Quatrième / Triangles égaux : les cas d'égalité — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 5e : troisième angle, constructions, symétries*

Ex. 1 ★☆☆ Troisième angle et triangles particuliers

(a) Tom a oublié les parenthèses : il faut d'abord additionner les deux angles connus. $\widehat{RTS} = 180 - (38 + 57) = 180 - 95 = 85°$ (somme des angles d'un triangle : 180°).

(b) $\widehat{MNP} = 180 - (47{,}5 + 68{,}5) = 180 - 116 = 64°$ (somme des angles d'un triangle).

(c) L'angle de 52° est l'angle au sommet U. Les angles à la base, en V et en W, sont égaux : $\widehat{UVW} = (180 - 52) \div 2 = 128 \div 2 = 64°$.

(d) La base est [DF] : les angles en D et en F sont égaux, donc $\widehat{EFD} = 35°$. Puis $\widehat{DEF} = 180 - (35 + 35) = 180 - 70 = 110°$.

(e) GHK est équilatéral, donc chacun de ses angles mesure $180 \div 3 = 60°$: $\widehat{GKH} = 60°$.

Ex. 2 ★☆☆ Triangle constructible ou non ?

(a) $5 + 4 = 9$ et $11 > 9$: le plus grand côté est plus long que la somme des deux autres. Le triangle est impossible à construire.

(b) $5 + 3 = 8$: le plus grand côté est égal à la somme des deux autres. Les trois points sont alignés : le triangle est aplati, ce n'est pas un vrai triangle.

(c) Le plus grand côté mesure 7,1 cm et $5{,}4 + 3{,}7 = 9{,}1$. Comme $7{,}1 < 9{,}1$, on peut construire le triangle.

(d) $4{,}5 + 5 = 9{,}5$ et $10 > 9{,}5$: le triangle est impossible. Un croquis à main levée ne prouve rien, ce sont les longueurs qui comptent.

Ex. 3 ★★☆ Les données sont-elles bien placées ?

(a) Les côtés [AB] et [BC] ont pour extrémité commune B. Le sommet de $\widehat{ABC}$ est la lettre du milieu : B. L'angle est donc compris entre les deux côtés : on obtient un seul triangle (règle et rapporteur).

Ex. 3 (suite)

(b) Les côtés [DE] et [DF] ont pour extrémité commune D, mais le sommet de $\widehat{DEF}$ est E (lettre du milieu). L'angle n'est pas compris entre les deux côtés. À 3,5 cm de D, on peut placer F en deux points de l'autre côté de l'angle (EF ≈ 5,2 cm ou EF ≈ 2,4 cm) : on obtient deux triangles différents. Les données ne suffisent pas.

(c) Le sommet de $\widehat{HGJ}$ est G et celui de $\widehat{GHJ}$ est H : ce sont les deux extrémités de [GH]. Ces deux angles sont adjacents au côté connu, donc on obtient un seul triangle.

(d) $50 + 60 + 70 = 180$: ces angles conviennent, mais aucune longueur n'est donnée. On peut construire une infinité de triangles de même forme et de tailles différentes. Les données ne suffisent pas.

Ex. 4 ★★☆ Symétrique d'une pièce de puzzle

(a) La symétrie axiale conserve les longueurs et les angles : A'B' = AB = 3 cm, B'C' = BC = 4,5 cm, A'C' = AC = 3,5 cm et $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = 51°$.

(b) Périmètre de A'B'C' : $3 + 4{,}5 + 3{,}5 = 11$ cm. C'est aussi le périmètre de ABC.

(c) Non. Une symétrie axiale retourne la figure : sur le dessin, l'ordre des sommets A, B, C est inversé pour A', B', C'. Il faut retourner le calque pour superposer les deux triangles. Glisser ne suffit pas.

Ex. 5 ★★★ Plan de charpente : des angles en chaîne

(a) Yanis a oublié les parenthèses : il a calculé $180 - 56$ au lieu de diviser $180 - 112$ par 2. D'ailleurs, $124 + 112 > 180$: c'est impossible. ABC est isocèle en A et 112° est l'angle au sommet. Les angles à la base sont donc égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180 - 112) \div 2 = 68 \div 2 = 34°$.

