Quatrième / Triangles égaux : les cas d'égalité

benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 5e : troisième angle, constructions, symétries*

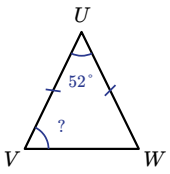
À retenir : Somme des angles 180° : $180 - (29 + 64) = 87°$; isocèle : angles à la base égaux ; équilatéral : 60°. Construire : plus grand côté < somme des autres ; angle compris au sommet commun. Trois angles ne fixent pas la taille. Symétrie : longueurs, angles conservés.

Ex. 1 ★☆☆ **Troisième angle et triangles particuliers** — Calcule les angles demandés. Justifie en une phrase.

(a) Dans le triangle RST, $\widehat{SRT} = 38°$ et $\widehat{RST} = 57°$. Tom écrit : $\widehat{RTS} = 180 - 38 + 57$. Corrige son calcul et donne $\widehat{RTS}$.

(b) Dans le triangle MNP, $\widehat{NMP} = 47{,}5°$ et $\widehat{MPN} = 68{,}5°$. Calcule $\widehat{MNP}$.

(c) UVW est isocèle en U et $\widehat{VUW} = 52°$. Calcule $\widehat{UVW}$.



(d) DEF est isocèle en E et $\widehat{EDF} = 35°$. Calcule $\widehat{EFD}$ puis $\widehat{DEF}$.

(e) Les trois côtés du triangle GHK ont la même longueur. Donne $\widehat{GKH}$.

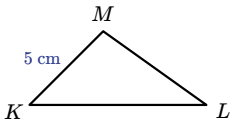
Ex. 2 ★☆☆ **Triangle constructible ou non ?** — Dis si on peut construire un triangle avec ces trois longueurs. Justifie en comparant le plus grand côté à la somme des deux autres.

(a) 11 cm, 5 cm et 4 cm.

(b) 8 cm, 5 cm et 3 cm.

(c) 5,4 cm, 3,7 cm et 7,1 cm.

(d) Zoé a dessiné à main levée un triangle KLM avec KL = 10 cm, LM = 4,5 cm et KM = 5 cm. Peut-on vraiment le construire ? Justifie.



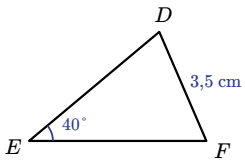
La figure n'est pas à l'échelle.

Ex. 3 ★★☆ **Les données sont-elles bien placées ?** — Dis si les données permettent de construire un seul triangle (à un retournement près). Justifie en repérant le sommet de chaque angle.

(a) Triangle ABC : AB = 6 cm, BC = 4,5 cm et $\widehat{ABC} = 48°$.

Ex. 3 (suite)

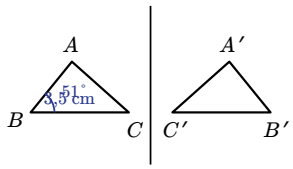
(b) Triangle DEF : DE = 5 cm, DF = 3,5 cm et $\widehat{DEF} = 40°$.



(c) Triangle GHJ : GH = 7 cm, $\widehat{HGJ} = 35°$ et $\widehat{GHJ} = 62°$.

(d) Triangle XYZ : $\widehat{X} = 50°$, $\widehat{Y} = 60°$ et $\widehat{Z} = 70°$.

Ex. 4 ★★☆ **Symétrique d'une pièce de puzzle** — Lina découpe une pièce de puzzle triangulaire ABC : AB = 3 cm, BC = 4,5 cm, AC = 3,5 cm et $\widehat{ABC} = 51°$. A'B'C' est son symétrique par rapport à la droite tracée.

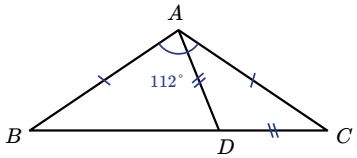


(a) Sans mesurer, donne A'B', B'C', A'C' et $\widehat{A'B'C'}$. Justifie.

(b) Calcule le périmètre du triangle A'B'C'.

(c) Lina dit : « Pour superposer ABC et A'B'C', il suffit de faire glisser le calque. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 5 ★★★ **Plan de charpente : des angles en chaîne** — Sur le plan d'une charpente, la ferme ABC est isocèle en A avec $\widehat{BAC} = 112°$. Une jambe de force [AD] relie A à un point D de [BC], avec DA = DC.



(a) Yanis écrit : « $\widehat{ABC} = 180 - 112 \div 2 = 124°$ ». Trouve son erreur, puis calcule $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Justifie.

(b) Calcule $\widehat{DAC}$, puis $\widehat{ADC}$. Justifie chaque étape.

(c) Calcule $\widehat{BAD}$, puis $\widehat{ADB}$ dans le triangle ABD. Justifie.

(d) Vrai ou faux : « Le triangle ABD est isocèle. » Justifie.

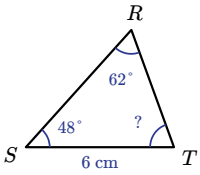
Ex. 6 ★★★ **Les voiles d'Inès** — Inès dessine des voiles triangulaires RST sur un plan (en cm) pour une voilerie. La voilerie ne découpe une voile que si les données donnent un seul triangle (à un retournement près).

(a) Proposition 1 : RS = 7,5 cm, ST = 3,2 cm et RT = 4,3 cm. La voilerie peut-elle découper cette voile ? Justifie.

(b) Inès écrit : « RT = 6 cm, ST = 5 cm et $\widehat{TRS} = 55°$: l'angle est compris entre les deux côtés. » Corrige son erreur et dis quel angle elle aurait dû donner.

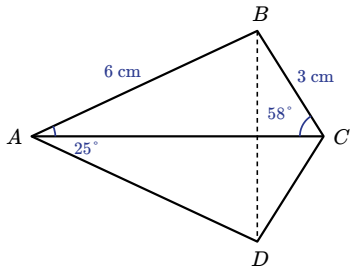
(c) Inès veut une voile équilatérale. Elle envoie : RS = ST = 5 cm et $\widehat{RST} = 60°$. Calcule $\widehat{SRT}$ et $\widehat{STR}$, puis déduis-en RT.

(d) Proposition 4 : ST = 6 cm, $\widehat{RST} = 48°$ et $\widehat{SRT} = 62°$. Calcule $\widehat{RTS}$, puis explique pourquoi on obtient une seule voile.



(e) Proposition 5 : ST = 6 cm, $\widehat{RST} = 95°$ et $\widehat{RTS} = 90°$. La voilerie peut-elle découper cette voile ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Le cerf-volant de Noé** — Noé trace le triangle ABC avec AB = 6 cm, BC = 3 cm, $\widehat{BAC} = 25°$ et $\widehat{ACB} = 58°$. Il place D, le symétrique de B par rapport à la droite (AC). Il obtient le cerf-volant ABCD.



