1. Rappels de 3e : cosinus et sinus dans le triangle rectangle

Ex. 1 ★☆☆ **Lire cosinus et sinus dans un triangle rectangle**

(a) L'angle droit est en S. Le côté en face est $[RT]$: c'est l'hypoténuse. On vérifie : $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

(b) Pour l'angle en R, le côté adjacent est $[RS]$: $\cos\widehat{SRT} = \frac{RS}{RT} = \frac{5}{13}$.

(c) Pour l'angle en R, le côté opposé est $[ST]$: $\sin\widehat{SRT} = \frac{ST}{RT} = \frac{12}{13}$.

(d) Non. Pour l'angle en T, le côté adjacent n'est plus $[RS]$ mais $[ST]$: $\cos\widehat{STR} = \frac{ST}{RT} = \frac{12}{13}$. Nathan a confondu adjacent et opposé : il a donc tort.

(e) Pour l'angle en T, le côté opposé est $[RS]$: $\sin\widehat{STR} = \frac{RS}{RT} = \frac{5}{13}$.

(f) $\tan\widehat{SRT} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{ST}{RS} = \frac{12}{5}$.

Ex. 2 ★☆☆ **Longueurs et angles à la calculatrice**

(a) $[KL]$ est adjacent à l'angle en K et $[KM]$ est l'hypoténuse : $\cos 35° = \frac{KL}{8}$, donc $KL = 8 \times \cos 35° \approx 6{,}6$ cm.

(b) $[FG]$ est opposé à l'angle en E : $\sin 50° = \frac{FG}{EG}$, donc $EG = \frac{4}{\sin 50°} \approx 5{,}2$ cm.

(c) $\cos\widehat{QPR} = \frac{PQ}{PR} = \frac{7}{10} = 0{,}7$. Avec la touche $\cos^{-1}$: $\widehat{QPR} \approx 45{,}6°$.

(d) Sa calculatrice est en mode radians : elle a calculé le cosinus de 60 radians. En mode degrés, on obtient $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Rappel : le cosinus d'un angle aigu est toujours entre 0 et 1, donc $-0{,}952$ ne pouvait pas convenir.

Ex. 3 ★★☆ **De Pythagore à $\cos^2 + \sin^2 = 1$**

(a) L'hypoténuse est $[BC]$, en face de l'angle droit. Pour l'angle en B : $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$ (côté adjacent) et $\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$ (côté opposé).

(b) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Donc $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Ex. 3 (suite)

(c) Les longueurs sont strictement positives, donc les deux quotients sont strictement positifs. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ avec $AC^2 > 0$, donc $BC^2 > AB^2$, puis $BC > AB$ car ces longueurs sont positives. De même, $BC > AC$. L'hypoténuse est donc le plus grand côté, et les deux quotients sont strictement inférieurs à 1. Conclusion : $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$.

(d) $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, donc $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ (environ 1,118). Or le cosinus d'un angle aigu est strictement inférieur à 1. Lina a donc tort.

(e) D'après la question 2, appliquée à l'angle aigu β : $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$. Comme β est aigu, $\cos\beta > 0$.
Donc $\cos\beta = \frac{\sqrt{45}}{7} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Ex. 4 ★★☆ **L'échelle contre le mur**

(a) Le mur, le sol et l'échelle forment un triangle rectangle au pied du mur. L'échelle en est l'hypoténuse, et la distance au mur est le côté adjacent à θ. Distance $= 4 \times \cos 30° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ m.

(b) Distance $= 4 \times \cos 60° = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ m.

(c) Non. Pour 30°, la distance vaut $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ m. Pour 60°, elle vaut 2 m : elle diminue au lieu de doubler. En effet, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ alors que $2\cos 30° = \sqrt{3}$. Le cosinus n'est pas proportionnel à l'angle : Malo a tort.

(d) $\sin^2 60° = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, et l'angle est aigu, donc $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La hauteur est le côté opposé à θ : $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ m.

(e) $\cos\theta = \frac{1}{4}$. En mode degrés, avec la touche $\cos^{-1}$: $\theta \approx 75{,}5°$. Ben doit incliner l'échelle d'environ 75,5° par rapport au sol.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux sur les angles aigus**

(a) Faux. Le triangle agrandi a les mêmes angles. Pour un angle aigu, $\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ devient $\frac{2\times\text{adjacent}}{2\times\text{hypoténuse}} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$: le cosinus ne change pas. Par exemple, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Le cosinus dépend de l'angle, pas de la taille du triangle.

(b) Faux. Avec la touche $\cos^{-1}$ en mode degrés : $\alpha \approx 36{,}87°$ et $\beta \approx 66{,}42°$. Or $2\alpha \approx 73{,}74°$, donc $\beta \neq 2\alpha$. Diviser le cosinus par 2 ne double pas l'angle : le cosinus n'est pas proportionnel à l'angle.

Ex. 5 **(suite)**

(c) Faux. D'après $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (qu'on obtient avec Pythagore), $\sin^2\alpha = 1 - 0{,}28^2 = 1 - 0{,}0784 = 0{,}9216$. Comme α est aigu, $\sin\alpha > 0$, donc $\sin\alpha = \sqrt{0{,}9216} = 0{,}96$. C'est le carré qui se complète à 1, pas le cosinus lui-même.

(d) Vrai. L'hypoténuse est $[EG]$, le côté en face de l'angle droit en F. Pour l'angle $\widehat{FEG}$, le côté adjacent est $[EF]$, donc $\cos\widehat{FEG} = \frac{EF}{EG}$. Pour l'angle $\widehat{FGE}$, le côté opposé est aussi $[EF]$, donc $\sin\widehat{FGE} = \frac{EF}{EG}$. Les deux nombres sont égaux.

(e) Faux. À la calculatrice, $\cos 20° \approx 0{,}9397$ et $\sin 20° \approx 0{,}3420$, donc $\cos 20° + \sin 20° \approx 1{,}2817$, et ce n'est pas 1. C'est la somme des carrés qui vaut 1 : $\cos^2 20° + \sin^2 20° = 1$.

Ex. 6 ★★★ **Un triangle qui n'est pas rectangle**

(a) Le triangle ABH est rectangle en H. L'hypoténuse est le côté en face de l'angle droit : c'est $[AB]$. Pour l'angle $\widehat{ABH}$, le côté adjacent est $[BH]$ et le côté opposé est $[AH]$.

(b) $\sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}$, donc $AH = 10 \times \sin 30° = 10 \times \frac{1}{2} = 5$. De même, $\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB}$, donc $BH = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.
Donc $AH = 5$ cm et $BH = 5\sqrt{3}$ cm.

(c) $\sin\widehat{ACH} = \frac{AH}{AC}$, donc $AC = \frac{5}{\sin 45°} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$. Ensuite, $\cos\widehat{ACH} = \frac{HC}{AC}$, donc $HC = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$.
Donc $AC = 5\sqrt{2}$ cm et $HC = 5$ cm.

(d) H est sur $[BC]$, donc $BC = BH + HC = 5\sqrt{3} + 5$. Le périmètre vaut $AB + BC + AC = 10 + 5 + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2} = 15 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ cm. L'aire vaut $\frac{BC \times AH}{2} = \frac{(5+5\sqrt{3})\times 5}{2} = \frac{25+25\sqrt{3}}{2}$ cm².