(b) Le triangle ADC est isocèle en D (DA = DC). Ses angles à la base, de sommets A et C, sont donc égaux : $\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 34°$ (car $\widehat{DCA} = \widehat{ACB}$). Dans ADC, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{ADC} = 180 - 2 \times 34 = 180 - 68 = 112°$.

Ex. 5 **(suite)**

(c) D est sur [BC], donc [AD] partage l'angle $\widehat{BAC}$: $\widehat{BAD} = 112 - 34 = 78°$. Dans le triangle ABD, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{ADB} = 180 - (34 + 78) = 180 - 112 = 68°$. Vérification : $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 68 + 112 = 180°$, car B, D et C sont alignés.

(d) Faux. Les angles du triangle ABD mesurent 34°, 78° et 68° : aucun n'est égal à un autre. Or un triangle isocèle a deux angles à la base égaux.
Donc ABD n'est pas isocèle.

Ex. 6 ★★★ **Les voiles d'Inès**

(a) Non. Le plus grand côté est RS = 7,5 cm et 3,2 + 4,3 = 7,5 cm. Le plus grand côté est égal à la somme des deux autres, donc R, S et T sont alignés : le triangle est aplati et ce n'est pas une voile.

(b) Le sommet de l'angle $\widehat{TRS}$ est R (la lettre du milieu). Or les côtés [RT] et [ST] ont pour extrémité commune T : l'angle de 55° n'est pas compris entre eux. Avec ces données, on peut obtenir deux voiles différentes. Inès aurait dû donner l'angle $\widehat{RTS}$, de sommet T.

(c) RST est isocèle en S (RS = ST) et son angle au sommet est $\widehat{RST} = 60°$. Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{SRT} = \widehat{STR} = (180 - 60) \div 2 = 120 \div 2 = 60°$. Les angles en R et en S sont égaux, donc RST est aussi isocèle en T : TR = TS = 5 cm. La voile est équilatérale et RT = 5 cm. Deux côtés et l'angle compris donnent une seule voile.

(d) Dans le triangle RST, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{RTS} = 180 - (48 + 62) = 180 - 110 = 70°$. L'angle de 62° est en R : il n'est pas adjacent à [ST]. Mais on connaît maintenant les deux angles adjacents à [ST], en S (48°) et en T (70°). On trace [ST], l'angle de 48° en S et l'angle de 70° en T : leurs côtés se coupent en un seul point R. On obtient une seule voile.

(e) Non. 95 + 90 = 185°, et 185° > 180°. Or la somme des trois angles d'un triangle vaut 180°, donc deux de ses angles ont une somme inférieure à 180°. Les côtés des deux angles tracés en S et en T ne se coupent pas : le triangle n'existe pas.

Ex. 7 ★★★ **Le cerf-volant de Noé**

(a) Dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{ABC} = 180 - (25 + 58) = 180 - 83 = 97°$.

Ex. 7 **(suite)**

(b) La symétrie d'axe (AC) laisse A et C à leur place et transforme B en D. Elle conserve les longueurs, donc AD = AB = 6 cm et CD = CB = 3 cm. Périmètre de ABCD : 6 + 3 + 3 + 6 = 18 cm.

(c) La symétrie d'axe (AC) transforme l'angle $\widehat{ABC}$ en $\widehat{ADC}$. Elle conserve les angles, donc $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 97°$. De même, $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} = 25°$. Donc $\widehat{BAD} = 25 + 25 = 50°$.

(d) La symétrie d'axe (AC) conserve les longueurs, donc AB = AD = 6 cm : ABD est isocèle en A. L'angle au sommet est $\widehat{BAD} = 50°$. Ses angles à la base, en B et en D, sont égaux : $\widehat{ABD} = (180 - 50) \div 2 = 130 \div 2 = 65°$.

(e) La symétrie d'axe (AC) conserve les angles : $\widehat{DCA} = \widehat{BCA} = 58°$, donc $\widehat{BCD} = 58 + 58 = 116°$. CB = CD = 3 cm, donc BCD est isocèle en C, d'angle au sommet 116° : $\widehat{CBD} = (180 - 116) \div 2 = 64 \div 2 = 32°$. Vérification : $\widehat{ABD} + \widehat{CBD} = 65 + 32 = 97° = \widehat{ABC}$.