(a) Calcule $\widehat{ABC}$. Justifie.

(b) Sans rien mesurer, calcule le périmètre du cerf-volant ABCD. Justifie.

(c) Donne $\widehat{ADC}$, puis calcule $\widehat{BAD}$. Justifie.

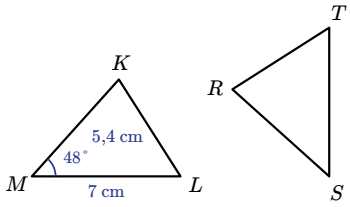
(d) Explique pourquoi le triangle ABD est isocèle, puis calcule $\widehat{ABD}$.

(e) Calcule $\widehat{BCD}$, puis $\widehat{CBD}$ dans le triangle BCD. Vérifie ton résultat avec $\widehat{ABC}$.

2. *Triangles égaux et éléments homologues*

À retenir : Triangles égaux = superposables : mêmes côtés, mêmes angles, même périmètre, même aire (l'inverse est faux). Homologue d'un sommet : celui d'où partent les mêmes longueurs. Ordre des homologues : PQR et XZY égaux donne $PQ = XZ$, pas XY.

Ex. 8 ★★☆ **Automatismes — Compléter des égalités dans le bon ordre** — Les triangles KLM et RTS sont égaux. On donne KL = 5,4 cm, LM = 7 cm et $\widehat{KML} = 48°$.



(a) Écris les trois correspondances de sommets.

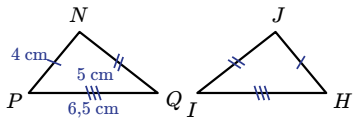
(b) Quel côté du triangle RTS mesure 5,4 cm ?

(c) Quel côté du triangle KLM est l'homologue de [RS] ?

(d) Quel angle du triangle RTS mesure 48° ? Écris-le avec trois lettres.

(e) Complète : $\widehat{LKM} = \overset{\frown}{\ldots}$ et $\widehat{KLM} = \overset{\frown}{\ldots}$

Ex. 9 ★★★ **Automatismes — Trouver les homologues d'un triangle retourné** — Les triangles NPQ et HIJ sont égaux. On donne NP = 4 cm, PQ = 6,5 cm et NQ = 5 cm. Les codages indiquent les côtés de même longueur.



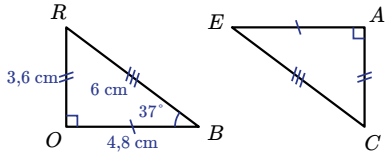
(a) Quel sommet de HIJ est l'homologue de N ? Justifie à l'aide des deux côtés qui partent de N.

(b) Quel sommet de HIJ est l'homologue de P ? Justifie de la même façon.

(c) Complète en respectant l'ordre des homologues : « les triangles NPQ et … sont égaux ».

(d) Quel côté de HIJ est l'homologue de [PQ] ? Quel angle de HIJ fait face à ce côté ?

Ex. 10 ★★☆ **Les pièces du puzzle de Malo** — Deux pièces d'un puzzle, les triangles BOR et ACE, sont égales. BOR est rectangle en O, avec BO = 4,8 cm, OR = 3,6 cm et BR = 6 cm ; on a mesuré $\widehat{OBR} \approx 37°$. Les codages indiquent les côtés de même longueur.



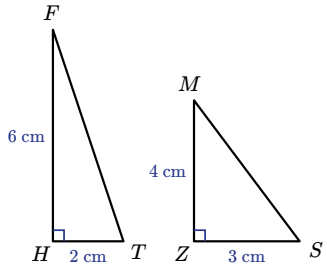
(a) Malo écrit : « BOR et ACE sont égaux, donc BO = AC. » Explique son erreur, puis écris les deux triangles dans l'ordre des homologues.

(b) Calcule le périmètre et l'aire de la pièce BOR. Déduis-en ceux de la pièce ACE, sans rien mesurer.

Ex. 10 **(suite)**

(c) Quel angle de la pièce ACE est l'homologue de $\widehat{ORB}$? Calcule sa mesure.

Ex. 11 ★★☆ **Les voiles de Lou : même aire, triangles égaux ?** — La voile FHT est rectangle en H, avec FH = 6 cm et HT = 2 cm. La voile MZS est rectangle en Z, avec MZ = 4 cm et ZS = 3 cm.

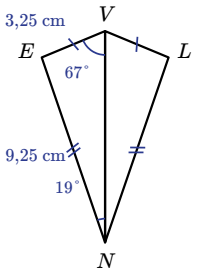


(a) Calcule l'aire de chaque voile.

(b) Lou affirme : « Les deux voiles ont la même aire, donc les triangles FHT et MZS sont égaux. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Trouve deux triangles non égaux qui ont le même périmètre de 12 cm, avec des côtés entiers. Vérifie qu'on peut les construire.

Ex. 12 ★★★ **Le cerf-volant de Yanis** — La voile du cerf-volant de Yanis a pour sommets V, E, N et L. La baguette [VN] la partage en deux triangles. On donne VE = VL = 3,25 cm et NE = NL = 9,25 cm. On a mesuré $\widehat{EVN} = 67°$ et $\widehat{ENV} = 19°$.



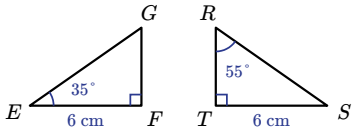
(a) Démontre que les deux triangles de la voile sont égaux. Trouve l'homologue de E avec les deux côtés qui en partent, puis écris les triangles dans l'ordre des homologues.

(b) Léna écrit : « Les triangles VEN et NLV sont égaux, donc VE = NL. » Explique son erreur, puis corrige sa phrase.

(c) Sans rien mesurer, donne $\widehat{LVN}$ et $\widehat{LNV}$, puis calcule $\widehat{VLN}$.

(d) Calcule l'angle $\widehat{EVL}$ au sommet du cerf-volant, puis le périmètre de la voile VENL.

Ex. 13 ★★★ **Les équerres de menuisier de Sacha** — Sacha, menuisier, compare deux équerres. L'équerre EFG est rectangle en F, avec EF = 6 cm et $\widehat{FEG} = 35°$. On a mesuré FG = 4,2 cm et EG = 7,3 cm. L'équerre RST est rectangle en T, avec ST = 6 cm et $\widehat{TRS} = 55°$.



(a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{TSR}$.

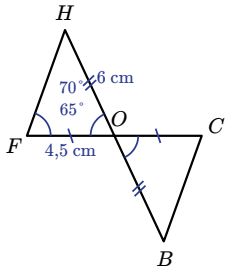
(b) Démontre que les deux équerres sont égales. Écris-les dans l'ordre des homologues.

