1. *Rappels de 6e : vocabulaire et constructions*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : sommets, côtés et angles**

(a) Le côté opposé à L est celui qui ne passe pas par L : c'est [PV].

(b) Le côté [LV] ne passe pas par P : le sommet opposé est P.

(c) Le sommet V s'écrit au milieu : $\widehat{PVL}$ (ou $\widehat{LVP}$).

(d) La lettre du milieu donne le sommet : l'angle $\widehat{VPL}$ a pour sommet P.

(e) « Rectangle en O » : l'angle droit est en O. Le côté opposé est [GB], qui ne passe pas par O : c'est l'hypoténuse.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : lire la nature sur le codage**

(a) [ME] et [MS] portent le même trait : EMS est isocèle en M. Son sommet principal est M, le sommet commun aux deux côtés égaux, même s'il est en bas. Sa base est [ES].

(b) Le petit carré est en T, et [TR] et [TK] portent le même trait : KTR est rectangle isocèle en T.

(c) On ne se fie pas au dessin. WH = HN = 6 cm, mais WN = 7 cm, et $7 \neq 6$: WHN n'est pas équilatéral. Il est isocèle en H, le sommet commun à [WH] et [HN], de base [WN].

(d) Non. Un triangle équilatéral a ses trois côtés égaux, donc il en a au moins deux égaux : il est aussi isocèle.

Ex. 3 ★★☆ **Les fanions de la fête de l'école**

(a) Tom a calculé $24 + 14 = 38$: il a oublié le troisième côté. BZO est isocèle en Z, donc ZO = ZB = 24 cm. Périmètre : $24 \times 2 + 14 = 62$ cm.

(b) Les trois côtés sont égaux : $52{,}5 \div 3 = 17{,}5$. Chaque côté mesure 17,5 cm.

(c) J'enlève la base : $60 - 16{,}4 = 43{,}6$ cm pour les deux côtés égaux. Puis $43{,}6 \div 2 = 21{,}8$: chaque côté égal mesure 21,8 cm.

Ex. 4 ★★☆ **Construire au compas : le bon centre, le bon rayon**

(a) Je trace [RA] de 8 cm. X est à 5 cm de R : je trace un arc de centre R et de rayon 5 cm. X est à 6 cm de A : je trace un arc de centre A et de rayon 6 cm. X est à l'intersection des deux arcs, puis je trace [RX] et [AX].

(b) L'arc de centre R a pour rayon le côté qui part de R, c'est-à-dire RX = 5 cm. La longueur 6 cm est celle de AX, qui part de A : elle sert pour l'arc de centre A.

(c) Le côté mesure $8{,}4 - 2{,}6 = 5{,}8$ cm, et non 6 cm. Ce côté n'est pas juste : il est trop court de $6 - 5{,}8 = 0{,}2$ cm.

Ex. 5 ★★★ **Le jardin de Nadia à Colmar**

(a) Sur le codage, [WG] et [WT] portent le même trait, donc WG = WT. Le triangle GTW est isocèle en W. Son sommet principal est W, le sommet commun aux deux côtés égaux, même s'il est en bas de la figure. Sa base est [GT].

(b) On sait que WT = WG = 8,5 m. Le côté égal compte deux fois : $8{,}5 \times 2 = 17$, donc $GT = 24{,}6 - 17 = 7{,}6$ m.

(c) Le côté opposé à G est celui qui ne passe pas par G : c'est [WT]. On sait que WT = WG, donc WT = 8,5 m.

Ex. 6 ★★★ **La voile du dériveur**

(a) Non. La figure est à main levée : on ne lit jamais la nature à l'œil. Le petit carré en P indique que MPE est rectangle en P. Mais PM = 4,5 cm et PE = 6 cm, et $4{,}5 \neq 6$: le triangle n'est pas isocèle en P. MPE est seulement rectangle en P.

(b) Le sommet de l'angle droit est P, et il s'écrit au milieu : c'est l'angle $\widehat{MPE}$ (ou $\widehat{EPM}$).

(c) Je trace [PM] de 4,5 cm à la règle. À l'équerre, je trace la perpendiculaire à (PM) passant par P. Sur cette perpendiculaire, je place E à 6 cm de P. Enfin, je trace [ME].

(d) L'angle droit est en P. Le côté opposé ne passe pas par P : l'hypoténuse est [ME]. Périmètre : $4{,}5 + 6 + 7{,}5 = 18$ cm.

Ex. 7 ★★★ **Le pignon de la cabane**

(a) [SD] et [SK] portent le même trait : DKS est isocèle en S, de base [DK]. [DK], [KU] et [UD] portent tous les trois deux traits : DKU est équilatéral, donc il est aussi isocèle.

(b) Le sommet S s'écrit au milieu : $\widehat{DSK}$ (ou $\widehat{KSD}$). Le côté opposé à S est celui qui ne passe pas par S : c'est [DK].

(c) Il compte [DK] deux fois, alors que ce côté est à l'intérieur du pignon, pas sur le contour. On sait que $SK = SD = 4{,}3$ cm et $KU = UD = DK = 6{,}8$ cm. Le contour est formé de [DS], [SK], [KU] et [UD] : $4{,}3 \times 2 + 6{,}8 \times 2 = 8{,}6 + 13{,}6 = 22{,}2$ cm.

(d) [KU] et [UD] mesurent ensemble $6{,}8 \times 2 = 13{,}6$ cm. Il reste $23 - 13{,}6 = 9{,}4$ cm pour [SD] et [SK], qui sont égaux : $9{,}4 \div 2 = 4{,}7$.
Donc SD = 4,7 cm.

2. *Somme des angles d'un triangle*

Ex. 8 ★☆☆ **Calculer le troisième angle**

(a) Dans le triangle KPV, la somme des angles vaut 180°. $63 + 48 = 111$, donc $\widehat{KVP} = 180° - 111° = 69°$.
Contrôle : $63 + 48 + 69 = 180$.

(b) Dans le triangle DEF, la somme des angles vaut 180°. $37{,}5 + 84 = 121{,}5$, donc $\widehat{DEF} = 180° - 121{,}5° = 58{,}5°$.
Contrôle : $37{,}5 + 84 + 58{,}5 = 180$.

(c) L'angle $\widehat{JHG}$ a pour sommet H et $\widehat{GJH}$ a pour sommet J. L'angle de sommet G est $\widehat{HGJ}$. $102 + 31 = 133$, donc $\widehat{HGJ} = 180° - 133° = 47°$. Contrôle : $102 + 31 + 47 = 180$.