2. *Triangles égaux et éléments homologues*

Ex. 8 ★★★ **Automatismes — Compléter des égalités dans le bon ordre**

(a) Les triangles KLM et RTS sont égaux, et les sommets sont écrits dans l'ordre des homologues : K ↔ R, L ↔ T, M ↔ S.

(b) K ↔ R et L ↔ T, donc [KL] a pour homologue [RT] : RT = KL = 5,4 cm
(et non RS).

(c) R ↔ K et S ↔ M, donc [RS] a pour homologue [KM] : RS = KM.

(d) L'angle $\widehat{KML}$ a pour sommet M, dont l'homologue est S ; K ↔ R et L ↔ T.
Donc $\widehat{RST} = \widehat{KML} = 48°$.

(e) K ↔ R, L ↔ T, M ↔ S, donc $\widehat{LKM} = \widehat{TRS}$ et $\widehat{KLM} = \widehat{RTS}$.

Ex. 9 ★★★ **Automatismes — Trouver les homologues d'un triangle retourné**

(a) De N partent [NP] (4 cm, un trait) et [NQ] (5 cm, deux traits). Dans HIJ, le côté à un trait [HJ] et le côté à deux traits [IJ] partent de J.
Donc N ↔ J.

Ex. 9 **(suite)**

(b) De P partent [PN] (4 cm, un trait) et [PQ] (6,5 cm, trois traits). Dans HIJ, [HJ] (un trait) et [HI] (trois traits) partent de H.
Donc P $\leftrightarrow$ H.

(c) N $\leftrightarrow$ J et P $\leftrightarrow$ H, donc il reste Q $\leftrightarrow$ I. Les triangles NPQ et JHI sont égaux
(et non HIJ : le triangle est retourné, l'ordre alphabétique trompe).

(d) P $\leftrightarrow$ H et Q $\leftrightarrow$ I, donc [PQ] a pour homologue [HI] : HI = 6,5 cm. [PQ] fait face à l'angle $\widehat{PNQ}$, de sommet N ; son homologue a pour sommet J : c'est $\widehat{HJI}$, l'angle qui fait face à [HI].

Ex. 10 ★★☆ **Les pièces du puzzle de Malo**

(a) Malo a associé les sommets dans l'ordre alphabétique (B $\leftrightarrow$ A, O $\leftrightarrow$ C, R $\leftrightarrow$ E) au lieu de regarder les côtés. L'angle droit O a pour homologue l'angle droit A. De B partent les côtés à un trait et à trois traits ; dans ACE, ils partent de E : B $\leftrightarrow$ E. Il reste R $\leftrightarrow$ C.
Donc les triangles BOR et EAC sont égaux, et BO = EA = 4,8 cm
(alors que AC = OR = 3,6 cm).

(b) Périmètre de BOR : $4{,}8 + 3{,}6 + 6 = 14{,}4$ cm. Aire de BOR (rectangle en O) : $4{,}8 \times 3{,}6 \div 2 = 8{,}64$ cm². Les triangles BOR et EAC sont égaux, donc superposables : la pièce ACE a aussi un périmètre de 14,4 cm et une aire de 8,64 cm².

(c) R $\leftrightarrow$ C, B $\leftrightarrow$ E et O $\leftrightarrow$ A, donc l'homologue de $\widehat{ORB}$ est $\widehat{ACE}$. Dans BOR : $\widehat{ORB} \approx 180° - (90° + 37°) = 53°$.
Donc $\widehat{ACE} \approx 53°$.

Ex. 11 ★★☆ **Les voiles de Lou : même aire, triangles égaux ?**

(a) Aire de FHT : $6 \times 2 \div 2 = 6$ cm². Aire de MZS : $4 \times 3 \div 2 = 6$ cm². Les deux voiles ont la même aire.

(b) Non. Si les triangles étaient égaux, le seul angle droit de FHT (en H) aurait pour homologue le seul angle droit de MZS (en Z). Les côtés qui partent de H (6 cm et 2 cm) seraient alors de même longueur que ceux qui partent de Z (4 cm et 3 cm) : c'est faux. Les voiles ne sont donc pas superposables. C'est un contre-exemple : la même aire ne suffit pas pour que deux triangles soient égaux.