(c) Sans mesurer, donne RT, RS et $\widehat{EGF}$. Pour chaque égalité, nomme l'élément homologue que tu utilises.

(d) Calcule le périmètre et l'aire de l'équerre RST.

(e) Noé a découpé un triangle UVW de côtés 5 cm, 5,5 cm et 7 cm. Il affirme : « UVW a le même périmètre que RST, donc il est égal à RST. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Les barres croisées du pont de Maëlys** — Sur le garde-corps d'un pont, Maëlys observe deux barres [FC] et [HB] qui se croisent en O. On donne OF = OC = 4,5 cm et OH = OB = 6 cm. On a mesuré $\widehat{FOH} = 65°$ et $\widehat{OFH} = 70°$.



(a) Démontre que les triangles OFH et OCB sont égaux. Précise les sommets homologues.

(b) Parmi « FHO et BCO », « FHO et CBO » et « HFO et CBO », quelle écriture des triangles égaux est correcte ? Justifie, puis donne l'angle égal à $\widehat{OBC}$.

(c) Calcule $\widehat{OHF}$, puis donne les trois angles du triangle OCB.

(d) Démontre que les droites (FH) et (BC) sont parallèles.

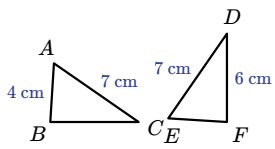
(e) Sans mesurer, compare FH et BC. Justifie à l'aide des angles auxquels ces côtés font face.

3. *Cas d'égalité : trois côtés*

À retenir : Premier cas (trois côtés) : mêmes trois longueurs ⇒ triangles égaux. Je convertis (mm → cm), je range les longueurs : 2; 4; 5,3 et 2; 4; 5,03 → pas égaux. Homologues : de chaque sommet partent les mêmes deux longueurs.

Ex. 15 ★☆☆ **Ranger les longueurs pour comparer** — Pour chaque paire, range les longueurs de chaque triangle de la plus petite à la plus grande. Les triangles sont-ils égaux ? Justifie.

(a) ABC : AB = 4 cm, BC = 6 cm, AC = 7 cm ; DEF : DE = 7 cm, EF = 4 cm, DF = 6 cm.

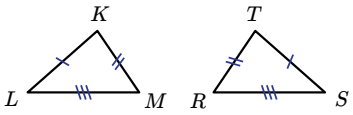


(b) GHI : GH = 5,2 cm, HI = 7,6 cm, GI = 8 cm ; JKL : JK = 8 cm, KL = 5,2 cm, JL = 7,06 cm.

(c) MNP : MN = 45 mm, NP = 3,8 cm, MP = 6 cm ; RST : RS = 3,8 cm, ST = 60 mm, RT = 4,5 cm.

(d) UVW : UV = 9,5 cm, VW = 7 cm, UW = 5 cm ; XYZ : XY = 5 cm, YZ = 9,5 cm, XZ = 7,5 cm.

Ex. 16 ★☆☆ **Des codages aux sommets homologues** — Sur la figure, les côtés qui portent le même codage ont la même longueur.



(a) Traduis les codages par trois égalités de longueurs.

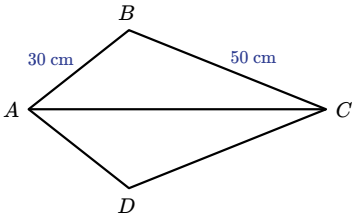
(b) Explique pourquoi les deux triangles de la figure sont égaux, en citant le cas d'égalité.

(c) Retrouve le sommet homologue de K, celui de L et celui de M.

(d) Recopie et complète dans l'ordre des homologues : « Les triangles KLM et … sont égaux. »

(e) Complète : $\widehat{LKM} = \ldots$ et $\widehat{KLM} = \ldots$.

Ex. 17 ★★☆ **Le cerf-volant de Lina** — Lina fabrique un cerf-volant ABCD avec une baguette [AC] de 70 cm. Elle mesure AB = 30 cm, AD = 300 mm, CB = 50 cm et CD = 500 mm.

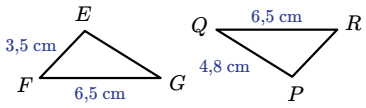


(a) Convertis AD et CD en cm.

(b) Démontre que les triangles ABC et ADC sont égaux.

(c) Déduis-en que la baguette [AC] partage l'angle $\widehat{BAD}$ en deux angles égaux.

Ex. 18 ★★☆ **L'erreur de Noé** — Noé étudie les triangles EFG et PQR : EF = 3,5 cm, FG = 6,5 cm, EG = 4,8 cm, PQ = 4,8 cm, QR = 6,5 cm et PR = 3,5 cm. Il écrit : « D'après le premier cas, les triangles EFG et PQR sont égaux, donc EF = PQ et $\widehat{EFG} = \widehat{PQR}$. »



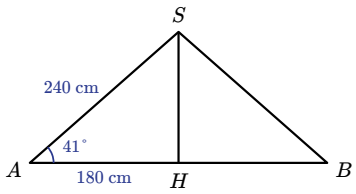
(a) Les triangles EFG et PQR sont-ils égaux ? Justifie.

(b) Retrouve les sommets homologues, puis écris les deux triangles dans le bon ordre.

(c) Noé a-t-il raison d'écrire EF = PQ et $\widehat{EFG} = \widehat{PQR}$? Justifie, puis corrige.

(d) Lina trace un triangle XYZ avec XY = 48 mm, YZ = 6,05 cm et XZ = 3,5 cm. Les triangles EFG et XYZ sont-ils égaux ? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **La ferme de charpente de Yanis** — Yanis assemble une ferme de charpente : l'entrait [AB], les arbalétriers [SA] et [SB], et le poinçon [SH], où H est un point de [AB]. Il mesure SA = 240 cm, SB = 2,4 m, AH = 180 cm, HB = 1,8 m et $\widehat{SAH} = 41°$.



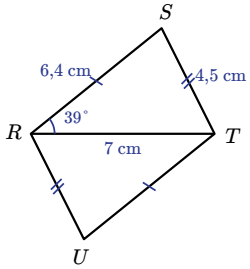
(a) Convertis SB et HB en cm.

(b) Démontre que les triangles SAH et SBH sont égaux, en précisant les sommets homologues.

(c) Déduis-en que $\widehat{SHA} = \widehat{SHB}$, puis démontre que le poinçon (SH) est perpendiculaire à l'entrait (AB).

(d) Calcule $\widehat{ASH}$, puis $\widehat{ASB}$. Justifie chaque étape.