(d) Lina a retiré 55, puis elle a ajouté 42. Il faut retirer la somme des deux angles : $55 + 42 = 97$ et $180 - 97 = 83$. Le troisième angle mesure 83°. Contrôle : $55 + 42 + 83 = 180$. Avec son résultat, on obtient $55 + 42 + 167 = 264$, ce qui est faux.

(e) Dans le triangle EFG, la somme des angles vaut 180°. $49 + 45 = 94$, donc $\widehat{EFG} = 180° - 94° = 86°$.
Contrôle : $49 + 45 + 86 = 180$. L'angle n'est pas droit, car 86° n'est pas 90° : la figure est faite à main levée et elle trompe. On ne la mesure pas.

Ex. 9 ★☆☆ **Ce triangle existe-t-il ?**

(a) $89 + 46 + 47 = 182$. Ce n'est pas 180 : ce triangle n'existe pas, même si les mesures ont l'air plausibles.

(b) $72{,}5 + 53{,}5 + 54 = 180$: la somme vaut 180°, donc ce triangle existe.

(c) $90 + 97 = 187$. C'est déjà plus que 180, il ne resterait rien pour le troisième angle. C'est impossible : un triangle a au plus un angle droit ou obtus.

(d) $123 + 61 = 184$. Ces deux angles font déjà plus de 180° : il ne resterait rien pour le troisième angle. Un tel triangle n'existe pas.

Ex. 10 ★★☆ **Deux triangles accolés**

(a) Dans le triangle ABD, la somme des angles vaut 180°. $38 + 67 = 105$, donc $\widehat{ADB} = 180° - 105° = 75°$.

(b) Les points B, D et C sont alignés, donc $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180°$ (angle plat).
Donc $\widehat{ADC} = 180° - 75° = 105°$.

(c) Dans le triangle ADC, $105 + 41 = 146$, donc $\widehat{DAC} = 180° - 146° = 34°$.

(d) $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 38° + 34° = 72°$. D est sur [BC], donc $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 67°$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ACD} = 41°$.
Contrôle : $67 + 72 + 41 = 180$.

Ex. 11 ★★☆ **Démontrer que la somme vaut 180°**

(a) On sait que (UV) et (RT) sont parallèles et coupées par la sécante (RS). Or deux angles alternes-internes formés par deux parallèles ont la même mesure.
Donc $\widehat{SRT} = \widehat{USR} = 57°$.

(b) On sait que (UV) et (RT) sont parallèles et coupées par la sécante (ST). Or deux angles alternes-internes formés par deux parallèles ont la même mesure.
Donc $\widehat{STR} = \widehat{TSV} = 46°$.

(c) U, S et V sont alignés, donc $\widehat{USR} + \widehat{RST} + \widehat{TSV} = 180°$ (angle plat). $57 + 46 = 103$, donc $\widehat{RST} = 180° - 103° = 77°$.

(d) $57 + 77 + 46 = 180$. Dans n'importe quel triangle, on peut tracer la parallèle au côté opposé qui passe par un sommet. Les trois angles du triangle forment alors l'angle plat de 180°.

Ex. 12 ★★★ **Le brouillon de Théo**

(a) Non. $\widehat{WZY}$ n'est pas un angle du triangle VWZ : il est à l'extérieur. V, Z et Y sont alignés, donc $\widehat{VZW} + \widehat{WZY} = 180°$ (angle plat), et $\widehat{VZW} = 180° - 109° = 71°$. Dans le triangle VWZ, la somme des angles vaut 180°. $74 + 71 = 145$, donc $\widehat{VWZ} = 180° - 145° = 35°$. Contrôle : $74 + 71 + 35 = 180$: le triangle existe.

(b) Non. $52{,}5 + 81{,}5 + 56 = 190$, ce qui ne fait pas 180 : son résultat est faux. Dans le triangle MNR, la somme des angles vaut 180°. $52{,}5 + 81{,}5 = 134$, donc $\widehat{MRN} = 180° - 134° = 46°$. Contrôle : $52{,}5 + 81{,}5 + 46 = 180$.

(c) Non. $\widehat{LUP}$ et $\widehat{PUL}$ désignent le même angle, de sommet U : $\widehat{PUL} = 68°$ est donc connu. Dans le triangle PLU, la somme des angles vaut 180°. $62 + 68 = 130$, donc $\widehat{PLU} = 180° - 130° = 50°$. Contrôle : $62 + 68 + 50 = 180$.

(d) Non. Théo a oublié l'angle droit : $\widehat{STU} = 90°$. Dans le triangle STU, la somme des angles vaut 180°. $90 + 33{,}5 = 123{,}5$, donc $\widehat{SUT} = 180° - 123{,}5° = 56{,}5°$. Contrôle : $90 + 33{,}5 + 56{,}5 = 180$. D'ailleurs, $146{,}5^\circ$ est obtus, ce qui est impossible dans un triangle qui a déjà un angle droit.

Ex. 13 ★★★ **Le jardin partagé par une allée**

(a) Dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180°. $36{,}5 + 112 = 148{,}5$, donc $\widehat{ACB} = 180° - 148{,}5° = 31{,}5°$. Contrôle : $36{,}5 + 112 + 31{,}5 = 180$.

(b) Dans le triangle ACD, la somme des angles vaut 180°. $48 + 57{,}5 = 105{,}5$, donc $\widehat{ADC} = 180° - 105{,}5° = 74{,}5°$. Contrôle : $48 + 57{,}5 + 74{,}5 = 180$.

(c) $\widehat{BCD} = \widehat{ACB} + \widehat{ACD} = 31{,}5° + 57{,}5° = 89°$. Zoé a tort : 89° n'est pas 90°, donc le coin C n'est pas un angle droit. Il ne faut jamais se fier à l'allure d'une figure.

(d) $\widehat{DAB} = 36{,}5° + 48° = 84{,}5°$. Somme : $84{,}5 + 112 + 74{,}5 + 89 = 360$, donc 360°. L'allée partage le jardin en deux triangles. Les angles de chaque triangle font 180°, et ensemble ils forment les quatre angles du jardin : $2 \times 180 = 360$.

Ex. 14 ★★★ **Vrai ou faux sur les angles**

(a) Vrai. Dans un triangle, la somme des angles vaut 180°. $180 - 113 = 67$: les deux autres angles mesurent 67° à eux deux. Chacun mesure donc moins de 67°, donc moins de 90° : ils sont aigus.

