}{5}$ est 0. »

(c) « Le réel $-\frac{17\pi}{12}$ est négatif, donc son image sur le cercle trigonométrique est dans le 4e quadrant. »

(d) « $\frac{9\pi}{7} - \frac{2\pi}{7} = \pi$ est un multiple de π, donc $\frac{9\pi}{7}$ et $\frac{2\pi}{7}$ ont la même image. »

Ex. 20 ★★★ **Des réels sans π** — On admet que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. On admet aussi que π est irrationnel : il ne s'écrit pas comme quotient de deux entiers.

(a) Kenza affirme : « Les images des réels 2 et -2 sont dans le même quadrant. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Détermine la mesure principale du réel 10, puis le quadrant de son image. Justifie par des encadrements.

(c) Parmi les entiers 5, 6, 7, 8 et 9, lesquels ont leur image dans le 4e quadrant ? Justifie.

(d) Démontre que deux entiers distincts n'ont jamais la même image sur le cercle trigonométrique.

Ex. 21 ★★★ **Le robot de la bordure** — Le robot de Hugo roule sur une bordure circulaire, modélisée par le cercle trigonométrique (unité : le mètre). À chaque trajet, il part du point I.

(a) Le robot roule $\frac{29\pi}{4}$ m dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et s'arrête en A. Combien de tours complets fait-il ? Donne la mesure principale associée à A et les coordonnées de A.

(b) Il roule ensuite $\frac{5\pi}{3}$ m dans le sens des aiguilles d'une montre et s'arrête en B. Quel réel est associé à ce trajet ? Donne sa mesure principale et les coordonnées de B.

(c) Calcule la longueur exacte du plus court arc de cercle qui relie A et B.

(d) Il repart de I, roule dans le sens des aiguilles d'une montre, fait 2 tours complets puis s'arrête dès qu'il atteint $C\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Quelle distance a-t-il parcourue ?

(e) Quelle distance minimale doit-il parcourir dans le sens direct pour s'arrêter en J' après au moins 3 tours complets ?

4. *Cosinus et sinus d'un réel : signes, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$*

À retenir : $\cos x$ est l'abscisse et $\sin x$ l'ordonnée de l'image de x. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne deux valeurs opposées ; le quadrant donne le signe. Sans intervalle, on ne conclut pas. Ex. : $\cos x = -0{,}8$, $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$: $\sin x = 0{,}6$.

Ex. 22 ★☆☆ **Lire cosinus et sinus sur le cercle** — On travaille sur le cercle trigonométrique, dans un repère orthonormé d'origine O.

(a) L'image du réel x est le point de coordonnées $\left(-\frac{5}{13}\,;\,\frac{12}{13}\right)$. Donne $\cos x$ et $\sin x$.

(b) Donne la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.

(c) L'image du réel y est sur l'axe des abscisses, à gauche de O. Donne $\cos y$ et $\sin y$.

(d) L'image du réel w est le point de coordonnées $\left(\frac{20}{29}\,;\,-\frac{21}{29}\right)$. Tom en déduit que $\sin w = \frac{20}{29}$. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Existe-t-il un réel x tel que $\cos x = 1{,}2$? Justifie.

(f) On sait que $\cos a = -0{,}7$. Calcule $\cos^2 a$.

Ex. 23 ★☆☆ **Signes du cosinus et du sinus** — Réponds sans calculatrice, en repérant le quadrant où se trouve l'image du réel sur le cercle trigonométrique.

(a) Donne le signe de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et celui de $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

(b) On sait que $x \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$. Donne le signe de $\cos x$ et celui de $\sin x$.

Ex. 23 (suite)

(c) Dans quel quadrant se trouve l'image de $\frac{13\pi}{12}$? Déduis-en le signe de son sinus.

(d) Pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$, donne le signe du produit $\cos t \times \sin t$.

(e) Un réel u de $]-\pi\,;\,\pi]$ vérifie $\cos u < 0$ et $\sin u > 0$. Dans quel intervalle se trouve u ?

Ex. 24 ★★☆ **Du cosinus au sinus avec le quadrant** — Dans chaque question, utilise la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, puis le quadrant de l'image s'il est connu. Donne des valeurs exactes.

(a) On sait que $\cos x = -\frac{1}{4}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. Calcule $\sin x$.