Ex. 20 ★★★ **Les pièces de puzzle d'Inès** — Inès assemble deux pièces de puzzle triangulaires RST et TUR le long de leur bord [RT]. Elle mesure RS = TU = 6,4 cm, ST = UR = 4,5 cm, RT = 7 cm, $\widehat{SRT} = 39°$ et $\widehat{RTS} = 63°$.



(a) Démontre que les triangles RST et TUR sont égaux, en précisant les sommets homologues.

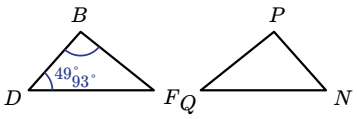
Ex. 20 **(suite)**

(b) Déduis-en une égalité d'angles, puis démontre que les droites (RS) et (TU) sont parallèles.

(c) Calcule $\widehat{RST}$, puis donne les trois angles du triangle TUR. Justifie.

(d) Malo découpe une pièce XYZ avec XY = 6,04 cm, YZ = 4,5 cm et XZ = 70 mm. Il affirme qu'elle est superposable à la pièce RST. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Les gabarits de menuisier de Zoé** — Zoé taille deux gabarits de menuisier. BDF : BD = 5 cm, DF = 8 cm, BF = 6 cm, $\widehat{DBF} = 93°$ et $\widehat{BDF} = 49°$. NQP : QP = 6 cm, NP = 5 cm et NQ = 8 cm. Le second gabarit a été retourné.



(a) Pour chaque sommet de BDF, écris les deux longueurs qui en partent, puis trouve son sommet homologue dans NQP.

(b) Démontre que les deux triangles sont égaux, en écrivant le second dans l'ordre des homologues.

(c) Zoé pense : « Deux gabarits de même périmètre sont superposables. » Un gabarit HIJ a pour côtés 4 cm, 7 cm et 8 cm. Montre qu'elle a tort.

(d) Calcule $\widehat{BFD}$, puis donne les trois angles du triangle NQP. Justifie.

4. *Cas d'égalité : un angle entre deux côtés*

À retenir : Deuxième cas : si deux triangles ont deux côtés égaux deux à deux et l'angle compris entre ces côtés égal, alors ils sont égaux. Le sommet de $\widehat{KLM}$ est L : cet angle est compris entre [LK] et [LM]. Un angle non compris ne suffit pas.

Ex. 22 ★☆☆ **Repérer l'angle compris** — Le sommet d'un angle est la lettre du milieu. Réponds à chaque question.

(a) Dans le triangle RTS, quel angle est compris entre les côtés [TR] et [TS] ?

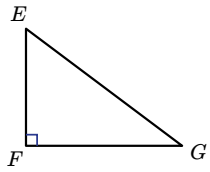
(b) Dans le triangle KLM, l'angle $\widehat{KML}$ est compris entre quels côtés ?

(c) Dans le triangle PQU, on connaît PQ, QU et $\widehat{QPU}$. Cet angle est-il compris entre [PQ] et [QU] ? Justifie.

(d) Écris l'angle de sommet N du triangle NVB avec trois lettres.

Ex. 22 **(suite)**

(e) Dans le triangle EFG de la figure, quel angle est compris entre [FE] et [FG] ? Donne sa mesure.

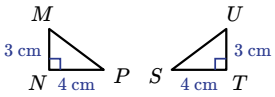


Ex. 23 ★★☆ **Le deuxième cas s'applique-t-il ?** — Regarde où se trouve le sommet de l'angle avant de conclure.

(a) GHI : GH = 7 cm, HI = 5 cm, $\widehat{HGI} = 35°$. JKL : JK = 7 cm, KL = 5 cm, $\widehat{KJL} = 35°$. Le deuxième cas prouve-t-il que ces triangles sont égaux ? Justifie.

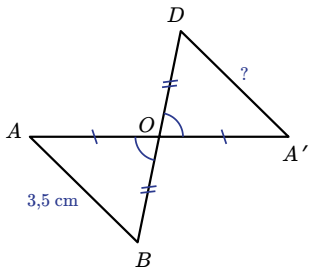
(b) ABC et DEF : AB = DE = 4,5 cm et BC = EF = 7,2 cm. Quelle égalité d'angles faut-il ajouter pour appliquer le deuxième cas ?

(c) Sur la figure : MN = TU = 3 cm, NP = TS = 4 cm, et les angles en N et en T sont droits. Les triangles sont-ils égaux ? Justifie.



(d) OPQ : OP = 5,6 cm, PQ = 3 cm, $\widehat{OPQ} = 110°$, $\widehat{OQP} = 47°$. BCZ : CB = 3 cm, CZ = 5,6 cm, $\widehat{BCZ} = 110°$. Les triangles sont-ils égaux ? Déduis-en $\widehat{CBZ}$.

Ex. 24 ★★☆ **Symétrie et angles opposés par le sommet** — Sur la figure, A' est le symétrique de A par rapport à O. Le point D est sur la droite (BO), de l'autre côté de O, et OD = OB. On sait que AB = 3,5 cm.

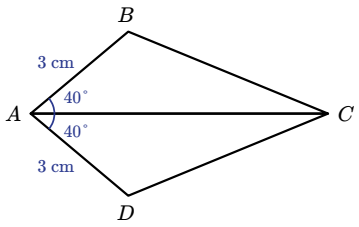


(a) Complète : « Dans les triangles OAB et OA'D : • OA = … (…) ; • OB = … (…) ; • $\widehat{AOB}$ = … (…). D'après le … cas d'égalité, les triangles … sont égaux. »

(b) Écris la correspondance des sommets homologues, puis déduis-en la longueur A'D sans mesurer.

(c) Mila affirme : « Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OA'D}$ ne sont pas forcément égaux. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Le cerf-volant d'Inès** — Inès dessine le plan d'un cerf-volant ABCD. On a AB = AD = 3 cm, AC = 7 cm et $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = 40°$.

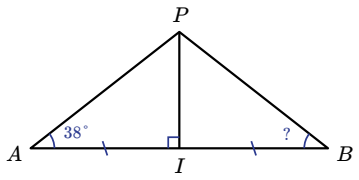


(a) Démontre que les triangles ABC et ADC sont égaux.

(b) Explique pourquoi CB = CD et $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, sans rien mesurer. Calcule aussi $\widehat{BAD}$.

(c) Pour un autre cerf-volant EFGH, Hugo sait que EF = EH, que [EG] est un côté commun et que $\widehat{EGF} = \widehat{EGH} = 25°$. Il dit : « D'après le deuxième cas, EFG et EHG sont égaux. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **Le pylône du pont à haubans** — Sur le schéma d'un pont à haubans, le pylône [PI] est perpendiculaire au tablier [AB] et I est le milieu de [AB]. Les haubans [PA] et [PB] partent du sommet P. On sait que $\widehat{PAI} = 38°$.