Ex. 7 ★★★ **La rampe d'accès est-elle aux normes ?**

(a) Pour l'angle $\widehat{QPR}$, le côté adjacent est $[PQ]$ et l'hypoténuse est $[PR]$.
Donc $\cos\widehat{QPR} = \frac{4{,}48}{4{,}5} \approx 0{,}9956$. Avec la touche $\cos^{-1}$ en mode degrés, appliquée au quotient exact, on obtient $\widehat{QPR} \approx 5{,}4°$.

(b) $5{,}4° > 5°$, donc l'angle dépasse la limite. La rampe ne respecte pas la norme : elle est trop raide.

(c) Sa calculatrice était en mode radians : 0,0943 est la mesure de l'angle en radians, pas en degrés. En mode degrés, on obtient environ 5,4°. Il faut régler la calculatrice en degrés pour les angles du triangle rectangle.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Le triangle PQR est rectangle en Q. D'après le théorème de Pythagore, $QR^2 = PR^2 - PQ^2 = 20{,}25 - 20{,}0704 = 0{,}1796$.
Donc $QR = \sqrt{0{,}1796}$ m, soit environ 0,42 m.

(e) On note L la nouvelle longueur. On a $\sin 4° = \frac{QR}{L}$, car $[QR]$ est opposé à l'angle et la rampe est l'hypoténuse. Donc $L = \frac{\sqrt{0{,}1796}}{\sin 4°} \approx 6{,}08$. La rampe doit mesurer environ 6,08 m. Passer de 5,4° à 4° n'allonge pas la rampe en proportion de l'angle.

2. *Convertir degrés et radians, longueur d'un arc*

Ex. 8 ★☆☆ **Convertir degrés et radians**

(a) $72° = \frac{72\pi}{180}$ rad $= \frac{2\pi}{5}$ rad
(on simplifie par 36).

(b) $\frac{5\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = \frac{5\times 180}{12} = 5 \times 15 = 75°$.

(c) $330° = \frac{330\pi}{180}$ rad $= \frac{11\pi}{6}$ rad
(on simplifie par 30).

(d) $\frac{7\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = \frac{7\times 180}{9} = 7 \times 20 = 140°$.

(e) $0{,}8 \times \frac{180}{\pi} = \frac{144}{\pi}$, donc 0,8 rad $= \frac{144}{\pi}$ degrés $\approx 45{,}8°$. Une mesure sans π est possible, et 0,8 rad ne vaut pas 0,8°.

Ex. 9 ★☆☆ **Longueur d'un arc, angle au centre**

(a) $\ell = r\alpha = 5 \times 2{,}4 = 12$ m. Un angle de 2,4 rad, sans π, est une mesure valable.

(b) On convertit d'abord : $45° = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad.
Donc $\ell = 8 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi$ cm
(et non 8×45).

(c) $\ell = 1{,}5 \times \frac{\pi}{5} = 0{,}3\pi$ m, soit $\ell = 30\pi$ cm.

(d) $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{18}{8} = 2{,}25$ rad.

(e) $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{2\pi}{9}$ rad.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les radians**

(a) $50° = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$ rad $\approx 0{,}873$ rad, donc 50° est plus petit que 1 rad. En effet 1 rad $= \frac{180}{\pi} \approx 57{,}3°$, et non 1° : on ne compare pas deux nombres exprimés dans des unités différentes. L'affirmation est fausse.

(b) La formule $\ell = r\alpha$ demande α en radians. Or $36° = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$ rad, donc $\ell = 10 \times \frac{\pi}{5} = 2\pi$ cm $\approx 6{,}3$ cm. Inès a calculé 10×36 avec des degrés : l'affirmation est fausse.

(c) Une mesure en radians peut être n'importe quel réel : 2 rad $= 2 \times \frac{180}{\pi} \approx 114{,}6°$. L'affirmation est fausse.

Ex. 10 (suite)

(d) Il faut ℓ et r dans la même unité : 0,2 m = 20 cm. Donc $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{20}{4} = 5$ rad. Lou a divisé 0,2 par 4 sans convertir : l'affirmation est fausse.

Ex. 11 ★★☆ **L'arroseur du jardin**

(a) $105° = \frac{105\pi}{180}$ rad $= \frac{7\pi}{12}$ rad (on simplifie par 15). L'angle de pivot mesure $\frac{7\pi}{12}$ rad.

(b) Avec α en radians : $\ell = 6 \times \frac{7\pi}{12} = \frac{7\pi}{2}$ m. L'arc mesure environ 11,0 m.

(c) $\mathcal{A} = \frac{6^2 \times \frac{7\pi}{12}}{2} = \frac{21\pi}{2}$ m². L'arroseur mouille environ 33 m².

(d) $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ rad, et $\frac{5}{3} \times \frac{180}{\pi} = \frac{300}{\pi} \approx 95{,}5$. Le bras pivote donc de $\frac{5}{3}$ rad, soit environ 95°.

Ex. 12 ★★★ **Le pendule de l'horloge**

(a) Le rayon est $r = 80$ cm et l'arc mesure $\ell = 28$ cm. Avec $\ell = r\alpha$ (α en radians) : $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{28}{80} = \frac{7}{20} = 0{,}35$ rad. Une mesure en radians n'est pas forcément un multiple de π. Le fil balaie un angle de 0,35 rad.

(b) $0{,}35 \times \frac{180}{\pi} = \frac{63}{\pi}$. L'angle mesure donc $\frac{63}{\pi}$ degrés exactement, soit environ 20,1°.

(c) Le nouveau rayon est $r = 160$ cm. Alors $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{28}{160} = \frac{7}{40} = 0{,}175$ rad, c'est-à-dire la moitié de 0,35 rad. À arc fixé, doubler le rayon divise l'angle par 2 : Sacha a tort.

(d) $18° = \frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$ rad. Comme $\ell = r\alpha$, on a $r = \frac{\ell}{\alpha} = 28 \div \frac{\pi}{10} = \frac{280}{\pi}$. Le fil doit mesurer $\frac{280}{\pi}$ cm, soit environ 89,1 cm.

Ex. 13 ★★★ **Éventails et secteurs de disque**

(a) Le disque entier correspond à un tour complet, donc $\alpha = 2\pi$. L'arc mesure alors $r \times 2\pi = 2\pi r$: c'est le périmètre du cercle. L'aire vaut $A = \frac{r^2 \times 2\pi}{2} = \pi r^2$: c'est l'aire du disque.

(b) $A = \frac{r^2\alpha}{2}$ donne $\alpha = \frac{2A}{r^2} = \frac{2 \times 144\pi}{324} = \frac{8\pi}{9}$ rad. En degrés : $\frac{8\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = 160°$. Arc : $\ell = 18 \times \frac{8\pi}{9} = 16\pi$ cm. L'éventail a un angle de $\frac{8\pi}{9}$ rad, soit 160°, et un arc de 16π cm.

(c) $2 \times 8 + 8\alpha = 70$ donne $8\alpha = 54$, donc $\alpha = 6{,}75$ rad. Or $2\pi \approx 6{,}28 < 6{,}75$: il faudrait plus d'un tour complet, ce qui est exclu car $\alpha \leqslant 2\pi$. Le secteur est impossible. Le contour est le plus grand pour $\alpha = 2\pi$: il vaut $16 + 16\pi$ cm, soit environ 66,3 cm.