Ex. 11 **(suite)**

(c) Par exemple, le triangle équilatéral de côtés 4 cm, 4 cm, 4 cm ($4 + 4 + 4 = 12$ cm) et le triangle de côtés 3 cm, 4 cm, 5 cm ($3 + 4 + 5 = 12$ cm). On peut les construire : $4 < 4 + 4$ et $5 < 3 + 4$. Ils ne sont pas égaux, car le second a un côté de 3 cm et le premier n'en a pas : le même périmètre ne suffit pas non plus.

Ex. 12 ★★★ **Le cerf-volant de Yanis**

(a) Dans les triangles VEN et VLN : • VE = VL = 3,25 cm (donnée) ; • EN = LN = 9,25 cm (donnée) ; • VN = VN (côté commun). D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les deux triangles sont égaux. De E partent les côtés de 3,25 cm et de 9,25 cm. Dans l'autre triangle, ils partent de L, donc E $\leftrightarrow$ L. De même, V $\leftrightarrow$ V et N $\leftrightarrow$ N. On écrit : les triangles VEN et VLN sont égaux.

(b) Léna a associé V $\leftrightarrow$ N et E $\leftrightarrow$ L. Or le sommet V est commun aux deux triangles : son homologue est V lui-même, et non N. Elle compare donc deux côtés qui ne sont pas homologues : VE = 3,25 cm alors que NL = 9,25 cm. Correction : les triangles VEN et VLN sont égaux, donc VE = VL
(et EN = LN).

(c) Les triangles VEN et VLN sont égaux (V $\leftrightarrow$ V, E $\leftrightarrow$ L, N $\leftrightarrow$ N). Les angles homologues ont donc la même mesure : $\widehat{LVN} = \widehat{EVN} = 67°$ et $\widehat{LNV} = \widehat{ENV} = 19°$. Dans le triangle VLN, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{VLN} = 180° - (67° + 19°) = 94°$.

(d) $\widehat{EVL} = \widehat{EVN} + \widehat{NVL} = 67° + 67° = 134°$. Périmètre de VENL : VE + EN + NL + LV = 3,25 + 9,25 + 9,25 + 3,25 = 25 cm.

Ex. 13 ★★★ **Les équerres de menuisier de Sacha**

(a) Le triangle RST est rectangle en T. La somme de ses angles vaut 180°, donc $\widehat{TSR} = 180° - (90° + 55°) = 35°$.

(b) Dans les triangles EFG et STR : • EF = ST = 6 cm (donnée) ; • $\widehat{FEG} = \widehat{TSR} = 35°$ (donnée et question précédente) ; • $\widehat{EFG} = \widehat{STR} = 90°$ (les deux triangles sont rectangles). Le côté [EF] est compris entre les angles en E et en F. Le côté [ST] est compris entre les angles en S et en T. D'après le troisième cas d'égalité (un côté et ses deux angles adjacents), les triangles EFG et STR sont égaux (E $\leftrightarrow$ S, F $\leftrightarrow$ T, G $\leftrightarrow$ R). Attention : l'angle de 55° en R n'est pas adjacent à [ST], d'où le calcul du troisième angle.

Ex. 13 **(suite)**

(c) Les triangles EFG et STR sont égaux. [FG] fait face à l'angle en E et [TR] fait face à l'angle homologue en S : RT = FG = 4,2 cm. [EG] et [SR] sont homologues : RS = EG = 7,3 cm. L'angle en G a pour homologue l'angle en R : $\widehat{EGF} = \widehat{SRT} = 55°$.

(d) Deux triangles égaux ont le même périmètre et la même aire. Périmètre de RST : 6 + 4,2 + 7,3 = 17,5 cm. RST est rectangle en T, ses côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 4,2 cm. Aire : 6 × 4,2 ÷ 2 = 12,6 cm².

(e) Non. UVW a bien un périmètre de 5 + 5,5 + 7 = 17,5 cm, comme RST. Mais les côtés de RST mesurent 6 cm, 4,2 cm et 7,3 cm, et UVW n'a aucun côté de 6 cm. Les deux triangles ne sont donc pas superposables. Avoir le même périmètre ne suffit pas pour que deux triangles soient égaux.