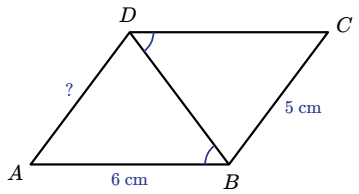
(a) Démontre que le triangle PAI est égal à un autre triangle de la figure. Écris ce triangle dans l'ordre des sommets homologues.

(b) Déduis-en que PA = PB. Quelle propriété de la médiatrice de [AB] viens-tu de retrouver ?

(c) Calcule $\widehat{PBI}$, puis $\widehat{APB}$, sans mesurer.

(d) Malo écrit : « PI est commun, PA = PB et $\widehat{PAI} = \widehat{PBI}$, donc d'après le deuxième cas, PAI et PBI sont égaux. » Explique son erreur.

Ex. 27 ★★★ **Le renfort de l'étagère** — Sur le plan d'un montant d'étagère, ABCD est un quadrilatère avec (AB) // (CD) et AB = CD = 6 cm. La diagonale [BD] est une barre de renfort. On sait aussi que BC = 5 cm.



(a) Explique pourquoi $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$.

(b) Démontre que les triangles ABD et CDB sont égaux. Donne la correspondance des sommets.

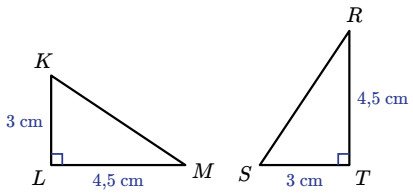
Ex. 27 (suite)

(c) Lina écrit : « Les triangles ABD et CBD sont égaux, donc AD = CD = 6 cm. » Trouve ses deux erreurs.

(d) Calcule AD sans mesurer, puis le périmètre de ABCD.

(e) Démontre que (AD) // (BC).

Ex. 28 ★★★ **Les pièces du puzzle de Nora** — Nora découpe des pièces de puzzle triangulaires. Le modèle KLM est rectangle en L, avec KL = 3 cm et LM = 4,5 cm. La pièce RTS est rectangle en T, avec TS = 3 cm et TR = 4,5 cm.



(a) Démontre que la pièce RTS est égale au modèle KLM. Écris les deux triangles dans l'ordre des homologues.

(b) Ben a mesuré KM ≈ 5,4 cm. Déduis-en RS sans mesurer, puis le périmètre de la pièce RTS.

(c) La pièce UVW a UV = 3 cm, VW = 4,5 cm et $\widehat{VUW} = 90°$. Zoé dit : « D'après le deuxième cas, UVW est égal à KLM. » A-t-elle raison ? Justifie.

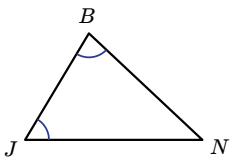
(d) La pièce XYZ est rectangle en Y, avec XY = 1,5 cm et YZ = 9 cm. Montre qu'elle a la même aire que KLM. Est-elle égale à KLM ? Justifie.

5. *Cas d'égalité : un côté entre deux angles*

À retenir : Troisième cas : un côté de même longueur et les deux angles à ses extrémités égaux → triangles égaux. Un angle mal placé ? Calcule le 3e avec 180°. Ex. : $\widehat{U} = 40°$, $\widehat{Z} = 65° \to \widehat{V} = 75°$, donc [UV] est entre 40° et 75°.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur le troisième cas** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie.

(a) Sur la figure, les deux angles marqués sont les angles adjacents au côté [JN].



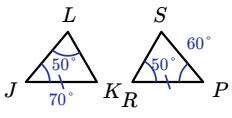
(b) Deux triangles qui ont chacun des angles de 45°, 55° et 80° sont forcément égaux.

(c) Les triangles EFG et CUX ont $EF = CU = 5{,}2$ cm, $\widehat{FEG} = \widehat{UCX} = 47°$ et $\widehat{EFG} = \widehat{CUX} = 105°$: ils sont égaux.

(d) Les triangles MSW et HYK ont $SW = KY = 3{,}6$ cm, $\widehat{MSW} = \widehat{HYK} = 42°$ et $\widehat{MWS} = \widehat{HKY} = 76°$. Ils sont égaux avec S ↔ K et W ↔ Y.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : d'abord le troisième angle** — Dans chaque cas, calcule d'abord le ou les angles manquants avec la somme des angles. Dis ensuite si les deux triangles sont égaux d'après le troisième cas, et justifie.

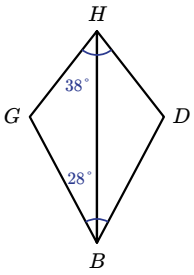
(a) JKL : $JK = 6$ cm, $\widehat{KJL} = 50°$, $\widehat{JLK} = 70°$. PRS : $PR = 6$ cm, $\widehat{RPS} = 50°$, $\widehat{PRS} = 60°$.



(b) Zoé : « 97° n'apparaît pas dans EFH, donc TUV et EFH ne sont pas égaux. » TUV : $UV = 4{,}5$ cm, $\widehat{TUV} = 38°$, $\widehat{UTV} = 97°$; EFH : $FH = 4{,}5$ cm, $\widehat{EFH} = 38°$, $\widehat{EHF} = 45°$.

(c) CDN : $CD = 8{,}4$ cm, $\widehat{DCN} = 64°$, $\widehat{CND} = 58°$. QWY : $QW = 8{,}4$ cm, $\widehat{WQY} = 64°$, $\widehat{QYW} = 64°$.

Ex. 31 ★★☆ **Le cerf-volant de Lina** — Lina fabrique un cerf-volant. La baguette [HB] est un côté commun aux triangles HGB et HDB. On a $\widehat{GHB} = \widehat{DHB} = 38°$ et $\widehat{GBH} = \widehat{DBH} = 28°$ (sur la figure, les angles sans mesure ont un arc seul).



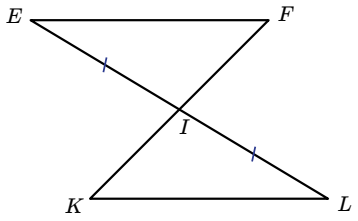
(a) Démontre que les triangles HGB et HDB sont égaux.

(b) Le bord [HG] mesure 32 cm. Déduis-en la longueur HD, et justifie.

(c) Lina affirme : « Comme les triangles sont égaux, GB = HD. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Calcule $\widehat{HDB}$.

Ex. 32 ★★☆ **La croix de l'étagère** — Sur le côté d'une étagère, deux barres [EL] et [FK] se croisent en I. Les tablettes (EF) et (KL) sont parallèles, et I est le milieu de [EL].