Ex. 14 **(suite)**

(b) Vrai. Dans un triangle, la somme des angles vaut 180°. $62{,}5 + 27{,}5 = 90$, donc le troisième angle mesure $180° - 90° = 90°$: c'est un angle droit, et le triangle est rectangle.

(c) Faux. Un triangle peut avoir un angle obtus, mais un seul. Ici, $98 + 43 + 39 = 180$: la somme vaut 180°, donc ce triangle existe.

(d) Vrai. Dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180°. $53 + 71{,}5 = 124{,}5$, donc $\widehat{ACB} = 180° - 124{,}5° = 55{,}5°$. B, C et E sont alignés, donc $\widehat{ACB} + \widehat{ACE} = 180°$ (angle plat). On a donc $\widehat{ACE} = 180° - 55{,}5° = 124{,}5°$. Et $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 53° + 71{,}5° = 124{,}5°$: c'est bien la même mesure.

3. *Angles des triangles particuliers*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : un angle d'un triangle particulier**

(a) DEF est isocèle en E : l'angle de $46°$ est l'angle principal, et les deux angles à la base sont égaux. Leur somme vaut $180 - 46 = 134$, donc $\widehat{EDF} = 134 \div 2 = 67°$.

(b) GHJ est isocèle en J, donc $\widehat{JHG} = \widehat{JGH} = 71°$. $2 \times 71 = 142$, donc $\widehat{GJH} = 180° - 142° = 38°$.

(c) UVW est rectangle en V : ses deux angles aigus sont complémentaires. Donc $\widehat{VWU} = 90° - 36{,}5° = 53{,}5°$.

(d) Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux : $180 \div 3 = 60$, donc $\widehat{QRP} = 60°$.

(e) XYZ est rectangle en Z et isocèle en Z : les deux angles aigus sont égaux et leur somme vaut $90°$. Donc $\widehat{ZXY} = 90 \div 2 = 45°$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : reconnaître la nature d'après les angles**

(a) Dans un triangle, la somme des angles vaut $180°$. $43 + 94 = 137$, donc $\widehat{ABC} = 180° - 137° = 43°$. Les angles en A et en B sont égaux, donc ABC est isocèle en C (le troisième sommet).

(b) La somme des angles vaut $180° : 90 + 45 = 135$, donc $\widehat{RTS} = 180° - 135° = 45°$. RST a un angle droit en S et deux angles égaux en R et en T : il est rectangle isocèle en S.

Ex. 16 **(suite)**

(c) La somme des angles vaut $180° : 180 \div 3 = 60$, donc chaque angle mesure $60°$. Un triangle qui a trois angles de $60°$ est équilatéral.

(d) $50 + 65 = 115$, donc $\widehat{HJI} = 180° - 115° = 65°$. Les angles égaux sont en H et en J : HIJ est isocèle en I (le troisième sommet), pas en H. Lina a tort.

Ex. 17 ★★☆ **Vrai ou faux sur les triangles particuliers**

(a) Faux. Les deux angles à la base sont égaux : ils mesureraient $95°$ chacun, et $2 \times 95 = 190 > 180$. Or la somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Un angle à la base mesure donc toujours moins de $90°$.

(b) Faux. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires : leur somme vaut $90°$. Or $50 + 50 = 100$ et $100 \neq 90$. Avec l'angle droit, la somme des angles ferait $90 + 100 = 190°$, et pas $180°$.

(c) Faux. L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. L'angle droit est en N, donc l'hypoténuse est [MP].

(d) Vrai. Si $60°$ est l'angle principal : $(180 - 60) \div 2 = 60$. Si $60°$ est un angle à la base : $180 - 2 \times 60 = 60$. Dans les deux cas, les trois angles mesurent $60°$, donc le triangle est équilatéral.

Ex. 18 ★★☆ **La charpente d'un toit**

(a) On sait que ABC est isocèle en A. Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.
Donc $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 31{,}5°$.

(b) La somme des angles d'un triangle vaut $180°$.
$2 \times 31{,}5 = 63$, donc $\widehat{BAC} = 180° - 63° = 117°$.

(c) $180 - 128 = 52$ est la somme des deux angles à la base : Noé a oublié de diviser par 2. Chaque angle à la base mesure $52 \div 2 = 26°$.

Ex. 19 ★★★ **Un triangle équilatéral et un triangle isocèle accolés**

(a) On sait que EFG est équilatéral. Or, dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent $60°$ ($180 \div 3 = 60$).
Donc $\widehat{EFG} = \widehat{EGF} = 60°$.

(b) On sait que FGH est isocèle en G. Or les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux. $180 - 96 = 84$: c'est la somme des deux angles à la base.
Donc $\widehat{GFH} = 84 \div 2 = 42°$
(et pas $84°$!).

Ex. 19 **(suite)**

(c) Les angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{GFH}$ sont côte à côte, donc $\widehat{EFH} = 60° + 42° = 102°$.

(d) On sait que EG = FG (EFG est équilatéral) et que FG = GH (FGH est isocèle en G).
Donc EG = GH : le triangle EGH est isocèle en G.
$\widehat{EGH} = 60° + 96° = 156°$. Les angles à la base sont égaux, donc $\widehat{GEH} = (180 - 156) \div 2 = 24 \div 2 = 12°$.

(e) $\widehat{FEH} = 60° - 12° = 48°$. Dans le triangle EFH, la somme des angles vaut $180° : 102 + 48 = 150$, donc $\widehat{EHF} = 180° - 150° = 30°$. Les trois angles ($102°$, $48°$, $30°$) sont tous différents : aucun angle n'est égal à un autre, donc EFH n'est pas isocèle.

Ex. 20 ★★★ **Les fanions de Maëlys**

(a) Inès a confondu les angles : $33{,}5°$ est un angle à la base, pas l'angle au sommet principal. Les deux angles à la base sont égaux, donc $\widehat{LMK} = 33{,}5°$. Dans le triangle KLM, la somme des angles vaut $180° : \widehat{KLM} = 180° - 2 \times 33{,}5° = 180° - 67° = 113°$.

(b) Dans $\widehat{MLK}$, le sommet est la lettre du milieu, L : c'est l'angle principal, pas un angle à la base. Les angles à la base sont égaux et ont pour somme $180 - 72{,}4 = 107{,}6$. Donc $\widehat{LKM} = 107{,}6 \div 2 = 53{,}8°$.