(b) On sait que $\sin y = -\frac{2}{3}$ et $y \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$. Calcule $\cos y$.

(c) On sait seulement que $\cos z = \frac{3}{7}$. Léa affirme : « $\sin z = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) On sait que $\cos b = \frac{2}{5}$ et $b \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$. Calcule $\sin b$, puis vérifie ton résultat avec $\cos^2 b + \sin^2 b$.

Ex. 25 ★★☆ **La copie de Malik** — Malik doit calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ et $x \in \left]\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$. Il écrit : « $\sin^2 x = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$, donc $\sin x = \frac{3}{4}$. »

(a) Le calcul de $\sin^2 x$ fait par Malik est-il juste ? Justifie.

(b) Où se trouve l'erreur de Malik ? Donne la valeur exacte correcte de $\sin x$.

(c) Vérifie ton résultat avec la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(d) Malik affirme ensuite : « Pour tout réel y, si $\cos y = 0$, alors $\sin y = 1$. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Pour un autre réel, Malik écrit : « $\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{9}$ ». Corrige cette égalité et simplifie le résultat.

Ex. 26 ★★★ **Vrai ou faux sur le cercle trigonométrique** — Dans chaque affirmation, x désigne un réel. Dis si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifie.

(a) Pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

(b) Si $\sin x = -\frac{8}{17}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos x = \frac{15}{17}$.

(c) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi^2}{9}\right)$ (tu peux utiliser la calculatrice, réglée en mode radian).

(d) Pour tout réel x, $\cos x + \sin x = 1$.

(e) Si $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$, alors $x \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$.

Ex. 27 ★★★ **Une ordonnée double de l'abscisse** — Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique. On sait que $\sin x = 2\cos x$. On note $a = \cos x$.

(a) Exprime les coordonnées de M en fonction de a. Avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, écris l'équation que vérifie a.

(b) Résous cette équation. Donne les solutions sous forme simplifiée, sans racine au dénominateur.

Ex. 27 **(suite)**

(c) On sait maintenant que $x \in]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}[$. Déduis-en les valeurs exactes de $\cos x$ et de $\sin x$.

(d) Vérifie tes résultats de la question précédente à l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(e) À l'aide des angles associés, donne les coordonnées des images des réels $-x$ et $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique.

Ex. 28 ★★★ **Le satellite et ses capteurs** — Dans un repère orthonormé d'origine O (le centre de la Terre), un satellite S tourne sur le cercle trigonométrique. Une unité vaut 10 000 km. À un instant donné, S est l'image d'un réel x.

(a) Un capteur indique que l'ordonnée de S vaut 0,28. Explique pourquoi on ne connaît pas encore son abscisse, puis donne les deux valeurs possibles.

(b) Un second capteur indique que S est à gauche de l'axe des ordonnées. Déduis-en $\cos x$, puis un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ contenant la mesure principale de x.

(c) Un technicien annonce que, lors d'un autre relevé, S était au point de coordonnées $(0{,}7\,;\,0{,}7)$. Est-ce possible ? Justifie.

(d) Après un demi-tour, le satellite est à l'image S' du réel $x + \pi$. Donne les coordonnées de S' et le quadrant où il se trouve.

(e) Calcule la distance SS', en km.

5. *Valeurs remarquables de cos et sin*

À retenir : De 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ vaut $\frac{\sqrt{4}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{0}}{2}$; $\sin x$: même liste à l'envers. Ex. : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\pi = -1$. Piège : $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) \neq 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Ex. 29 ★☆☆ **Lire les valeurs remarquables** — Réponds sans calculatrice, en valeur exacte. On se place sur le cercle trigonométrique de centre O.

(a) Donne les coordonnées du point A, image du réel $\frac{\pi}{3}$.

(b) Complète : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ldots$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ldots$

(c) Inès écrit $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. A-t-elle raison ? Justifie et donne la valeur exacte simplifiée.

(d) Le point $J(0\,;\,1)$ est l'image de quel réel de $[0\,;\,\pi]$? Déduis-en le cosinus et le sinus de ce réel.

(e) Donne les coordonnées du point image du réel π. Déduis-en $\cos\pi$ et $\sin\pi$.

Ex. 30 ★☆☆ **Calculer avec les valeurs exactes** — Calcule en valeur exacte, sans calculatrice.