(a) Écris les trois égalités qui prouvent que les triangles IEF et ILK sont égaux, chacune avec sa justification.

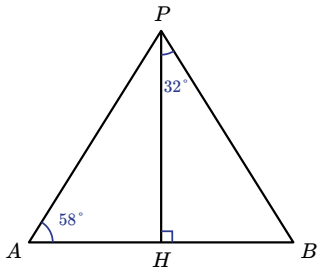
(b) Quel cas d'égalité utilises-tu ? Vérifie que les angles sont bien placés, puis conclus.

Ex. 32 (suite)

(c) La tablette du haut a une largeur $EF = 62{,}5$ cm. Déduis-en KL, et justifie.

(d) Noé écrit : « Les triangles IEF et IKL sont égaux. » Corrige son erreur.

Ex. 33 ★★★ **Le pylône du pont à haubans** — Sur le plan d'un pont à haubans, le pylône [PH] est perpendiculaire au tablier (AB), et H est sur [AB]. Les haubans [PA] et [PB] partent du sommet P. On donne $\widehat{PAH} = 58°$, $\widehat{BPH} = 32°$, HB = 45 m et PB = 85 m.



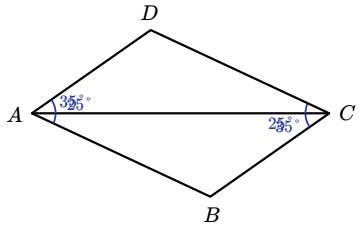
(a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{APH}$. Justifie.

(b) Démontre que les triangles PHA et PHB sont égaux. Écris la correspondance de leurs sommets.

(c) Déduis-en les longueurs HA et PA. Justifie avec les côtés homologues.

(d) Démontre que la droite (PH) est la médiatrice du segment [AB].

Ex. 34 ★★★ **La pièce de puzzle de Sacha** — Sacha découpe une pièce de puzzle ABCD le long de la diagonale [AC]. On a $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 25°$, $\widehat{BCA} = \widehat{DAC} = 35°$, AB = 6 cm et BC = 4,4 cm.



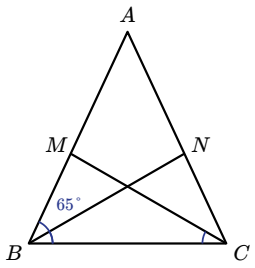
(a) Démontre que les triangles ABC et CDA sont égaux. Écris la correspondance de leurs sommets.

(b) Hugo écrit : « Les triangles ABC et ACD sont égaux, donc BC = CD = 4,4 cm. » Trouve ses deux erreurs, puis donne les bonnes longueurs CD et DA.

(c) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, puis déduis-en celle de $\widehat{CDA}$ sans la mesurer.

(d) Démontre que ABCD est un parallélogramme, puis calcule son périmètre.

Ex. 35 ★★★ **La ferme de charpente de Rayan** — Sur le plan d'une ferme de charpente, Rayan dessine un triangle ABC isocèle en A avec $\widehat{ABC} = 65°$. M est sur [AB], N sur [AC], et les angles marqués sont égaux : $\widehat{NBC} = \widehat{MCB} = 30°$. On donne AB = 7,1 m et BM = 3 m.



(a) Calcule les mesures des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$. Justifie.

(b) Inès écrit : « BMC et CNB ont leurs trois angles égaux deux à deux, donc ils sont égaux. » Vérifie que leurs angles sont égaux, puis explique pourquoi sa justification ne convient pas.

(c) Démontre correctement que les triangles BCM et CBN sont égaux. Écris la correspondance de leurs sommets.

(d) Déduis-en CN, puis AN et AM. Quelle est la nature du triangle AMN ?

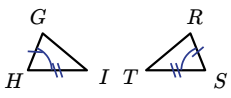
(e) Vrai ou faux : « BN = CM ». Justifie.

6. *Ce qui ne suffit pas : contre-exemples*

À retenir : Trois angles égaux, deux côtés et un angle non compris, la même aire ou le même périmètre ne suffisent pas : les triangles ne sont pas forcément égaux. Contre-exemple : deux triangles équilatéraux de côtés 2 cm et 5 cm ont les mêmes angles.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : suffit ou ne suffit pas ?** — Pour chaque série de données, recopie-la dans un tableau à deux colonnes : « suffit (cas cité) » ou « ne suffit pas ». Si les données suffisent, écris les triangles égaux dans l'ordre des sommets homologues.

(a) Les triangles GHI et RST sont codés sur la figure.



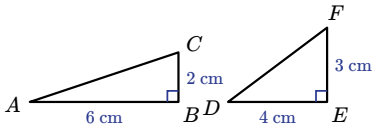
(b) Triangles KLM et UVW : KL = VW = 4,5 cm, LM = UW = 7 cm et KM = UV = 5,2 cm.

(c) Deux triangles ABC et DEF ont $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 48°$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 67°$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE} = 65°$.

(d) Triangles PQR et XYZ : PQ = XY = 6 cm, $\widehat{QPR} = \widehat{YXZ} = 52°$ et $\widehat{PRQ} = \widehat{XZY} = 73°$.

(e) Triangles EFG et JKN : EF = JK = 5 cm, $\widehat{FEG} = \widehat{KJN} = 45°$, $\widehat{EGF} = 80°$ et $\widehat{JKN} = 80°$.

Ex. 37 ★★☆ **Automatismes : même aire, mais égaux ?** — ABC est un triangle rectangle en B avec AB = 6 cm et BC = 2 cm. DEF est un triangle rectangle en E avec DE = 4 cm, EF = 3 cm et DF = 5 cm.



(a) Calcule l'aire du triangle ABC.

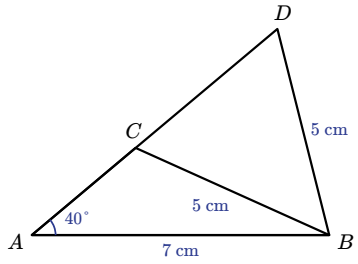
(b) Calcule l'aire du triangle DEF.

(c) Les triangles ABC et DEF sont-ils égaux ? Justifie avec une longueur.

(d) Complète par « pas égaux » ou par « pas forcément égaux » : deux triangles qui ont la même aire sont . . .

(e) Complète par « pas égaux » ou par « pas forcément égaux » : deux triangles de périmètres 14 cm et 15 cm sont . . .

Ex. 38 ★★☆ **La pièce de puzzle d'Inès** — Inès veut découper une pièce de puzzle triangulaire ABC avec AB = 7 cm, $\widehat{BAC} = 40°$ et BC = 5 cm. Elle trace l'angle de 40° en A, puis le cercle de centre B et de rayon 5 cm. Ce cercle coupe l'autre côté de l'angle en deux points C et D.