(c) $112 + 2 \times 36 = 112 + 72 = 184$. Or la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, et $184 \neq 180$: c'est impossible. Avec un angle principal de $112°$, chaque angle à la base doit mesurer $(180 - 112) \div 2 = 34°$.

(d) On ne se fie pas au croquis. Dans le triangle PQR, la somme des angles vaut $180° : 74 + 32 = 106$, donc $\widehat{QPR} = 180° - 106° = 74°$. On a $\widehat{PQR} = \widehat{QPR} = 74°$. Or un triangle qui a deux angles égaux est isocèle.
Donc PQR est isocèle en R, le troisième sommet, et pas en P.

Ex. 21 ★★★ **L'allée du jardin d'Anton**

(a) On sait que PR = PQ. Or un triangle qui a deux côtés de même longueur est isocèle.
Donc PQR est isocèle en P : son sommet principal est P et sa base est [QR].

(b) Or, dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.
Donc $\widehat{PQN} = 90° - 27{,}6° = 62{,}4°$.

Ex. 21 **(suite)**

(c) PQR est isocèle en P (question a). Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux. R est sur [NQ], donc $\widehat{PQR} = \widehat{PQN} = 62{,}4°$ et $\widehat{PRQ} = 62{,}4°$. Dans le triangle PQR, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{RPQ} = 180° - 2 \times 62{,}4° = 180° - 124{,}8° = 55{,}2°$.

(d) $\widehat{NPQ} = 90°$, donc $\widehat{NPR} = 90° - 55{,}2° = 34{,}8°$. Les points N, R, Q sont alignés, donc $\widehat{PRN}$ et $\widehat{PRQ}$ forment un angle plat : $\widehat{PRN} = 180° - 62{,}4° = 117{,}6°$. Vérification : $27{,}6 + 34{,}8 + 117{,}6 = 180$.

(e) PQR est toujours isocèle en P : ses angles à la base mesurent $(180 - 62) \div 2 = 118 \div 2 = 59°$, donc $\widehat{PQN} = \widehat{PQR} = 59°$. NPQ est rectangle en P : ses angles aigus sont complémentaires, donc $\widehat{PNQ} = 90° - 59° = 31°$.

4. *Le triangle existe-t-il ? Construire un triangle*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : le triangle existe-t-il ?**

(a) Le plus grand côté est [LM], il mesure 12 cm. $5 + 6 = 11$ et $12 > 11$: le triangle est impossible, même si la figure à main levée semble correcte.

(b) Le plus grand côté mesure 9,9 cm. $3{,}8 + 6{,}1 = 9{,}9$: il y a égalité, donc les trois points sont alignés. Ce n'est pas un vrai triangle.

(c) J'écris tout en cm : 45 mm = 4,5 cm. Le plus grand côté mesure 7 cm. $4{,}5 + 3{,}2 = 7{,}7$ et $7 < 7{,}7$: le triangle existe.

(d) Le plus grand côté mesure 14 cm. $7{,}5 + 7{,}5 = 15$ et $14 < 15$: le triangle existe (il est isocèle).

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : encadrer le troisième côté**

(a) $9 - 4 = 5$ et $9 + 4 = 13$, donc 5 cm < AC < 13 cm.

(b) $6{,}5 - 2{,}7 = 3{,}8$ et $6{,}5 + 2{,}7 = 9{,}2$: le troisième côté est strictement compris entre 3,8 cm et 9,2 cm.

(c) $7 - 7 = 0$ et $7 + 7 = 14$: la base est strictement comprise entre 0 cm et 14 cm.

(d) Non. $8{,}5 - 3{,}5 = 5$: le troisième côté doit être strictement plus grand que 5 cm. Avec 5 cm, on a $3{,}5 + 5 = 8{,}5$: les points sont alignés, ce n'est pas un vrai triangle.

Ex. 23 **(suite)**

(e) 52 mm = 5,2 cm. $5{,}2 - 3 = 2{,}2$ et $5{,}2 + 3 = 8{,}2$: le troisième côté est strictement compris entre 2,2 cm et 8,2 cm.

Ex. 24 ★★☆ **Le fanion d'Elsa : un angle qui n'est pas sur le côté**

(a) Dans le triangle RST, la somme des angles vaut 180°. $47 + 68 = 115$, donc $\widehat{RTS} = 180° - 115° = 65°$.

(b) L'angle de 68° a pour sommet R, et R n'est pas encore placé. On ne peut poser le rapporteur qu'aux extrémités S et T du côté connu : il faut utiliser les deux angles adjacents à [ST].

(c) Je trace [ST] de 6 cm. Je pose le centre du rapporteur sur S et je trace une demi-droite d'origine S qui fait 47° avec [ST]. Je pose le centre du rapporteur sur T et je trace, du même côté de [ST], une demi-droite d'origine T qui fait 65° avec [TS]. R est le point d'intersection des deux demi-droites.

Ex. 25 ★★☆ **Avant de construire : qui a raison ?**

(a) Non. Il faut comparer le plus grand côté, 11 cm, à la somme des deux autres : $3 + 7 = 10$ et $11 > 10$, donc le triangle est impossible.

(b) Non. $98 + 85 = 183$ et $183 > 180$: la somme des angles dépasserait 180°, donc le triangle est impossible. La figure à main levée est trompeuse.

(c) Non. $40 + 65 + 75 = 180$, donc de tels triangles existent, mais il y en a une infinité : ils ont la même forme et des tailles différentes. Il faut connaître au moins une longueur.

(d) Oui. Le plus grand côté est [PQ], il mesure 8,2 cm. $3{,}5 + 4{,}7 = 8{,}2$: il y a égalité, donc P, R et Q sont alignés et R est sur le segment [PQ].

Ex. 26 ★★★ **La voile du bateau de Noé**

(a) Je convertis : MV = 210 mm = 21 cm et BV = 150 mm = 15 cm. Le plus grand côté est MB = 36 cm. $21 + 15 = 36$: il y a égalité. Les points M, V et B sont donc alignés, et V est sur [MB]. Ce n'est pas une vraie voile.

(b) Le troisième côté est strictement compris entre la différence et la somme des deux autres. $36 - 15 = 21$ et $36 + 15 = 51$, donc 21 cm < MV < 51 cm.

Ex. 26 **(suite)**

(c) Isocèle en V : VM = VB = 15 cm. Le plus grand côté est MB = 36 cm, or 15 + 15 = 30 et 36 > 30 : c'est impossible. Isocèle en M : MV = MB = 36 cm. Le plus grand côté mesure 36 cm et 36 + 15 = 51, or 36 < 51 : cette voile existe.