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1$

(c) $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)$, puis $2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Compare les deux résultats.

(d) $4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(e) $\cos\pi + 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(f) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Ex. 31 ★★☆ **Démontrer avec deux triangles** — On démontre des valeurs remarquables avec la trigonométrie du triangle rectangle. EFG est un triangle rectangle et isocèle en F tel que $EG = 1$. RST est un triangle équilatéral de côté 1 et K est le milieu de $[ST]$.

(a) Justifie que $\widehat{FEG} = 45°$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ rad.

(b) Calcule FG en valeur exacte simplifiée, puis déduis-en $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

(c) Justifie que le triangle RKS est rectangle en K, puis déduis-en $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(d) Calcule RK en valeur exacte, puis déduis-en $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ex. 32 ★★☆ **Les erreurs de Noé** — Noé doit donner des valeurs exactes pour les réels $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Il écrit : « $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ».

(a) Dans quel quadrant se trouvent les images de ces trois réels sur le cercle trigonométrique ? Déduis-en le signe de leur cosinus et de leur sinus.

(b) Explique, à l'aide de ces signes, pourquoi les deux premiers résultats de Noé sont faux.

(c) L'image de $\frac{5\pi}{6}$ est la symétrique de celle de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des ordonnées. Corrige le troisième résultat.

(d) Avec la même symétrie, donne les coordonnées exactes des images de $\frac{2\pi}{3}$ et de $\frac{3\pi}{4}$.

Ex. 33 ★★★ **Les affirmations de Clémence** — Réponds sans calculatrice, en valeur exacte. Clémence révise les valeurs remarquables et fait plusieurs affirmations.

(a) Calcule $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right)$ et $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(b) Clémence affirme : « pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos x$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Clémence remarque que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Vérifie-le, puis explique cette égalité par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

(d) Clémence affirme : « $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 33 (suite)

(e) Calcule $\cos^2 x + \sin^2 x$ dans le cas où l'on aurait $\cos x = \sin x = \frac{1}{2}$. Déduis-en qu'aucun réel x ne vérifie cela.

Ex. 34 ★★★ **La grande roue de Yanis** — Une grande roue a un rayon de 20 m et son centre O est à 22 m du sol. Dans un repère d'origine O (unité : le mètre), la nacelle de Yanis repérée par le réel x a pour coordonnées $(20\cos x\,;\,20\sin x)$. Sa hauteur au-dessus du sol est $h = 22 + 20\sin x$.

(a) Calcule la hauteur de la nacelle pour $x = \frac{\pi}{2}$, puis pour $x = \frac{\pi}{3}$.

(b) Justifie par une symétrie la valeur de $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, puis donne la hauteur de la nacelle pour $x = -\frac{\pi}{3}$ et pour $x = -\frac{\pi}{2}$.

(c) Donne les coordonnées de la nacelle et sa hauteur pour $x = \pi$.

(d) Pour $x = \frac{\pi}{3}$, Malik trouve que l'abscisse de la nacelle vaut $10\sqrt{3}$. Explique son erreur et corrige-la.

(e) Yanis veut prendre une photo à 32 m du sol, avec x dans $[0\,;\,\pi]$. Détermine les valeurs possibles de x.

Ex. 35 ★★★ **Un triangle inscrit dans le cercle** — Sur le cercle trigonométrique de centre O, dans un repère orthonormé, on note A, B et C les images respectives des réels $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$. On étudie le triangle ABC.

(a) Donne les coordonnées exactes de C, puis justifie par une symétrie celles de A.

(b) Justifie que B est le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées, puis déduis-en les coordonnées de B.

(c) Calcule les longueurs AB, AC et BC en valeur exacte.

(d) Déduis-en la nature du triangle ABC et son périmètre.

(e) Calcule l'aire du triangle ABC en valeur exacte.

6. *Angles associés*

À retenir : J'écris le réel $\pi \pm a$, $-a$ ou $\frac{\pi}{2} \pm a$, je place le point et je lis les signes. Piège : $\sin(\pi - x) = \sin x$, pas $-\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$ mais $\sin(-x) = -\sin x$. Ex. : $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}$.

Ex. 36 ★☆☆ **Valeurs exactes par les angles associés** — Écris le réel entre parenthèses sous la forme $\pi - a$, $\pi + a$, $-a$ ou $-(\pi - a)$ avec a dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, puis donne la valeur exacte.