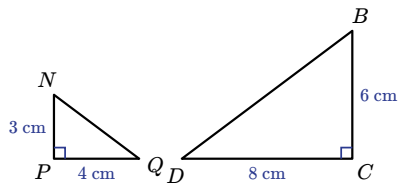


(a) Explique pourquoi les triangles ABC et ABD respectent tous les deux les trois données d'Inès.

(b) Construis la figure en vraie grandeur, puis mesure AC et AD. Les triangles ABC et ABD sont-ils égaux ? Justifie.

(c) Inès dit : « Deux côtés et un angle sont égaux, c'est le deuxième cas, donc ma pièce est unique. » Explique son erreur. Ensuite, propose une donnée qui remplace BC = 5 cm et qui rend la pièce unique.

Ex. 39 ★★☆ **Les équerres de menuisier de Tom** — Tom compare deux équerres de menuisier triangulaires. NPQ est rectangle en P avec NP = 3 cm, PQ = 4 cm et NQ = 5 cm. BCD est rectangle en C avec BC = 6 cm, CD = 8 cm et BD = 10 cm. Ben lui indique que $\widehat{PNQ} = \widehat{CBD}$ et que $\widehat{PQN} = \widehat{CDB}$.



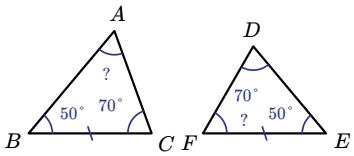
(a) Tom écrit : « Les trois angles sont égaux deux à deux, donc d'après le cas "trois angles", NPQ et BCD sont égaux. » Explique son erreur.

(b) Les triangles NPQ et BCD sont-ils égaux ? Justifie avec une longueur.

(c) Calcule le périmètre du triangle NPQ.

(d) Donne les trois longueurs d'un triangle qui a le même périmètre que NPQ sans être égal à NPQ. Vérifie qu'on peut le construire.

Ex. 40 ★★★ **Le plan de toit de Maëlle** — Maëlle dessine deux pans de toit triangulaires. ABC : BC = 6 cm, $\widehat{ABC} = 50°$ et $\widehat{ACB} = 70°$. DEF : EF = 6 cm, $\widehat{DEF} = 50°$ et $\widehat{EDF} = 70°$.



(a) Calcule $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DFE}$.

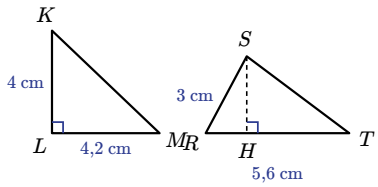
(b) Maëlle écrit : « Un côté de 6 cm et deux angles de 50° et 70°, donc d'après le troisième cas, les triangles sont égaux. » Explique son erreur.

(c) Si ABC et DEF étaient égaux, quels sommets seraient homologues ? Quel côté de DEF serait alors homologue à [BC] ?

(d) Construis DEF en vraie grandeur et mesure DE. Les triangles ABC et DEF sont-ils égaux ? Justifie.

(e) GHI est un troisième pan : HI = 6 cm, $\widehat{GHI} = 50°$ et $\widehat{HGI} = 60°$. Démontre que ABC et GHI sont égaux, puis cite le côté de GHI de même longueur que [AC].

Ex. 41 ★★★ **Les voiles de Yanis** — Yanis compare deux voiles triangulaires. KLM est rectangle en L, avec KL = 4 cm, LM = 4,2 cm et KM = 5,8 cm. RTS a pour côtés RT = 5,6 cm, RS = 3,4 cm et TS = 5 cm. H est le pied de la hauteur issue de S, et SH = 3 cm.



(a) Calcule le périmètre de chacune des deux voiles.

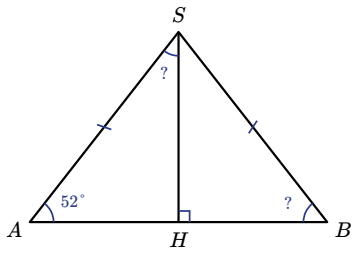
(b) Calcule l'aire de chacune des deux voiles.

(c) Yanis conclut : « Même périmètre et même aire, donc les deux voiles sont superposables. » Les triangles KLM et RTS sont-ils égaux ? Justifie.

(d) Yanis dit : « Deux triangles de même aire ne sont pas égaux. » Ben corrige : « pas forcément égaux ». Explique la différence avec deux exemples.

(e) La voile UVW est rectangle en V, avec UV = 4 cm et VW = 4,2 cm. Démontre que UVW et KLM sont égaux, puis donne UW.

Ex. 42 ★★★ **Les haubans du pont de Lina** — Sur la maquette d'un pont à haubans, le pylône [SH] est perpendiculaire au tablier (AB) en H, et H est sur [AB]. Les haubans [SA] et [SB] ont la même longueur, et $\widehat{SAB} = 52°$.



(a) Lina écrit : « SA = SB, [SH] est commun et $\widehat{SHA} = \widehat{SHB} = 90°$, donc SHA et SHB sont égaux (deuxième cas). » Explique pourquoi sa justification n'est pas valable.

(b) Calcule $\widehat{SBA}$, puis $\widehat{ASH}$ et $\widehat{BSH}$, en justifiant chaque calcul.

(c) Démontre que les triangles SHA et SHB sont égaux, en écrivant les sommets dans l'ordre des homologues.

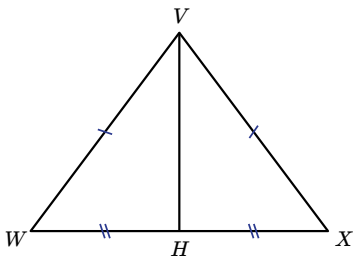
(d) Déduis-en que H est le milieu de [AB], puis que (SH) est la médiatrice de [AB].

(e) Vrai ou faux : « Lina a trouvé la bonne conclusion, donc sa démonstration était juste. » Justifie.

7. *Démontrer puis en déduire*

À retenir : Je nomme les deux triangles. J'écris trois égalités justifiées et je vérifie le cas. Puis j'écris les homologues dans l'ordre : si ABC et DEF sont égaux, alors $BC = EF$. Jamais entre éléments non homologues, jamais avec ce qu'on veut démontrer.

Ex. 43 ★☆☆ **Une justification pour chaque égalité** — Le triangle VWX est isocèle en V et H est le milieu de [WX] (codages). On compare les triangles VHW et VHX.



(a) Quelle justification donnes-tu pour l'égalité VW = VX ?

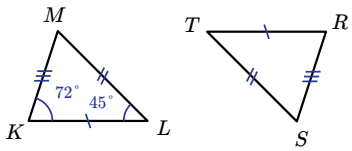
(b) Quelle justification donnes-tu pour l'égalité HW = HX ?