(d) Le périmètre ne doit pas dépasser 100 cm. 36 + 15 = 51 et 100 − 51 = 49, donc MV ne dépasse pas 49 cm. On a aussi MV > 21 cm. Les valeurs possibles vont donc de 22 cm à 49 cm : cela fait 49 − 22 + 1 = 28 longueurs possibles.

Ex. 27 ★★★ **Le toit de la cabane de Yanis**

(a) Dans le triangle DEF, la somme des angles vaut 180°. 34 + 112 = 146, donc $\widehat{DFE} = 180° - 146° = 34°$.

(b) On sait que $\widehat{EDF} = \widehat{DFE} = 34°$. Or, si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.
Donc DEF est isocèle en E, de base [DF]. La figure à main levée était trompeuse.

(c) Je trace [DF] de 7,5 cm. Je place le centre du rapporteur en D, avec le zéro sur [DF], et je trace une demi-droite qui fait 34° avec [DF]. Je place ensuite le centre du rapporteur en F et je trace, du même côté, une demi-droite qui fait 34° avec [FD]. Les deux demi-droites se coupent en E. On utilise l'angle de 34° calculé en F, car l'angle de 112° n'a pas son sommet sur [DF].

(d) 34 + 148 = 182 et 182 > 180. Or, dans un triangle, la somme des trois angles vaut 180°. Ces deux angles sont déjà trop grands à eux seuls : ce pignon est impossible.

(e) Non. Avec seulement les trois angles, on peut construire une infinité de triangles qui ont la même forme mais pas la même taille. Il faut aussi donner une longueur, par exemple DF = 7,5 cm.

Ex. 28 ★★★ **Les deux parterres du jardin de Sacha**

(a) Le troisième côté est strictement compris entre la différence et la somme des deux autres. 5 − 4,5 = 0,5 et 5 + 4,5 = 9,5, donc 0,5 m < QS < 9,5 m.

(b) 9 − 6 = 3 et 9 + 6 = 15, donc 3 m < QS < 15 m.

(c) QS doit vérifier les deux encadrements à la fois. Il doit être plus grand que 3 m et plus petit que 9,5 m : 3 m < QS < 9,5 m.

(d) Le plus grand côté serait QS = 9,5 m, et 5 + 4,5 = 9,5 : il y a égalité. Les points Q, P et S seraient alignés, avec P sur [QS]. Le parterre PQS serait aplati : ce ne serait pas un vrai triangle.

Ex. 28 **(suite)**

(e) Parterre PQS : le plus grand côté est QS = 7 m. 5 + 4,5 = 9,5 et 7 < 9,5 : il existe. Parterre QRS : le plus grand côté est QR = 9 m. 6 + 7 = 13 et 9 < 13 : il existe.

5. *Médiatrices et cercle circonscrit*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : la médiatrice d'un segment**

(a) K est sur la médiatrice de [EF]. Or si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est à la même distance de ses extrémités.
Donc KF = KE = 6 cm.

(b) Non. La droite passe bien par le milieu I, mais elle n'est pas perpendiculaire à [EF] (80° et non 90°). Une médiatrice doit remplir les deux conditions : perpendiculaire ET passant par le milieu.

(c) On sait que GE = GF. Or si un point est à la même distance des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.
Donc G est sur la médiatrice de [EF], c'est-à-dire sur la droite
(KI).

(d) Non : ME = 4 cm et MF = 5 cm, donc ME ≠ MF. M n'est pas à la même distance de E et de F, donc il n'est pas sur la médiatrice de [EF].

(e) Non. La moitié de [EF] mesure 9 ÷ 2 = 4,5 cm et 4 < 4,5 : les deux arcs ne se rejoignent pas. Il faut un écartement plus grand que 4,5 cm.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : centre et rayon du cercle circonscrit**

(a) O est le point de concours des médiatrices du triangle, il est à la même distance des trois sommets : OB = OC = OA = 4 cm
(le rayon).

(b) Le diamètre vaut deux fois le rayon : 2 × 4,6 = 9,2 cm.

(c) Le triangle est rectangle en V, donc le centre est le milieu de l'hypoténuse [UW]. Le rayon vaut la moitié de UW : 11 ÷ 2 = 5,5 cm.

(d) L'angle $\widehat{DEF}$ mesure 118°, il est obtus. Dans un triangle qui a un angle obtus, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

Ex. 30 **(suite)**

(e) Noé a raison. Deux médiatrices se coupent en un point, et la troisième passe forcément par ce point (les médiatrices sont concourantes). Tracer la troisième permet seulement de vérifier.

Ex. 31 ★★☆ **Le sommet principal et la médiatrice de la base**

(a) On sait que QP = QR. Or si un point est à la même distance des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.
Donc Q est sur la médiatrice de [PR].

(b) La médiatrice de [PR] passe par son milieu I, et elle passe aussi par Q. Une droite est déterminée par deux points, donc la médiatrice de [PR] est la droite (QI). De plus, $PI = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm.

(c) Oui. O est le point de concours des trois médiatrices, il est donc sur la médiatrice de [PR], qui est la droite (QI).

(d) T est sur la médiatrice de [PR], donc TR = TP = 4,2 cm. Le périmètre vaut $4{,}2 + 4{,}2 + 5 = 13{,}4$ cm.

Ex. 32 ★★☆ **Une antenne pour trois villages**

(a) L'antenne doit être à la même distance de A et de B : elle est sur la médiatrice de [AB]. Elle doit aussi être à la même distance de B et de C : elle est sur la médiatrice de [BC]. Elle se trouve donc au point de concours de ces deux médiatrices, centre du cercle circonscrit à ABC.

(b) D est sur la médiatrice de [BC]. Or si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est à la même distance de ses extrémités.
Donc DC = DB = 8 km. Mais DA = 2 km et $2 \neq 8$: D n'est pas à la même distance des trois villages. On ne peut pas y installer l'antenne.

(c) L'angle $\widehat{BAC}$ mesure 115°, il est obtus.
Donc le centre du cercle circonscrit, c'est-à-dire l'antenne, est à l'extérieur du triangle ABC.

(d) L'antenne est le centre du cercle circonscrit : elle est à la même distance des trois villages, donc à environ 7 km de B et de C. Le diamètre vaut environ $2 \times 7 = 14$ km.