(a) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ (b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ (c) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

(d) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (e) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ (f) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Ex. 37 ★☆☆ **Lire les valeurs à partir d'un point** — Le point M, image du réel x sur le cercle trigonométrique, a pour coordonnées $(0{,}28\,;\,0{,}96)$. Sans calculer x, donne chaque valeur et nomme la symétrie ou la rotation utilisée.

(a) $\cos(-x)$ (b) $\sin(\pi - x)$ (c) $\cos(\pi - x)$

(d) $\sin(\pi + x)$ (e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Ex. 38 ★★☆ **Simplifier et corriger** — Pour tout réel x, on pose $A(x) = \cos x + \cos(\pi - x) + \sin(\pi + x) + \sin(-x)$ et $B(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(-x) + \sin(\pi - x)$.

(a) Simplifie $A(x)$.

(b) Déduis-en la valeur exacte de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

(c) Pour simplifier $\sin(\pi - x) - \sin x$, Inès écrit : « $\sin(\pi - x) = -\sin x$, donc le résultat vaut $-2\sin x$ ». A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

(d) Simplifie $B(x)$.

Ex. 39 ★★☆ **Les nacelles de la grande roue** — Une grande roue a pour centre O et pour rayon 12 m. Dans un repère orthonormé de centre O (unité : le mètre), la nacelle associée au réel x a pour coordonnées $(12\cos x\,;\,12\sin x)$. La nacelle de Jade est associée au réel $-\frac{5\pi}{6}$.

(a) Écris $-\frac{5\pi}{6}$ sous la forme $-(\pi - a)$, puis donne les coordonnées exactes de la nacelle de Jade.

(b) La nacelle de Tom est la symétrique de celle de Jade par rapport à O. Donne son réel dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et ses coordonnées.

(c) La nacelle de Lina s'obtient en faisant tourner celle de Jade d'un quart de tour direct de centre O. Donne son réel dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et ses coordonnées.

(d) Lina affirme : « ma nacelle est la symétrique de celle de Tom par rapport à la droite $y = x$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Vrai ou faux sur le cercle** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par une symétrie du cercle trigonométrique ou par un contre-exemple.

(a) « Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$. »

(b) « Pour tout réel x, $\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x)$. »

(c) « L'image de $\frac{2\pi}{3}$ est la symétrique, par rapport au centre O, de l'image de $\frac{\pi}{3}$. »

(d) « Les images de $-\frac{3\pi}{4}$ et de $-\frac{\pi}{4}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. »

(e) « $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$. »

Ex. 41 ★★★ **Du point au réel** — Soit x un réel de $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos x = \frac{1}{3}$, et M son image sur le cercle trigonométrique de centre O.

(a) Calcule la valeur exacte de $\sin x$ en justifiant son signe.

(b) N est l'image de M par le quart de tour direct de centre O. Exprime en fonction de x un réel dont N est l'image, puis donne les coordonnées exactes de N.

(c) P est le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$, et Q le symétrique de P par rapport à l'axe des abscisses. Exprime en fonction de x la mesure principale du réel dont Q est l'image, puis donne les coordonnées de Q.

(d) Parmi les réels $\pi - x$, $\pi + x$, $-x$ et $\frac{\pi}{2} + x$, lesquels ont leur image dans le deuxième quadrant ? Justifie par les signes des coordonnées.

Ex. 42 ★★★ **Sommes sans calculatrice** — Pour son DS, Maëlle doit calculer des sommes sans calculatrice. Les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ ne sont pas connues : utilise seulement les angles associés et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(a) Écris $\frac{3\pi}{8}$ sous la forme $\frac{\pi}{2} - a$, puis calcule $T = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

(b) Calcule $S = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$.

(c) Calcule $U = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(d) Exprime $V = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

7. *Trouver les réels de cosinus ou de sinus donné sur un intervalle*

À retenir : Je place la valeur sur l'axe (cos : abscisses, sin : ordonnées) et je trouve en général deux points. $\cos x = a$ donne α et $-\alpha$. $\sin x = a$ donne α et $\pi - \alpha$. Exemple : $\sin x = \frac{1}{2}$ donne $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Je vérifie ensuite l'intervalle.