Ex. 13 (suite)

(d) $2r + r\alpha = 40$ donne $r\alpha = 40 - 2r$. Donc $A = \frac{r \times r\alpha}{2} = \frac{r(40-2r)}{2} = 20r - r^2$. Or $100 - (r-10)^2 = 100 - r^2 + 20r - 100 = 20r - r^2 = A$. Comme $(r-10)^2 \geqslant 0$, on a $A \leqslant 100$, avec égalité seulement pour $r = 10$. Alors $10\alpha = 40 - 20 = 20$, donc $\alpha = 2$ rad (et on a bien $2 \leqslant 2\pi$). L'aire est la plus grande, égale à 100 cm², pour $r = 10$ cm et un angle de 2 rad.

Ex. 14 ★★★ **Un programme de conversion**

(a) Les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles : 180° correspond à π rad. Un produit en croix donne $d° = \frac{d \times \pi}{180}$ rad. `g` est le PGCD de d et 180 : on divise le numérateur et le dénominateur par `g`, donc la fraction $\frac{d}{180}$ est simplifiée au maximum.

(b) PGCD(210, 180) = 30, avec $210 = 7 \times 30$ et $180 = 6 \times 30$. Le programme affiche `(7, 6)`, c'est-à-dire $210° = \frac{7\pi}{6}$ rad.

(c) Il faut $\frac{180}{g} = 4$, donc $g = 45$. Alors d est un multiple de 45, et son PGCD avec 180 vaut exactement 45 : $d = 45p$ avec p impair (si p est pair, 90 divise d et le PGCD vaut au moins 90). Entre 1 et 360, on trouve $d = 45$, 135, 225 et 315, qui donnent $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

(d) La formule $\ell = r\alpha$ n'est vraie qu'avec α en radians. Zoé utilise l'angle en degrés. Il faut d'abord convertir : on écrit `from math import pi` et la fonction renvoie `r * d * pi / 180`.

(e) $210° = \frac{7\pi}{6}$ rad, donc $\ell = 12 \times \frac{7\pi}{6} = 14\pi$. `arc(12, 210)` devrait renvoyer une valeur approchée de 14π cm, soit environ 44,0 cm.

3. *Placer un point sur le cercle, mesure principale*

Ex. 15 ★☆☆ **Mesures principales**

(a) $2\pi = \frac{12\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale est $\frac{5\pi}{6}$.

(b) $2\pi = \frac{8\pi}{4}$ et $-\frac{7\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale est $\frac{\pi}{4}$.

(c) $2\pi = \frac{6\pi}{3}$ et $31 = 5 \times 6 + 1$, donc $\frac{31\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 5 \times 2\pi$: on retire 10π. La mesure principale est $\frac{\pi}{3}$.

(d) $2\pi = \frac{10\pi}{5}$: $\frac{27\pi}{5} - \frac{20\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$, plus grand que π ; on retire encore un tour : $\frac{7\pi}{5} - \frac{10\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5}$. La mesure principale est $-\frac{3\pi}{5}$.

(e) $2\pi = \frac{16\pi}{8}$ et $-\frac{19\pi}{8} + \frac{16\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} \in]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale est $-\frac{3\pi}{8}$.

Ex. 15 **(suite)**

(f) $2\pi = \frac{12\pi}{6}$: on ajoute deux tours, $-\frac{29\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} \in]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale est $-\frac{5\pi}{6}$.

Ex. 16 ★☆☆ **Dans quel quart de cercle ?**

(a) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 < 3 < \pi \approx 3{,}14$: l'image de 3 est dans le 2e quadrant (environ $172°$, tout près de I').

(b) $-\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57 < -1 < 0$: l'image de -1 est dans le 4e quadrant (environ $-57°$).

(c) $\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{8} < \frac{5\pi}{8} < \frac{8\pi}{8} = \pi$: 2e quadrant ($112{,}5°$).

(d) $-\frac{9\pi}{5} + \frac{10\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$: l'image de $-\frac{9\pi}{5}$ est dans le 1er quadrant.

(e) $\frac{13\pi}{7} - \frac{14\pi}{7} = -\frac{\pi}{7} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$: 4e quadrant.

(f) $4 - 2\pi \approx -2{,}28$ et $-\pi \approx -3{,}14 < -2{,}28 < -\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$: 3e quadrant.

Ex. 17 ★★☆ **La grande aiguille de l'horloge**

(a) Non : la grande aiguille tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, alors que le sens direct est le sens inverse. Sa rotation est donc associée à des réels négatifs.

(b) Un tour (2π) dure 60 minutes, donc 20 minutes font $\frac{1}{3}$ de tour, dans le sens indirect : $-\frac{1}{3} \times 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$. La pointe tourne de $-\frac{2\pi}{3}$.

(c) $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \in]-\pi\,;\,\pi]$. Ses coordonnées sont $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\,;\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$, dans le 4e quadrant : c'est bien la position de « 4 » sur le cadran.

(d) De 12 h à 14 h 45, il y a 165 minutes, soit $\frac{165}{60} = \frac{11}{4}$ tour : rotation de $-\frac{11}{4} \times 2\pi = -\frac{11\pi}{2}$. On arrive en $\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{2} = -5\pi$. Ajouter deux tours donne $-\pi$, qui n'est pas dans $]-\pi\,;\,\pi]$. On ajoute trois tours : $-5\pi + 6\pi = \pi$. La mesure principale est π : c'est le point I', le « 9 » du cadran.

Ex. 18 ★★☆ **Même image ou pas ?**

(a) $\frac{11\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{16\pi}{4} = 4\pi = 2 \times 2\pi$: la différence est un multiple de 2π. Vrai : les deux réels ont la même image.

(b) $\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$, qui n'est pas un multiple de 2π : c'est un demi-tour. Faux : les deux images sont diamétralement opposées.

(c) Retirer 3π, c'est faire un tour et demi : on change de point. Il faut retirer des multiples de $2\pi = \frac{8\pi}{4}$: $\frac{13\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} > \pi$, puis $\frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$. Faux : la mesure principale est $-\frac{3\pi}{4}$.

Ex. 18 **(suite)**

(d) $-\pi$ a bien pour image I', mais l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ est ouvert en $-\pi$. On ajoute un tour : $-\pi + 2\pi = \pi$. Faux : la mesure principale est π.

Ex. 19 ★★★ **Les erreurs de Lina**

(a) Erreur : $5\pi = 2 \times 2\pi + \pi$ ne fait pas un nombre entier de tours. Lina a retiré un demi-tour en trop, donc $-\frac{3\pi}{10}$ correspond au point diamétralement opposé.
Correction : $2\pi = \frac{20\pi}{10}$ et $47 = 2 \times 20 + 7$, donc $\frac{47\pi}{10} = \frac{7\pi}{10} + 2 \times 2\pi$. On retire 4π, soit 2 tours, et $\frac{7\pi}{10} \in]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale de $\frac{47\pi}{10}$ est $\frac{7\pi}{10}$.