Ex. 33 ★★★ **Médiatrice ou imposteur ?**

(a) Non. La médiatrice doit être perpendiculaire à [AB] ET passer par son milieu. AT = 4,5 cm et TB = 6,4 − 4,5 = 1,9 cm, donc AT ≠ TB : T n'est pas le milieu de [AB]. (TG) est perpendiculaire à [AB] mais ne passe pas par son milieu : ce n'est pas la médiatrice.

Ex. 33 **(suite)**

(b) Non. (IE) passe bien par le milieu I, mais $\widehat{AIE} = 68°$ et non 90° : (IE) n'est pas perpendiculaire à [AB]. Les deux conditions sont nécessaires, donc (IE) n'est pas la médiatrice.

(c) On sait que MA = MB. Or si un point est à la même distance des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.
Donc M est sur la médiatrice de [AB]. De même, NA = NB, donc N est aussi sur la médiatrice de [AB]. Par deux points distincts passe une seule droite : la médiatrice de [AB] est la droite (MN).

(d) R est sur (MN), la médiatrice de [AB]. Or si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est à la même distance de ses extrémités.
Donc RA = RB. $15{,}8 - 6{,}4 = 9{,}4$ et $9{,}4 \div 2 = 4{,}7$, donc RA = RB = 4,7 cm.

Ex. 34 ★★★ **Où se cache le centre ?**

(a) Dans un triangle, la somme des angles vaut 180°.
ABC : $63 + 56 = 119$, donc $\widehat{ACB} = 180° - 119° = 61°$.
DEF : $41 + 49 = 90$, donc $\widehat{EDF} = 180° - 90° = 90°$.
GHJ : $27 + 58 = 85$, donc $\widehat{HGJ} = 180° - 85° = 95°$.

(b) ABC a trois angles aigus (63°, 56°, 61°) : le centre est à l'intérieur. DEF est rectangle en D : le centre est au milieu de l'hypoténuse [EF]. GHJ a un angle obtus ($\widehat{HGJ} = 95°$) : le centre est à l'extérieur. Malo se trompe, la figure à main levée l'a induit en erreur.

(c) DEF est rectangle en D, donc son hypoténuse est [EF], le côté opposé à D. Le centre est le milieu de [EF], donc le rayon vaut $9{,}8 \div 2 = 4{,}9$ cm.

(d) Le diamètre est juste : $2 \times 4{,}15 = 8{,}3$ cm. Mais B est sur le cercle, donc OB est un rayon : OB = OA = 4,15 cm, et non 8,3 cm.

Ex. 35 ★★★ **La médiatrice passe-t-elle par le sommet ?**

(a) Non. Si E était sur la médiatrice de [FG], on aurait EF = EG. Or EF = 6,6 cm et EG = 7 cm (écart de 0,4 cm) : E n'est pas à la même distance de F et de G. Le triangle n'est pas isocèle en E, donc (d) ne passe pas par E. La figure trompe.

Ex. 35 **(suite)**

(b) On sait que P est sur la médiatrice de [FG]. Or si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est à la même distance de ses extrémités.
Donc PG = PF = 3,8 cm : G est sur le cercle. Son diamètre vaut $2 \times 3{,}8 = 7{,}6$ cm.

(c) P est sur (d) d'après l'énoncé, et I aussi, car c'est le milieu de [FG]. FGK est équilatéral, donc KF = KG : K est équidistant de F et de G, donc il est sur la médiatrice (d). Les trois points sont sur la même droite (d) : ils sont alignés.

(d) O est sur (d), la médiatrice de [FG], donc OF = OG. O est sur la médiatrice de [EF], donc OE = OF.
Donc OE = OF = OG, et en particulier OE = OG. Or si un point est à la même distance des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.
Donc O est sur la médiatrice de [EG] : deux médiatrices suffisent pour placer le centre du cercle circonscrit.

6. *Hauteurs d'un triangle*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : lire le codage d'une hauteur**

(a) La droite (KH) passe par K et elle est perpendiculaire à (LM) : l'angle droit est codé en H. C'est la hauteur issue de K, et son pied est H.

(b) Elle part du sommet M, le seul qui ne touche pas [KL]. Elle est perpendiculaire à la droite (KL).

(c) Non. [LI] passe par le milieu de [KM], mais aucun angle droit n'est codé en I : (LI) n'est pas perpendiculaire à (KM). C'est la médiane issue de L, pas la hauteur.

(d) Non. Aucun angle droit n'est codé en K, en L ou en M. L'angle droit est codé en H : ce sont les triangles KHL et KHM qui sont rectangles en H.

(e) Oui. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : elles se coupent en un même point, l'orthocentre.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : aire et angle avec une hauteur**

(a) La hauteur relative à [EF] est [DH] : l'angle droit est codé en H. [DE] est un côté oblique, ce n'est pas une hauteur. Aire $= 15 \times 12 \div 2 = 90$ cm².

(b) Le triangle RSH est rectangle en H, donc ses angles aigus sont complémentaires. $\widehat{SRH} = 90° - 67° = 23°$.

Ex. 37 **(suite)**

(c) Aire = base × hauteur ÷ 2, donc hauteur = 2 × aire ÷ base. $2 \times 14{,}25 \div 7{,}5 = 3{,}8$: la hauteur relative à [AB] mesure 3,8 cm.

(d) La hauteur issue de W est relative au côté [UV], le seul qui ne touche pas W. Aire $= 5 \times 3{,}6 \div 2 = 9$ cm². VW ne sert pas : [VW] n'est pas la base de cette hauteur.

Ex. 38 ★★☆ **Une hauteur qui sort du triangle**

(a) Non. L'angle en F est obtus, donc H est en dehors de [FG], sur le prolongement du côté au-delà de F. Je prolonge (FG) en pointillés. Je pose un côté de l'angle droit de l'équerre le long de (FG) et je la fais glisser jusqu'à ce que l'autre côté passe par E. Je trace, puis je code l'angle droit en H.

(b) Il est rectangle en H, car (EH) est perpendiculaire à (FG). H, F et G sont alignés, donc $\widehat{EGH} = \widehat{EGF} = 30°$. Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires : $\widehat{GEH} = 90° - 30° = 60°$.

(c) Non. $7 \times 4 \div 2 = 14$ cm², c'est l'aire du triangle EHG. Pour EFG, la base est [FG], de 5 cm, et la hauteur relative à [FG] est EH, même si elle est à l'extérieur du triangle. Aire $= 5 \times 4 \div 2 = 10$ cm².