Ex. 43 ★☆☆ **Résoudre sur l'intervalle indiqué** — Résous chaque équation sur l'intervalle indiqué. Donne les valeurs exactes.

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$. (b) $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

(c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$. (d) $\cos x = -1$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

(e) $\cos x = 2$ sur $[0\,;\,2\pi[$. (f) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$.

Ex. 44 ★☆☆ **Du point au réel** — Chaque point est sur le cercle trigonométrique. Donne le réel de $]-\pi\,;\,\pi]$ dont il est l'image (sa mesure principale).

(a) Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(b) Le point de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(c) Le point de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.

(d) Le point de coordonnées $(0\,;\,-1)$.

(e) Le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.

Ex. 45 ★★☆ **Une coordonnée et un signe** — Dans chaque cas, on connaît une coordonnée du point image de x et le signe de l'autre. Trouve le réel x dans l'intervalle donné, ou justifie qu'il n'existe pas.

(a) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\sin x < 0$ et $x \in]-\pi\,;\,\pi]$.

(b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x > 0$ et $x \in]-\pi\,;\,\pi]$.

(c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x < 0$ et $x \in [0\,;\,2\pi[$.

(d) Justifie qu'aucun réel x ne vérifie à la fois $\cos x = 0$ et $\sin x = \frac{1}{2}$.

Ex. 46 ★★☆ **L'erreur de Léna** — Léna doit résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$. Elle écrit : « $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ ».

(a) A-t-elle raison ? Vérifie chacune de ses deux valeurs.

(b) Donne les solutions correctes de $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$.

(c) Résous $\sin x = -\frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

(d) Déduis-en les solutions de $\sin x = -\frac{1}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$.

Ex. 47 ★★★ **Une équation qui se ramène au second degré** — On cherche les réels x tels que $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$. On appelle (E) cette équation et on pose $X = \cos x$.

(a) Résous l'équation $2X^2 + 3X + 1 = 0$.

(b) Déduis-en les solutions de (E) dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

(c) Donne les solutions de (E) dans $[0\,;\,2\pi[$. Explique pourquoi elles ne sont pas toutes les mêmes qu'à la question précédente.

(d) Vérifie par un calcul direct que chaque solution trouvée dans $]-\pi\,;\,\pi]$ convient.

(e) Montre que pour tout réel x : $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = -\left(2\cos^2 x + 3\cos x + 1\right)$. Déduis-en les solutions de $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$ dans $[0\,;\,2\pi[$.

Ex. 48 ★★★ **La nacelle de Sacha** — Une grande roue a un rayon de 20 m et son centre est à 22 m du sol. Dans un repère centré sur le centre de la roue (unité : 20 m), la nacelle de Sacha est l'image M d'un réel x sur le cercle trigonométrique. Sa hauteur au-dessus du sol est alors $h = 22 + 20\sin x$ (en m). On prend $x \in [0\,;\,2\pi[$.

(a) Calcule la hauteur de la nacelle pour $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

(b) Trouve les réels x pour lesquels la nacelle est à $22 - 10\sqrt{3}$ m du sol, puis vérifie chacun d'eux.

(c) Sacha espère monter à 50 m. Est-ce possible ? Justifie, puis donne la hauteur maximale et le réel x correspondant.

(d) Pour quels réels x la nacelle est-elle à 2 m du sol ? Combien y en a-t-il ?

(e) La nacelle est à $22 + 10\sqrt{2}$ m du sol, dans la moitié gauche de la roue ($\cos x < 0$). Trouve x.

Ex. 49 ★★★ **Combien de solutions ?** — Soit k un réel. On étudie l'équation $\cos x = k$: ses solutions sont les réels dont l'image sur le cercle trigonométrique a pour abscisse k.

(a) Justifie que l'équation $\cos x = -\sqrt{2}$ n'a aucune solution.

(b) Résous $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$, puis dans $[0\,;\,2\pi[$.

(c) Résous $\cos x = 1$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$. Explique pourquoi il n'y a qu'une solution.

(d) Inès affirme : « Si x est solution de $\cos x = k$, alors $-x$ l'est aussi. » A-t-elle raison ? Justifie avec une symétrie du cercle.

(e) Déduis-en le nombre de solutions de $\cos x = k$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ selon les valeurs de k. Justifie.