(b) Erreur : Lina a ajouté 2 au numérateur, c'est-à-dire $\frac{2\pi}{5}$ et non 2π. Il faut écrire 2π avec le même dénominateur : $2\pi = \frac{10\pi}{5}$. Correction : $-\frac{22\pi}{5} + \frac{10\pi}{5} = -\frac{12\pi}{5} < -\pi$, donc on ajoute encore un tour : $-\frac{12\pi}{5} + \frac{10\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5} \in]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale de $-\frac{22\pi}{5}$ est $-\frac{2\pi}{5}$.

(c) Erreur : le signe ne suffit pas. Il faut d'abord la mesure principale, et même un réel de $]-\pi\,;\,0[$ peut avoir son image dans le 3e ou le 4e quadrant. Ici $-\frac{17\pi}{12} < -\pi$.
Correction : $2\pi = \frac{24\pi}{12}$ et $-\frac{17\pi}{12} + \frac{24\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$. Or $\frac{6\pi}{12} < \frac{7\pi}{12} < \frac{12\pi}{12}$, donc $\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. L'image de $-\frac{17\pi}{12}$ est dans le 2e quadrant.

(d) Erreur : pour avoir la même image, la différence doit être un multiple de 2π, pas seulement de π. Ici $\pi = \frac{1}{2} \times 2\pi$, c'est un demi-tour. Correction : $\frac{9\pi}{7} = \frac{2\pi}{7} + \pi$, donc les deux images sont diamétralement opposées. D'ailleurs, la mesure principale de $\frac{9\pi}{7}$ est $\frac{9\pi}{7} - \frac{14\pi}{7} = -\frac{5\pi}{7} \neq \frac{2\pi}{7}$. Les deux réels n'ont pas la même image.

Ex. 20 ★★★ **Des réels sans π**

(a) On a $\frac{\pi}{2} < 1{,}575 < 2 < 3{,}14 < \pi$, donc l'image de 2 est dans le 2e quadrant (environ $115°$). De même, $-\pi < -3{,}14 < -2 < -1{,}575 < -\frac{\pi}{2}$, donc $-2 \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$ et son image est dans le 3e quadrant (environ $-115°$). Les deux images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : Kenza a tort.

(b) On a $6{,}28 < 2\pi < 6{,}30$, donc $10 - 2\pi > 3{,}70 > \pi$: il faut retirer encore un tour. Comme $12{,}56 < 4\pi < 12{,}60$, on a $-2{,}60 < 10 - 4\pi < -2{,}56$. Or $-\pi < -3{,}14$ et $-\frac{\pi}{2} > -1{,}575$, donc $10 - 4\pi \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$. La mesure principale de 10 est $10 - 4\pi$ (environ $-2{,}57$), et son image est dans le 3e quadrant.

Ex. 20 **(suite)**

(c) On a $4{,}71 < \frac{3\pi}{2} < 4{,}725$ et $6{,}28 < 2\pi < 6{,}30$. Comme $\frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi$, les mesures principales $5 - 2\pi$ et $6 - 2\pi$ appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$: 4e quadrant. Ensuite $0 < 7 - 2\pi < 0{,}72 < \frac{\pi}{2}$: 1er quadrant. Enfin $1{,}70 < 8 - 2\pi < 1{,}72$ et $2{,}70 < 9 - 2\pi < 2{,}72$, qui sont entre $\frac{\pi}{2}$ (moins de 1,575) et π (plus de 3,14) : 2e quadrant. Seuls 5 et 6 ont leur image dans le 4e quadrant.

(d) Supposons que deux entiers distincts p et q aient la même image. Leur différence est alors un multiple de 2π : $p - q = 2k\pi$ avec k entier. Comme $p \neq q$, on a $k \neq 0$, donc $\pi = \frac{p-q}{2k}$ serait un quotient de deux entiers. C'est impossible, car π est irrationnel. Deux entiers distincts n'ont donc jamais la même image.

Ex. 21 ★★★ **Le robot de la bordure**

(a) Le sens inverse des aiguilles d'une montre est le sens direct, donc on associe le réel $\frac{29\pi}{4}$. On a $2\pi = \frac{8\pi}{4}$ et $29 = 3 \times 8 + 5$, donc $\frac{29\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 3 \times 2\pi$: le robot fait 3 tours complets. Comme $\frac{5\pi}{4} > \pi$, on retire encore un tour : $\frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \in]-\pi\,;\,\pi]$. La mesure principale associée à A est $-\frac{3\pi}{4}$, et $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, dans le 3e quadrant.

(b) Le sens des aiguilles d'une montre est le sens indirect, donc le réel associé est $-\frac{5\pi}{3}$. On a $-\frac{5\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \in]-\pi\,;\,\pi]$, donc la mesure principale est $\frac{\pi}{3}$. Ainsi $B\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(c) En partant de A et en allant dans le sens direct jusqu'à B, l'arc mesure $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{12}$ m, ce qui est plus que la moitié du cercle (π m). L'autre arc mesure donc $2\pi - \frac{13\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$ m. Le plus court arc qui relie A et B mesure $\frac{11\pi}{12}$ m.

(d) C a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\,;\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$: c'est l'image de $\frac{2\pi}{3}$, dans le 2e quadrant. Dans le sens des aiguilles d'une montre, on l'atteint avec le réel $\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$, soit $\frac{4\pi}{3}$ m depuis I. Avec 2 tours complets avant (4π m), on obtient $4\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$. Le robot a parcouru $\frac{16\pi}{3}$ m.

(e) J' est l'image de $\frac{3\pi}{2}$ si l'on parcourt le cercle dans le sens direct depuis I. Après 3 tours complets (6π m), le robot doit encore parcourir $\frac{3\pi}{2}$ m. La distance minimale est donc $6\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$ m.

4. *Cosinus et sinus d'un réel : signes, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$*

Ex. 22 ★☆☆ **Lire cosinus et sinus sur le cercle**

(a) Le cosinus est l'abscisse de l'image et le sinus son ordonnée : $\cos x = -\frac{5}{13}$ et $\sin x = \frac{12}{13}$.

(b) $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$: $\frac{5\pi}{2}$ a la même image que $\frac{\pi}{2}$, c'est le point $J(0\,;1)$.
Donc $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$.

(c) Le seul point du cercle situé sur l'axe des abscisses à gauche de O est $I'(-1\,;0)$.
Donc $\cos y = -1$ et $\sin y = 0$.

(d) Non. Le sinus est l'ordonnée de l'image, donc $\sin w = -\frac{21}{29}$. La valeur $\frac{20}{29}$ est l'abscisse, c'est-à-dire $\cos w$.

(e) Non. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Or $1{,}2 > 1$, donc aucun réel n'a pour cosinus 1,2.

(f) $\cos^2 a$ signifie $(\cos a)^2$, pas $\cos(a^2)$.
Donc $\cos^2 a = (-0{,}7)^2 = 0{,}49$.

Ex. 23 ★☆☆ **Signes du cosinus et du sinus**

(a) $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$: l'image est dans le 2e quadrant.
Donc $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) > 0$.

(b) Si $x \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$, l'image de x est dans le 3e quadrant (en bas à gauche) : $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$.