(d) C'est la hauteur issue de G, relative au côté [EF]. Comme l'angle en F est obtus, on doit prolonger (EF) au-delà de F pour la tracer. La hauteur issue de F, elle, reste à l'intérieur du triangle.

Ex. 39 ★★☆ **Le fanion rectangle**

(a) La droite (BT) passe par B et elle est perpendiculaire à (TW), car le triangle est rectangle en T : c'est la hauteur issue de B. De même, (WT) est la hauteur issue de W. Les trois hauteurs se coupent en T, le sommet de l'angle droit.

(b) Non. Si H était le milieu de [BW], la droite (TH) serait perpendiculaire à [BW] en son milieu : ce serait la médiatrice de [BW]. Or un point de la médiatrice d'un segment est à la même distance de ses extrémités, donc on aurait TB = TW. Mais TB = 9 cm et TW = 12 cm. Donc H n'est pas le milieu de [BW].

(c) Le triangle est rectangle en T, donc [TW] est la hauteur relative au côté [TB]. Aire $= 9 \times 12 \div 2 = 54$ cm².
Attention : [BW] est l'hypoténuse, ce n'est pas une hauteur.

Ex. 39 **(suite)**

(d) On prend [BW] comme base, et TH est la hauteur relative à [BW]. Hauteur $= 2 \times$ aire $\div$ base : $TH = 2 \times 54 \div 15 = 7{,}2$ cm.

Ex. 40 ★★★ **Le jardin de Maëlys**

(a) Non. Le sommet T est sur le côté [TN]. La hauteur relative au côté [TN] part du sommet qui ne touche pas [TN] : c'est R. C'est la droite (RK), perpendiculaire à (TN) en K. Elle n'est pas verticale. [TH] est la hauteur relative au côté [RN].

(b) [TH] est la hauteur relative à la base [RN]. Aire $= 6{,}5 \times 4 \div 2 = 13$ m².

(c) [TN] n'est pas perpendiculaire à (RN) : c'est un côté oblique, pas une hauteur. Son calcul donne 16,25 m², ce qui est faux. Il faut prendre la hauteur relative à [RN], soit TH $= 4$ m.

(d) Avec la base [TN] : aire $= TN \times RK \div 2$, donc $RK = 2 \times 13 \div 5 = 5{,}2$ m.

(e) Le milieu de [RN] est à $6{,}5 \div 2 = 3{,}25$ m de R. Or RH $= 3{,}5$ m et $3{,}5 \neq 3{,}25$: H n'est pas le milieu de [RN]. En général, une hauteur ne passe pas par le milieu du côté opposé.

Ex. 41 ★★★ **L'enseigne pointe en bas**

(a) Non. Le codage en I montre seulement que I est le milieu de [GS] : [MI] est la médiane issue de M. L'angle droit est codé en H : la hauteur issue de M est (MH), perpendiculaire à (GS). Elle ne passe pas par le milieu.

(b) Le triangle GHM est rectangle en H, donc ses angles aigus sont complémentaires : $\widehat{GMH} = 90° - 64° = 26°$. De même, MHS est rectangle en H : $\widehat{HMS} = 90° - 41° = 49°$.

(c) H est entre G et S, donc $\widehat{GMS} = 26° + 49° = 75°$. Vérification : dans GMS, la somme des angles vaut 180°. $64 + 41 = 105$ et $180° - 105° = 75°$.

(d) Non. L'angle droit est codé au sommet H, qui n'est pas un sommet de GMS : ce sont GHM et MHS qui sont rectangles en H. Les angles de GMS mesurent 64°, 41° et 75° : aucun n'est droit.

(e) (MH) passe par M et est perpendiculaire à (HS) : c'est la hauteur issue de M. (SH) passe par S et est perpendiculaire à (MH) : c'est la hauteur issue de S. Les trois hauteurs se coupent en H, le sommet de l'angle droit.

Ex. 42 ★★★ **La maquette de charpente**

(a) Le triangle WHP est rectangle en H, donc ses angles aigus sont complémentaires : $\widehat{HWP} = 90° - 62° = 28°$.

(b) Les points K, P et H sont alignés, donc $\widehat{KPW}$ et $\widehat{WPH}$ forment un angle plat : $\widehat{KPW} = 180° - 62° = 118°$. Comme $118° > 90°$, le triangle KPW a un angle obtus en P.

(c) La hauteur relative à [KP] est WH : son pied H est sur le côté [KP] prolongé. Aire $= 6{,}8 \times 3 \div 2 = 10{,}2$ cm².

(d) Hugo a oublié le « $\div 2$ » de la formule. On sait que aire $= PW \times KL \div 2$, donc $KL = 2 \times 10{,}2 \div 3{,}4 = 6$ cm.

(e) On sait que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Donc O est aussi sur la hauteur issue de P, perpendiculaire à (KW). La droite (WH) ne touche le triangle qu'en W, et O n'est pas W, car (KL) ne passe pas par W.
Donc O est à l'extérieur du triangle, comme dans tout triangle qui a un angle obtus.

7. *Médianes, aires et droites remarquables*

Ex. 43 ★☆☆ **Médiane et moitié d'aire**

(a) C'est [KI] : la droite (KI) passe par le sommet K et par le milieu I du côté opposé [LM].

(b) I est le milieu de [LM], donc LI $= 7{,}4 \div 2 = 3{,}7$ cm.

(c) La médiane (KI) partage KLM en deux triangles de même aire : aire de KLI $= 13{,}6 \div 2 = 6{,}8$ cm².

(d) Non : une médiane passe par un sommet et par le milieu du côté opposé, elle n'est pas perpendiculaire à ce côté en général. Sur la figure, (KI) n'est pas codée perpendiculaire à (LM).

(e) (EN) est la médiane issue de E : ENF a pour aire la moitié de DEF.
Donc aire de DEF $= 8{,}6 \times 2 = 17{,}2$ cm².

Ex. 44 ★☆☆ **Quelle droite remarquable ?**

(a) (RH) passe par le sommet R et elle est perpendiculaire à (ST) en H : c'est la hauteur issue de R.

(b) (UJ) passe par le sommet U et par le milieu J de [VW], sans angle droit : c'est la médiane issue de U.

Ex. 44 **(suite)**

(c) La droite passe par le milieu K de [PQ] et elle est perpendiculaire à [PQ] : c'est la médiatrice de [PQ]. Elle ne passe pas par le sommet N.