Ex. 14 ★★★ **Les barres croisées du pont de Maëlys**

(a) Dans les triangles OFH et OCB : • OF = OC = 4,5 cm (donnée) ; • OH = OB = 6 cm (donnée) ; • $\widehat{FOH} = \widehat{COB}$ (angles opposés par le sommet). L'angle $\widehat{FOH}$ est compris entre [OF] et [OH]. L'angle $\widehat{COB}$ est compris entre [OC] et [OB]. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles OFH et OCB sont égaux
(O ↔ O, F ↔ C, H ↔ B).

(b) De F partent [FO] (4,5 cm, un trait) et [FH]. Dans l'autre triangle, le côté de 4,5 cm [OC] part de C, donc F ↔ C. De H part [HO] (6 cm, deux traits) ; dans l'autre triangle, [OB] part de B, donc H ↔ B. Enfin O ↔ O. L'écriture correcte est « FHO et CBO sont égaux ». « FHO et BCO » associe F ↔ B (ordre alphabétique, c'est faux) et « HFO et CBO » associe H ↔ C (c'est faux aussi). Comme B ↔ H, on a $\widehat{OBC} = \widehat{OHF}$.

(c) Dans le triangle OFH, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{OHF} = 180° - (65° + 70°) = 45°$. Les triangles OFH et OCB sont égaux (O ↔ O, F ↔ C, H ↔ B), donc : $\widehat{COB} = \widehat{FOH} = 65°$; $\widehat{OCB} = \widehat{OFH} = 70°$; $\widehat{OBC} = \widehat{OHF} = 45°$.

(d) Les angles $\widehat{OFH}$ et $\widehat{OCB}$ sont formés par les droites (FH) et (BC) avec la sécante (FC). Ils sont alternes-internes. Or ils sont égaux (70°, d'après les triangles égaux). Comme deux droites qui forment avec une sécante des angles alternes-internes égaux sont parallèles, les droites (FH) et (BC) sont parallèles.

Ex. 14 **(suite)**

(e) Le côté [FH] fait face à l'angle $\widehat{FOH}$. Le côté [BC] fait face à l'angle $\widehat{COB}$, qui est son homologue (O ↔ O). Donc [FH] et [BC] sont des côtés homologues, et FH = BC.

3. *Cas d'égalité : trois côtés*

Ex. 15 ★☆☆ **Ranger les longueurs pour comparer**

(a) ABC : 4 cm ; 6 cm ; 7 cm. DEF : 4 cm ; 6 cm ; 7 cm. Les trois longueurs sont les mêmes : d'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles sont égaux. De A partent 4 cm et 7 cm, comme de E ; de B partent 4 cm et 6 cm, comme de F ;
Donc les triangles ABC et EFD sont égaux
(A ↔ E, B ↔ F, C ↔ D).

(b) GHI : 5,2 cm ; 7,6 cm ; 8 cm. JKL : 5,2 cm ; 7,06 cm ; 8 cm. Or 7,06 cm ≠ 7,6 cm. Des triangles égaux ont les mêmes longueurs, donc les triangles GHI et JKL ne sont pas égaux.

(c) On convertit en cm : MN = 4,5 cm et ST = 6 cm. MNP : 3,8 cm ; 4,5 cm ; 6 cm. RST : 3,8 cm ; 4,5 cm ; 6 cm. D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles sont égaux : les triangles MNP et TRS sont égaux
(M ↔ T, N ↔ R, P ↔ S).

(d) UVW : 5 cm ; 7 cm ; 9,5 cm. XYZ : 5 cm ; 7,5 cm ; 9,5 cm. Or 7 cm ≠ 7,5 cm. Des triangles égaux ont les mêmes longueurs, donc les triangles UVW et XYZ ne sont pas égaux.

Ex. 16 ★☆☆ **Des codages aux sommets homologues**

(a) KL = TS (un trait), KM = TR (deux traits), LM = SR (trois traits).

(b) D'après les codages : KL = TS, KM = TR et LM = SR. Les trois côtés de KLM ont la même longueur que les trois côtés de RTS : d'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les deux triangles sont égaux.

(c) De K partent les côtés à un trait et à deux traits, comme de T : K ↔ T. De L partent les côtés à un trait et à trois traits, comme de S : L ↔ S. Il reste M ↔ R.

(d) Les triangles KLM et TSR sont égaux.

(e) $\widehat{LKM} = \widehat{STR}$ et $\widehat{KLM} = \widehat{TSR}$
(ce sont des angles homologues).