(c) $\pi < \frac{13\pi}{12} < \frac{3\pi}{2}$: l'image est dans le 3e quadrant, où l'ordonnée est négative.
Donc $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) < 0$.

(d) L'image de t est dans le 4e quadrant : $\cos t > 0$ et $\sin t < 0$. Le produit d'un positif par un négatif est négatif, donc $\cos t \times \sin t < 0$.

(e) Une abscisse négative et une ordonnée positive correspondent au 2e quadrant.
Donc $u \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$.

Ex. 24 ★★☆ **Du cosinus au sinus avec le quadrant**

(a) $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$, donc $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. L'image de x est dans le 2e quadrant, où le sinus est positif.
Donc $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

(b) $\cos^2 y = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, donc $\cos y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. L'image de y est dans le 3e quadrant, où le cosinus est négatif.
Donc $\cos y = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Non. $\sin^2 z = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$, donc $\sin z = \frac{\sqrt{40}}{7} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ ou $\sin z = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Sans intervalle, on ne connaît pas le quadrant et on ne peut pas choisir le signe. La valeur $-\frac{2\sqrt{10}}{7}$ est tout aussi possible : Léa a tort de l'affirmer.

(d) $\sin^2 b = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$, donc $\sin b = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$. L'image de b est dans le 4e quadrant, où le sinus est négatif : $\sin b = -\frac{\sqrt{21}}{5}$. Vérification : $\frac{4}{25} + \frac{21}{25} = 1$. Le résultat est cohérent.

Ex. 25 ★★☆ **La copie de Malik**

(a) Oui. $\cos^2 x = \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$, donc $\sin^2 x = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$. Le calcul de $\sin^2 x$ est juste.

(b) De $\sin^2 x = \frac{9}{16}$ on tire deux valeurs : $\sin x = \frac{3}{4}$ ou $\sin x = -\frac{3}{4}$. Malik a oublié la valeur négative et n'a pas utilisé l'intervalle. Comme $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, l'image de x est dans le 3e quadrant, où le sinus est négatif.
Donc $\sin x = -\frac{3}{4}$.

(c) $\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} = 1$. La relation est bien vérifiée.

(d) Non. $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ donne $\sin^2 y = 1$, donc $\sin y = 1$ ou $\sin y = -1$. Contre-exemple : pour $y = -\frac{\pi}{2}$, l'image est le point $(0\,;\,-1)$, donc $\cos y = 0$ et $\sin y = -1$. Malik a tort.

(e) La racine porte sur le numérateur et sur le dénominateur : $\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$. Comme $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$, on obtient $\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ex. 26 ★★★ **Vrai ou faux sur le cercle trigonométrique**

(a) On factorise avec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, où $A = \cos^2 x$ et $B = \sin^2 x$: $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$. Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ pour tout réel x.
L'affirmation est vraie.

(b) $\cos^2 x = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$, donc $\cos x = \frac{15}{17}$ ou $\cos x = -\frac{15}{17}$. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, l'image de x est à droite de l'axe des ordonnées : son abscisse est positive.
Donc $\cos x = \frac{15}{17}$. L'affirmation est vraie.

(c) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ veut dire $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$. À la calculatrice en mode radian, $\cos\left(\frac{\pi^2}{9}\right) \approx 0{,}4566$, qui est différent de 0,25. L'affirmation est fausse : $\cos^2 x$ est le carré de $\cos x$ et non $\cos(x^2)$.

Ex. 26 **(suite)**

(d) Contre-exemple : pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, et $\sqrt{2} \neq 1$. L'affirmation est fausse : la relation porte sur les carrés, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(e) Contre-exemple : $x = \frac{5\pi}{4}$. Son image est celle de $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$, dans le 3e quadrant : $\cos x = \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, tous deux négatifs. Pourtant $\frac{5\pi}{4} > 0$, donc $x \notin \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$. Seule la mesure principale de x est dans cet intervalle. L'affirmation est fausse.

Ex. 27 ★★★ **Une ordonnée double de l'abscisse**

(a) Le cosinus est l'abscisse de M et le sinus son ordonnée, donc $M(a\,;\,2a)$. Ensuite $a^2 + (2a)^2 = 1$, soit $a^2 + 4a^2 = 1$.
Donc a vérifie $5a^2 = 1$.

(b) $5a^2 = 1$ équivaut à $a^2 = \frac{1}{5}$, soit $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Les solutions sont donc $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(c) Si $x \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$, l'image de x est dans le 3e quadrant, donc $\cos x < 0$. Ainsi $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, puis $\sin x = 2\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Le sinus est bien négatif, ce qui est cohérent avec le 3e quadrant.

(d) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} + \frac{20}{25} = \frac{25}{25} = 1$. La relation est bien vérifiée.

(e) $\cos(-x) = \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin(-x) = -\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$: l'image de $-x$ est $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\,;\,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$: l'image de $\frac{\pi}{2} - x$ est $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\,;\,-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Ex. 28 ★★★ **Le satellite et ses capteurs**

(a) L'ordonnée de S est $\sin x = 0{,}28$. Avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on obtient $\cos^2 x = 1 - 0{,}0784 = 0{,}9216$.
Donc $\cos x = 0{,}96$ ou $\cos x = -0{,}96$. Sans information sur le quadrant, on ne peut pas choisir entre ces deux valeurs opposées.

(b) À gauche de l'axe des ordonnées, l'abscisse est négative, donc $\cos x = -0{,}96$. Comme $\cos x < 0$ et $\sin x > 0$, l'image est dans le 2e quadrant. La mesure principale de x appartient donc à $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$.

(c) Si c'était le cas, on aurait $\cos^2 x + \sin^2 x = 0{,}49 + 0{,}49 = 0{,}98$. Or $0{,}98 \neq 1$, donc ce point n'est pas sur le cercle trigonométrique. C'est impossible : le technicien se trompe.

Ex. 28 **(suite)**

(d) $\cos(x+\pi) = -\cos x = 0{,}96$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x = -0{,}28$.
Donc $S'(0{,}96\,;\,-0{,}28)$. L'abscisse est positive et l'ordonnée négative : S' est dans le 4e quadrant.

(e) $SS' = \sqrt{(0{,}96-(-0{,}96))^2+(-0{,}28-0{,}28)^2} = \sqrt{3{,}6864+0{,}3136} = \sqrt{4} = 2$ unités. En effet, S et S' sont diamétralement opposés. On a donc $SS' = 2\times 10\,000 = 20\,000$ km.

5. *Valeurs remarquables de cos et sin*

Ex. 29 ★☆☆ **Lire les valeurs remarquables**

(a) $A\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$: A est proche de l'axe des ordonnées, son abscisse est petite.

(b) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$: l'image de $\frac{\pi}{6}$ est proche de I, son abscisse est grande.

(c) Non : l'image de $\frac{\pi}{4}$ est sur la droite d'équation $y=x$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = c$ avec $c>0$ (premier quadrant). Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a $2c^2 = 1$, donc $c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et non $\frac{1}{2}$.

(d) J est l'image de $\frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct). Ses coordonnées donnent $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(e) L'image de π (demi-tour) est le point $(-1\,;\,0)$, donc $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.

Ex. 30 ★☆☆ **Calculer avec les valeurs exactes**

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(b) $2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

(c) $\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ alors que $2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$: ils sont différents, on ne sort pas le 2 du cosinus.