(d) Lina a tort. La droite passe par le milieu M de [YZ], mais pas par le sommet X : ce n'est pas une médiane. Elle n'est pas perpendiculaire à (YZ) : ce n'est ni une hauteur ni une médiatrice. Ce n'est aucune des trois.

Ex. 45 ★★☆ **Le fanion isocèle**

(a) (HK) passe par le sommet H et par le milieu K de [GJ] : c'est la médiane issue de H. On sait que HG = HJ. Or si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.
Donc H est sur la médiatrice de [GJ], et K aussi (milieu) : (HK) est la médiatrice de [GJ]. Elle est perpendiculaire à (GJ) et passe par H : c'est aussi la hauteur issue de H.

(b) Non. Si la médiane issue de G était perpendiculaire à [HJ], elle serait la médiatrice de [HJ] et G serait équidistant de H et J : GH = GJ. Or GH ≈ 6,1 cm et GJ = 7 cm. Cela ne marche que pour le sommet principal H.

(c) (HK) est la hauteur relative à [GJ]. Aire de GHJ = $7 \times 5 \div 2 = 17{,}5$ cm². GK = $7 \div 2 = 3{,}5$ cm, donc aire de GHK = $3{,}5 \times 5 \div 2 = 8{,}75$ cm², la moitié de 17,5.

(d) 3 droites : dans un triangle équilatéral, il est isocèle en chacun de ses sommets, donc pour chaque sommet la médiane, la hauteur et la médiatrice du côté opposé sont confondues.

Ex. 46 ★★☆ **Le jardin partagé d'Inès**

(a) Non : (TM) passe par T et par le milieu M de [RV], c'est la médiane issue de T. La hauteur issue de T est (TH), perpendiculaire à (RV), avec H sur le côté prolongé.

(b) La hauteur relative à [RV] est TH. Aire de TRV = $9 \times 5 \div 2 = 22{,}5$ m².

(c) On sait que M est le milieu de [RV], donc RM = MV = $9 \div 2 = 4{,}5$ m, et que TRM et TMV ont la même hauteur TH = 5 m. Or l'aire d'un triangle vaut base × hauteur ÷ 2.
Donc aire de TRM = aire de TMV = $4{,}5 \times 5 \div 2 = 11{,}25$ m², soit $22{,}5 \div 2$.

(d) Non. Périmètre de TRM ≈ $5{,}8 + 4{,}5 + 9 = 19{,}3$ m ; périmètre de TMV ≈ $9 + 4{,}5 + 13 = 26{,}5$ m. Même aire ne veut pas dire même périmètre.

Ex. 47 ★★★ **Le pliage de Nora**

(a) La hauteur relative au côté [MN] est [PH]. Aire de MNP = $12 \times 8 \div 2 = 48$ cm².

(b) (PI) passe par le sommet P et par I, milieu du côté opposé [MN] : c'est la médiane issue de P. Elle partage MNP en deux triangles de même aire : aire de MPI = $48 \div 2 = 24$ cm².

(c) (PJ) passe par le sommet P du triangle MPI et par J, milieu du côté opposé [MI] : c'est la médiane issue de P. Elle coupe MPI en deux triangles de même aire : aire de MJP = $24 \div 2 = 12$ cm². Vérification : MI = $12 \div 2 = 6$ cm, donc MJ = $6 \div 2 = 3$ cm, et avec la même hauteur PH : $3 \times 8 \div 2 = 12$ cm². $48 \div 4 = 12$: c'est le quart de l'aire de MNP.

(d) Non. Deux triangles superposables ont des côtés de mêmes longueurs. MJP a pour côtés PM ≈ 8,9 cm, MJ = 3 cm et [PJ]. JIP a pour côtés PI ≈ 8,2 cm, JI = 3 cm et [PJ]. Comme $8{,}9 \neq 8{,}2$, ils n'ont pas les mêmes côtés. Même aire ne veut pas dire même forme : Léo a tort.

Ex. 48 ★★★ **Le pignon de la cabane**

(a) Le triangle KLM est isocèle en L, donc ses angles à la base sont égaux : $\widehat{KML} = \widehat{LKM} = 69°$. Or, dans un triangle, la somme des angles vaut 180°. $69 + 69 = 138$, donc $\widehat{KLM} = 180° - 138° = 42°$.

(b) Non. (KP) passe par P, milieu de [LM]. Si elle était perpendiculaire à (LM), ce serait la médiatrice de [LM]. Or si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est à la même distance de ses extrémités : on aurait KL = KM. Mais KL = 7 m et KM = 5 m.
Donc (KP) n'est pas perpendiculaire à (LM) : ce n'est pas la hauteur issue de K. Seule la médiane issue du sommet principal L est aussi une hauteur.

(c) On sait que KLM est isocèle en L et que N est le milieu de [KM] : (LN) est la médiane issue du sommet principal L. Or, dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi la hauteur issue de ce sommet.
Donc $\widehat{LNK} = 90°$. Or, dans un triangle, la somme des angles vaut 180°. Dans le triangle LNK : $90 + 69 = 159$, donc $\widehat{KLN} = 180° - 159° = 21°$.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Oui. Dans un triangle équilatéral, KL = KM. K est donc équidistant de L et de M. Or si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice. Cette médiatrice passe par P, milieu de [LM] : c'est donc la droite (KP), qui est perpendiculaire à (LM).
Donc (KP) est aussi la hauteur issue de K.

Ex. 49 ★★★ **La fresque en six couleurs**

(a) La hauteur relative au côté [VW] est [UH]. Aire de UVW $= 7{,}5 \times 4{,}8 \div 2 = 18$ m².

(b) Les six petits triangles ont la même aire : $18 \div 6 = 3$ m² chacun.

(c) On sait que I est le milieu de [VW], donc VI = IW = $7{,}5 \div 2 = 3{,}75$ m : (GI) est la médiane issue de G dans le triangle GVW. Les triangles GVI et GIW ont des bases de même longueur et la même hauteur, la distance de G à la droite (VW). Or l'aire d'un triangle vaut base × hauteur ÷ 2.
Donc GVI et GIW ont la même aire.

(d) (UI) est une médiane, pas une hauteur : l'angle droit est en H, pas en I, donc (UI) n'est pas perpendiculaire à (VW). La hauteur à utiliser est UH = 4,8 m. Aire de UVI $= 3{,}75 \times 4{,}8 \div 2 = 9$ m², c'est bien la moitié de 18 m².

(e) UGW est formé de deux petits triangles : $2 \times 3 = 6$ m², soit le tiers de la fresque.