(c) Quel côté est commun aux triangles VHW et VHX ?

(d) Quel cas d'égalité s'applique aux triangles VHW et VHX ? Écris la correspondance des sommets.

(e) Sans lire la figure, démontre que $\widehat{VHW} = 90°$.

Ex. 44 ★☆☆ **Homologues dans le bon ordre** — Sur la figure, les côtés des triangles KLM et RST sont codés égaux. On donne $\widehat{KLM} = 45°$ et $\widehat{LKM} = 72°$.



(a) Quel cas d'égalité permet d'affirmer que les triangles KLM et RST sont égaux ? Justifie.

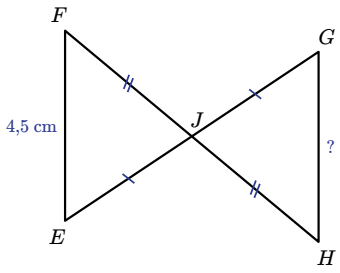
(b) Écris l'égalité de ces deux triangles avec les sommets homologues dans le même ordre, en commençant par KLM.

(c) Récris cette égalité en commençant par le triangle MKL.

(d) Nina écrit : « donc $\widehat{LKM} = \widehat{TSR}$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Calcule $\widehat{RST}$ en justifiant.

Ex. 45 ★★☆ **Des triangles égaux à des droites parallèles** — Les segments [EG] et [FH] se coupent en J. J est le milieu de [EG] et le milieu de [FH] (codages), et EF = 4,5 cm. On veut démontrer que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.



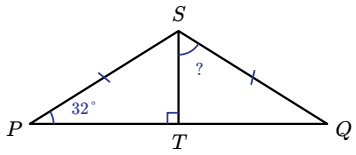
(a) Complète : « Dans les triangles EJF et GJH : • JE = JG car … ; • JF = JH car … ; • $\widehat{EJF} =$ ⌒ car … D'après le … cas, les triangles EJF et … sont égaux. »

(b) Vérifie que l'angle utilisé est bien compris entre les deux côtés égaux, puis donne GH et l'angle égal à $\widehat{JEF}$.

(c) Démontre que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

(d) Tom écrit : « $\widehat{JEF} = \widehat{JGH}$ car (EF) // (GH) ». Pourquoi ce raisonnement n'est-il pas valable ici ?

Ex. 46 ★★☆ **Le poinçon de la charpente** — Sur ce plan de charpente, les chevrons [SP] et [SQ] ont la même longueur. Le poinçon [ST] est perpendiculaire à l'entrait [PQ] en T, avec T sur [PQ]. On donne $\widehat{SPQ} = 32°$.

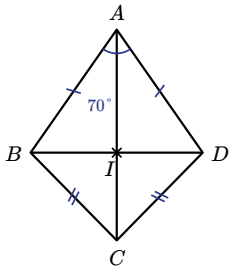


(a) Calcule $\widehat{SQP}$, puis $\widehat{PST}$ et $\widehat{QST}$, en justifiant chaque calcul.

(b) Gabin écrit : « SP = SQ, [ST] est commun et $\widehat{STP} = \widehat{STQ} = 90°$, donc les triangles sont égaux (deuxième cas) ». Pourquoi ne peut-il pas conclure ainsi ?

(c) Nomme les deux triangles à comparer, puis démontre que T est le milieu de [PQ].

Ex. 47 ★★★ **Le cerf-volant de Lina** — Lina fabrique un cerf-volant ABCD : AB = AD, CB = CD (codages) et $\widehat{BAD} = 70°$. Les baguettes [AC] et [BD] se coupent en I. On ne mesure rien sur la figure.



(a) Nomme deux triangles qui permettent de comparer $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAC}$. Démontre qu'ils sont égaux, en les écrivant dans l'ordre des homologues.

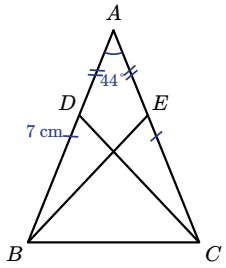
(b) Déduis-en que $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$, puis calcule $\widehat{BAC}$.

(c) Démontre que les triangles ABI et ADI sont égaux, puis déduis-en que IB = ID.

(d) Lucas écrit : « Les triangles ABI et ADI sont égaux, donc BI = AI. » Corrige son erreur, puis démontre que (AC) ⊥ (BD), même si la figure semble déjà le montrer.

(e) Calcule $\widehat{ABI}$ en justifiant.

Ex. 48 ★★★ **Une figure chargée dans un triangle isocèle** — ABC est isocèle en A avec AB = AC = 7 cm et $\widehat{BAC} = 44°$. D est sur [AB] et E sur [AC], avec AD = AE = 2,8 cm. On trace les segments [BE] et [CD].



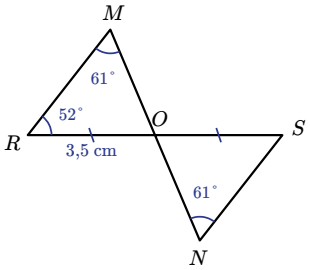
(a) Pour démontrer que BE = CD, Nina écrit : « AB = AC, AE = AD et $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$, donc ABE et ACD sont égaux (deuxième cas). » Trouve ses deux erreurs.

(b) Rédige une démonstration correcte : les triangles ABE et ACD sont égaux, écrits dans l'ordre des homologues. Déduis-en BE = CD et une égalité d'angles.

(c) Calcule DB et EC, puis $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, en justifiant.

(d) Choisis dans la figure deux triangles qui permettent de démontrer que $\widehat{DCB} = \widehat{EBC}$, puis fais la démonstration.

Ex. 49 ★★★ **Les croisillons du pont** — Sous le tablier d'un pont, deux barres se croisent en O. Les points M, O, N sont alignés, ainsi que R, O, S. On donne OR = OS = 3,5 cm, $\widehat{ORM} = 52°$ et $\widehat{OMR} = \widehat{ONS} = 61°$.



(a) Léo écrit : « OR = OS, $\widehat{ORM} = 52°$ et $\widehat{OMR} = \widehat{ONS}$, donc d'après le troisième cas, ORM et OSN sont égaux. » Pourquoi ne peut-il pas conclure ainsi ?

(b) Calcule $\widehat{ROM}$, puis $\widehat{SON}$ et $\widehat{OSN}$, en justifiant chaque calcul.

(c) Démontre que les triangles ORM et OSN sont égaux, en les écrivant dans l'ordre des homologues.

(d) Léo en déduit que OM = OS. Corrige-le, puis démontre que O est le milieu de [MN].

(e) Démontre que les droites (RM) et (SN) sont parallèles.