(d) $4\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

(e) $-1+3\times 1 = 2$.

(f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0 = \frac{3}{4}$.

Ex. 31 ★★☆ **Démontrer avec deux triangles**

(a) Le triangle est isocèle en F, donc $\widehat{FEG} = \widehat{FGE}$. Leur somme vaut $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, donc chacun mesure 45°, soit $\frac{\pi}{4}$ rad.

(b) Pythagore : $EF^2 + FG^2 = 1$ avec $EF = FG$, donc $2FG^2 = 1$ et $FG = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Alors $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{FG}{EG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{EF}{EG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ex. 31 **(suite)**

(c) Dans le triangle équilatéral, la médiane (RK) est aussi une hauteur : RKS est rectangle en K. L'angle en S mesure 60°, soit $\frac{\pi}{3}$ rad, donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{SK}{RS} = \frac{1}{2}$.

(d) Pythagore : $RK^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, donc $RK = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{RK}{RS} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ex. 32 ★★★ **Les erreurs de Noé**

(a) Les trois réels sont strictement compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π : leurs images sont dans le deuxième quadrant (en haut à gauche). Leur cosinus est négatif et leur sinus est positif.

(b) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ doit être négatif, donc il ne vaut pas $\frac{1}{2}$. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ doit être positif, donc il ne vaut pas $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées change l'abscisse en son opposée : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Noé a confondu $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(d) $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: son image est la symétrique de celle de $\frac{\pi}{3}$, d'où $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$: on obtient $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ex. 33 ★★★ **Les affirmations de Clémence**

(a) $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: son image est la symétrique de celle de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe des ordonnées, donc $\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Et $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\times\frac{1}{2} = 1$.

(b) Non. Pour $x = \frac{\pi}{3}$, $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$ alors que $2\cos x = 1$, et $-\frac{1}{2} \neq 1$. Ce contre-exemple suffit : Clémence a tort.
D'ailleurs, $2\cos x$ peut dépasser 1, ce qui est impossible pour un cosinus.

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$: c'est vrai. De plus, $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$. Les images de x et de $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$, et cette symétrie échange abscisse et ordonnée.
Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(d) Faux. L'image de $\frac{\pi}{4}$ est sur la droite d'équation $y=x$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (et non $\frac{1}{2}$). La somme vaut donc $2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, qui est différent de 1.
L'affirmation est fausse.

(e) On aurait $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Or, pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et $\frac{1}{2} \neq 1$.
Donc aucun réel n'a un cosinus et un sinus égaux tous deux à $\frac{1}{2}$
(pour $\frac{\pi}{4}$, la valeur commune est $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Ex. 34 ★★★ **La grande roue de Yanis**

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc $h = 22 + 20 = 42$ m : la nacelle est au sommet. Ensuite, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $h = 22 + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 22 + 10\sqrt{3}$ m.

(b) Les images de $-\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{3}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : même abscisse, ordonnées opposées.
Donc $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $h = 22 - 10\sqrt{3}$ m. L'image de $-\frac{\pi}{2}$ est le point $(0\,;\,-1)$, donc $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $h = 22 - 20 = 2$ m : la nacelle est au point le plus bas.

(c) $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$: la nacelle est au point $(-20\,;\,0)$. Sa hauteur est $h = 22 + 0 = 22$ m : elle est au niveau du centre.

(d) L'abscisse vaut $20\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Malik a utilisé $\frac{\sqrt{3}}{2}$, qui est la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$: il a échangé cosinus et sinus. Or l'image de $\frac{\pi}{3}$ est proche de l'axe des ordonnées, donc son abscisse est petite : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. L'abscisse de la nacelle vaut donc $20 \times \frac{1}{2} = 10$.

(e) $22 + 20\sin x = 32$ équivaut à $\sin x = \frac{1}{2}$. Sur $[0\,;\,\pi]$, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points. Le premier est l'image de $\frac{\pi}{6}$. Le second est son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, image de $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
Donc $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

Ex. 35 ★★★ **Un triangle inscrit dans le cercle**

(a) C est l'image de $\frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct) : $C(0\,;\,1)$. Les images de $-\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : même abscisse, ordonnées opposées. Comme l'image de $\frac{\pi}{6}$ est $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, on a $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.

(b) Le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées est l'image de $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$. Or $\frac{7\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 2\pi$: $\frac{7\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ ont la même image, qui est B.
Donc B a pour abscisse l'opposée de celle de A et la même ordonnée : $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.

(c) A et B ont la même ordonnée, donc $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$. Ensuite, $AC^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$, donc $AC = \sqrt{3}$.
La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées échange A et B et laisse C fixe, donc $BC = AC = \sqrt{3}$.

(d) $AB = AC = BC = \sqrt{3}$: le triangle ABC est équilatéral. Son périmètre vaut $3\sqrt{3}$ (dans l'unité de longueur du repère).

Ex. 35 (suite)

(e) La droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y = -\frac{1}{2}$. La hauteur issue de C mesure donc $1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$. L'aire vaut $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (en unité d'aire).

6. *Angles associés*

Ex. 36 ★★☆ **Valeurs exactes par les angles associés**

(a) $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. La symétrie d'axe des ordonnées change le signe de l'abscisse, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. La symétrie d'axe des ordonnées garde l'ordonnée, donc $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (et non $-\frac{1}{2}$).

(c) $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$. La symétrie de centre O change les deux signes, donc $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

(d) $-\frac{\pi}{6} = -a$ avec $a = \frac{\pi}{6}$. La symétrie d'axe des abscisses garde l'abscisse, donc $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(e) $-\frac{2\pi}{3} = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.
Donc $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(f) $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$. La symétrie de centre O change les deux signes, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (troisième quadrant : abscisse négative).

Ex. 37 ★★☆ **Lire les valeurs à partir d'un point**

(a) L'image de $-x$ est la symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, qui garde l'abscisse : $\cos(-x) = \cos x = 0{,}28$.

(b) L'image de $\pi - x$ est la symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, qui garde l'ordonnée : $\sin(\pi - x) = \sin x = 0{,}96$.

(c) La même symétrie d'axe (ordonnées) change le signe de l'abscisse : $\cos(\pi - x) = -\cos x = -0{,}28$.

(d) L'image de $\pi + x$ est la symétrique de M par rapport à O, qui change les deux signes : $\sin(\pi + x) = -\sin x = -0{,}96$.

(e) L'image de $\frac{\pi}{2} - x$ est la symétrique de M par rapport à la droite $y = x$, qui échange les coordonnées : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = 0{,}28$.

(f) L'image de $\frac{\pi}{2} + x$ s'obtient par un quart de tour direct de centre O, qui envoie $(a\,;\,b)$ sur $(-b\,;\,a)$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x = -0{,}96$.

Ex. 38 ★★☆ **Simplifier et corriger**

(a) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (symétrie d'axe des ordonnées), $\sin(\pi + x) = -\sin x$ (symétrie de centre O), $\sin(-x) = -\sin x$ (symétrie d'axe des abscisses).
Donc $A(x) = \cos x - \cos x - \sin x - \sin x = -2\sin x$.

(b) $A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{4} = -2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{4} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

(c) Inès a tort : la symétrie d'axe des ordonnées garde l'ordonnée, donc $\sin(\pi - x) = \sin x$. On a donc $\sin(\pi - x) - \sin x = \sin x - \sin x = 0$.

(d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.
Donc $B(x) = \cos x - \sin x - \cos x + \sin x = 0$ pour tout réel x.

Ex. 39 ★★☆ **Les nacelles de la grande roue**

(a) $-\frac{5\pi}{6} = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$.
Donc $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. La nacelle de Jade est en $(-6\sqrt{3}\,;\,-6)$.

(b) La symétrie de centre O correspond à $\pi + x$: $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, qui est dans $]-\pi\,;\,\pi]$. Les deux coordonnées changent de signe : la nacelle de Tom est en $(6\sqrt{3}\,;\,6)$.

(c) Le quart de tour direct correspond à $\frac{\pi}{2} + x$: $\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$. Avec $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$: abscisse $12 \times \frac{1}{2} = 6$, ordonnée $12 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6\sqrt{3}$.
La nacelle de Lina est en $(6\,;\,-6\sqrt{3})$.

(d) La symétrie d'axe la droite $y = x$ envoie l'image de $\frac{\pi}{6}$ sur celle de $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $(6\,;\,6\sqrt{3})$ (les coordonnées s'échangent). Or Lina est en $(6\,;\,-6\sqrt{3})$: elle a tort. Sa nacelle est la symétrique de ce point par rapport à l'axe des abscisses.

Ex. 40 ★★★ **Vrai ou faux sur le cercle**

(a) Faux. L'image de $\frac{\pi}{2} - x$ est la symétrique de celle de x par rapport à la droite $y = x$: les coordonnées s'échangent sans changer de signe, donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Contre-exemple : pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 0 = 1$, alors que $-\sin\frac{\pi}{2} = -1$.
L'affirmation est fausse.

Ex. 40 (suite)

(b) Vrai. L'image de $\pi + x$ est la symétrique de M (image de x) par rapport à O : son abscisse est $-\cos x$. L'image de $\pi - x$ est la symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées : son abscisse est aussi $-\cos x$.
Donc $\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$ pour tout réel x (ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses). L'affirmation est vraie.

(c) Faux. $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: son image est la symétrique de celle de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe des ordonnées. Ses coordonnées sont $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, alors que l'image de $\frac{\pi}{3}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: l'ordonnée ne change pas, donc ce n'est pas la symétrie de centre O. Cette symétrie donnerait l'image de $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. L'affirmation est fausse.

(d) Vrai. $-\frac{3\pi}{4} = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, donc $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'image de $-\frac{\pi}{4}$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Les ordonnées sont égales et les abscisses opposées : ces points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
L'affirmation est vraie.

(e) Faux. $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = -\sin\frac{3\pi}{5}$ (symétrie d'axe des abscisses). Or $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$, donc $\sin\frac{3\pi}{5} = \sin\frac{2\pi}{5}$. L'image de $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier quadrant, donc $\sin\frac{3\pi}{5} > 0$. Un nombre non nul n'est pas égal à son opposé : $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) \neq \sin\frac{3\pi}{5}$. L'affirmation est fausse.

Ex. 41 ★★★ **Du point au réel**

(a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Comme $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, M est dans le premier quadrant, donc $\sin x > 0$. Ainsi $\sin x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(b) Le quart de tour direct de centre O envoie l'image de x sur l'image de $\frac{\pi}{2} + x$.
Donc N a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\,;\,\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = (-\sin x\,;\,\cos x)$, soit $N\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

(c) P est l'image de $\frac{\pi}{2} - x$, de coordonnées $(\sin x\,;\,\cos x)$. La symétrie d'axe des abscisses change a en $-a$: Q est l'image de $-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x - \frac{\pi}{2}$. Comme $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{2} < 0$, donc ce réel est bien dans $]-\pi\,;\,\pi]$: c'est la mesure principale. Q a pour coordonnées $(\sin x\,;\,-\cos x)$, soit $Q\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$.

Ex. 41 (suite)

(d) Deuxième quadrant : abscisse négative et ordonnée positive. $\pi - x$: $\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, ça convient. $\pi + x$: $\left(-\frac{1}{3}\,;\,-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, c'est le troisième quadrant. $-x$: $\left(\frac{1}{3}\,;\,-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, c'est le quatrième quadrant. $\frac{\pi}{2} + x$: $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$, ça convient. Les réels cherchés sont donc $\pi - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

Ex. 42 ★★★ Sommes sans calculatrice

(a) $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, donc $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$ (symétrie d'axe $y = x$: cosinus et sinus s'échangent). D'où $T = \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = 1$.

(b) $\frac{6\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$ et $\frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$. Avec $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (symétrie d'axe des ordonnées), on obtient $\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$ et $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$. Les termes s'annulent deux à deux : $S = 0$.

(c) $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$, donc, par le quart de tour direct, $\cos\frac{7\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12}$. Ainsi $U = \sin\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = 0$.

(d) On note $c = \cos\frac{\pi}{9}$. $\cos\frac{10\pi}{9} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{9}\right) = -c$ (symétrie de centre O). $\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) = c$ (symétrie d'axe des abscisses). $\cos\frac{8\pi}{9} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -c$, donc $-\cos\frac{8\pi}{9} = c$. Finalement $V = c - c + c + c = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

7. *Trouver les réels de cosinus ou de sinus donné sur un intervalle*

Ex. 43 ★☆☆ Résoudre sur l'intervalle indiqué

(a) On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Le symétrique de cette image par rapport à l'axe des abscisses a la même abscisse. Il y a donc deux solutions : $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$.

(b) On sait que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées a la même ordonnée : c'est l'image de $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Les solutions sont $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

(c) On sait que $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'ordonnée est négative, donc les points sont dans les 3e et 4e quadrants. On obtient $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ et $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Les solutions sont $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

(d) Le seul point du cercle d'abscisse -1 est le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$. C'est l'image de π et de $-\pi$. Or $-\pi \notin]-\pi\,;\,\pi]$. Il y a une seule solution : $x = \pi$.

(e) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Or $2 > 1$, donc l'équation n'a aucune solution.

(f) On sait que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'abscisse est négative, donc les points sont dans les 2e et 3e quadrants. On obtient $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ et $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Les solutions sont $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.

Ex. 44 ★★☆ Du point au réel

(a) Le point est dans le 4e quadrant. C'est le symétrique de l'image de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe des abscisses. Le réel est donc $-\frac{\pi}{3}$.

(b) Le point est dans le 2e quadrant. C'est le symétrique de l'image de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des ordonnées. Le réel est donc $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

(c) Le point est dans le 3e quadrant. C'est le symétrique de l'image de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à O, donc l'image de $\frac{7\pi}{6}$. Sa mesure principale est $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

(d) C'est le point le plus bas du cercle, image de $-\frac{\pi}{2}$.

(e) Le point est dans le 4e quadrant. C'est le symétrique de l'image de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des abscisses. Le réel est donc $-\frac{\pi}{6}$.

Ex. 45 ★★☆ Une coordonnée et un signe

(a) Sur $]-\pi\,;\,\pi]$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ a deux solutions : $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. Comme $\sin x < 0$, le point est sous l'axe des abscisses.
Donc $x = -\frac{2\pi}{3}$.

(b) Sur $]-\pi\,;\,\pi]$, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a deux solutions : $-\frac{\pi}{4}$ et $-\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$. Comme $\cos x > 0$, le point est à droite de l'axe des ordonnées.
Donc $x = -\frac{\pi}{4}$.

(c) Sur $[0\,;\,2\pi[$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a deux solutions : $\frac{\pi}{6}$ et $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Comme $\sin x < 0$, le point est dans le 4e quadrant.
Donc $x = \frac{11\pi}{6}$.

(d) Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ici on aurait $0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \neq 1$. Aucun point du cercle n'a ces coordonnées, donc aucun réel ne convient.

Ex. 46 ★★☆ L'erreur de Léna

(a) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: cette valeur convient. En revanche, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $-\frac{\pi}{3} \notin [0\,;\,2\pi[$. Léna a tort : elle a pris $-\alpha$, qui sert pour le cosinus.

(b) La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées garde l'ordonnée. La seconde solution est donc $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Les solutions sont $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$.

(c) On sait que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. L'ordonnée est négative, donc les points sont sous l'axe des abscisses. Ce sont les images de $-\frac{\pi}{6}$ et de $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$, réel qui a la même image que $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$. Les solutions sont $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$.

Ex. 46 (suite)

(d) Les points sont les mêmes, mais on ajoute 2π pour revenir dans $[0\,;\,2\pi[$: $-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{7\pi}{6}$. Les solutions sont $x=\frac{7\pi}{6}$ ou $x=\frac{11\pi}{6}$.

Ex. 47 ★★★ Une équation qui se ramène au second degré

(a) $\Delta=3^2-4\times2\times1=1$, donc $X=\frac{-3-1}{4}=-1$ ou $X=\frac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2}$. L'équation a deux solutions : -1 et $-\frac{1}{2}$.

(b) (E) équivaut à $\cos x=-\frac{1}{2}$ ou $\cos x=-1$. La droite verticale d'abscisse $-\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points : les images de $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ et de $-\frac{2\pi}{3}$. Le seul point d'abscisse -1 est le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$, image de π (le réel $-\pi$ n'est pas dans $]-\pi\,;\,\pi]$). Dans $]-\pi\,;\,\pi]$, les solutions de (E) sont $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π.

(c) Les points images sont les mêmes, mais $-\frac{2\pi}{3}$ n'est pas dans $[0\,;\,2\pi[$. On le remplace par le réel de même image $-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$. Dans $[0\,;\,2\pi[$, les solutions sont $\frac{2\pi}{3}$, π et $\frac{4\pi}{3}$. Les points ne changent pas, seul le réel choisi pour chaque point dépend de l'intervalle.

(d) $2\cos^2\frac{2\pi}{3}+3\cos\frac{2\pi}{3}+1=2\times\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1=0$. Comme $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$, on obtient le même calcul pour $-\frac{2\pi}{3}$. Enfin, $2\cos^2\pi+3\cos\pi+1=2-3+1=0$. Les trois réels sont bien solutions.

(e) Comme $\sin^2x=1-\cos^2x$: $2\sin^2x-3\cos x-3=2-2\cos^2x-3\cos x-3=-2\cos^2x-3\cos x-1=-\left(2\cos^2x+3\cos x+1\right)$. Cette équation a donc les mêmes solutions que (E) : dans $[0\,;\,2\pi[$, ce sont $\frac{2\pi}{3}$, π et $\frac{4\pi}{3}$.

Ex. 48 ★★★ La nacelle de Sacha

(a) $\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$, donc $\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ (symétrie de centre O). Ainsi $h=22+20\times\left(-\frac{1}{2}\right)=12$. La nacelle est à 12 m du sol.

(b) $22+20\sin x=22-10\sqrt{3}$ donne $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, la droite horizontale d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ coupe le cercle dans les 3e et 4e quadrants, aux images de $\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ et de $2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ (le réel $-\frac{\pi}{3}$ n'est pas dans $[0\,;\,2\pi[$). Vérification : $\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{3}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions sont $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

(c) $22+20\sin x=50$ donne $\sin x=\frac{28}{20}=\frac{7}{5}$. Or $\sin x\leqslant1$ pour tout réel x, donc c'est impossible. La hauteur est maximale quand $\sin x=1$, c'est-à-dire pour $x=\frac{\pi}{2}$ (point de coordonnées $(0\,;\,1)$) : elle vaut $22+20=42$ m.

Ex. 48 (suite)

(d) $22+20\sin x=2$ donne $\sin x=-1$. Le seul point du cercle d'ordonnée -1 est le point de coordonnées $(0\,;\,-1)$, image de $\frac{3\pi}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$. Il n'y a donc qu'une solution : $x=\frac{3\pi}{2}$
(point le plus bas).

(e) $\sin x=\frac{10\sqrt{2}}{20}=\frac{\sqrt{2}}{2}$: deux points possibles, images de $\frac{\pi}{4}$ et de $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. Comme $\cos x<0$, le point est dans le 2e quadrant, donc on ne garde qu'un seul point : $x=\frac{3\pi}{4}$. Vérification : $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$.

Ex. 49 ★★★ Combien de solutions ?

(a) Comme $2>1$, on a $\sqrt{2}>1$, donc $-\sqrt{2}<-1$. Or pour tout réel x, $-1\leqslant\cos x\leqslant1$: l'abscisse d'un point du cercle de rayon 1 ne peut pas valoir $-\sqrt{2}$. L'équation n'a donc aucune solution.

(b) On sait que $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'abscisse est négative : la droite verticale d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ coupe le cercle dans les 2e et 3e quadrants, en deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ce sont les images de $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ et de $-\frac{3\pi}{4}$. Dans $]-\pi\,;\,\pi]$, les solutions sont $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Dans $[0\,;\,2\pi[$, on remplace $-\frac{3\pi}{4}$ par $-\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{5\pi}{4}$: les solutions sont $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

(c) Le seul point du cercle d'abscisse 1 est le point de coordonnées $(1\,;\,0)$, image de 0. Les autres réels qui ont cette image diffèrent de 0 d'un multiple non nul de 2π (2π, $-2\pi\ldots$), donc ils ne sont pas dans $]-\pi\,;\,\pi]$. La seule solution est $x=0$.

(d) Oui. L'image de $-x$ est la symétrique de l'image de x par rapport à l'axe des abscisses. Cette symétrie garde l'abscisse, donc $\cos(-x)=\cos x=k$. Inès a raison : $-x$ est aussi solution.

(e) Si $k<-1$ ou $k>1$: aucune solution, car $-1\leqslant\cos x\leqslant1$. Si $k=1$: une seule solution, 0 (question 3, et $-0=0$). Si $k=-1$: le seul point d'abscisse -1 est $(-1\,;\,0)$, image de π et de $-\pi$, mais $-\pi\notin]-\pi\,;\,\pi]$: une seule solution, π. Si $-1<k<1$: la droite verticale d'abscisse k coupe le cercle en deux points distincts, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. L'un est l'image d'un réel α de $]0\,;\,\pi[$, l'autre celle de $-\alpha$: il y a deux solutions.