Ex. 17 ★★☆ **Le cerf-volant de Lina**

(a) AD = 300 mm = 30 cm et CD = 500 mm = 50 cm.

(b) Dans les triangles ABC et ADC : • AB = AD = 30 cm (données, après conversion) ; • CB = CD = 50 cm (données, après conversion) ; • [AC] est un côté commun. D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles ABC et ADC sont égaux (A ↔ A, B ↔ D, C ↔ C).

(c) Les triangles ABC et ADC sont égaux et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAC}$ sont homologues (sommet A, entre le côté commun et le côté de 30 cm). Donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$: la baguette [AC] partage l'angle $\widehat{BAD}$ en deux angles égaux.

Ex. 18 ★★☆ **L'erreur de Noé**

(a) EFG : 3,5 cm ; 4,8 cm ; 6,5 cm. PQR : 3,5 cm ; 4,8 cm ; 6,5 cm. Les trois longueurs sont les mêmes : d'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles sont égaux.

(b) De E partent 3,5 cm et 4,8 cm, comme de P : E ↔ P. De F partent 3,5 cm et 6,5 cm, comme de R : F ↔ R. De G partent 6,5 cm et 4,8 cm, comme de Q : G ↔ Q. Les triangles EFG et PRQ sont égaux.

(c) Non. Noé a écrit les sommets dans le mauvais ordre. EF = 3,5 cm alors que PQ = 4,8 cm : EF ≠ PQ. Le côté homologue de [EF] est [PR], donc EF = PR. L'angle $\widehat{EFG}$ (sommet F) est homologue de $\widehat{PRQ}$ (sommet R), pas de $\widehat{PQR}$. Correction : EF = PR et $\widehat{EFG} = \widehat{PRQ}$.

(d) Je convertis : XY = 48 mm = 4,8 cm. Je range les longueurs. XYZ : 3,5 cm ; 4,8 cm ; 6,05 cm. EFG : 3,5 cm ; 4,8 cm ; 6,5 cm. Or 6,05 cm ≠ 6,5 cm : la plus grande longueur n'est pas la même. Des triangles égaux ont les mêmes longueurs, donc les triangles EFG et XYZ ne sont pas égaux.

Ex. 19 ★★★ **La ferme de charpente de Yanis**

(a) SB = 2,4 m = 2,4 × 100 cm = 240 cm et HB = 1,8 m = 1,8 × 100 cm = 180 cm.

(b) Dans les triangles SAH et SBH : • SA = SB = 240 cm (données, après conversion) ; • AH = BH = 180 cm (données, après conversion) ; • [SH] est un côté commun aux deux triangles. D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles SAH et SBH sont égaux (S ↔ S, A ↔ B, H ↔ H).

Ex. 19 **(suite)**

(c) Les angles $\widehat{SHA}$ et $\widehat{SHB}$ sont homologues (sommet H ↔ H, entre les côtés homologues [HS] et [HA], [HS] et [HB]), donc $\widehat{SHA} = \widehat{SHB}$. Les points A, H et B sont alignés, donc $\widehat{SHA} + \widehat{SHB} = 180°$. Chaque angle mesure donc $180 \div 2 = 90°$: (SH) est perpendiculaire à (AB).

(d) Dans le triangle SAH, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{ASH} = 180° - (41° + 90°) = 49°$. Les angles $\widehat{ASH}$ et $\widehat{BSH}$ sont homologues, donc $\widehat{BSH} = 49°$. Comme [SH] est entre [SA] et [SB] : $\widehat{ASB} = 49° + 49° = 98°$.

Ex. 20 ★★★ **Les pièces de puzzle d'Inès**

(a) Dans les triangles RST et TUR : • RS = TU = 6,4 cm (donnée, même codage) ; • ST = UR = 4,5 cm (donnée, même codage) ; • [RT] est un côté commun aux deux triangles. D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles RST et TUR sont égaux (R ↔ T, S ↔ U, T ↔ R).

(b) Les angles $\widehat{SRT}$ et $\widehat{UTR}$ sont homologues (R ↔ T, S ↔ U, T ↔ R), donc $\widehat{SRT} = \widehat{UTR}$. Pour les droites (RS) et (TU) coupées par la sécante (RT), ces deux angles sont alternes-internes. Ils sont égaux, donc les droites (RS) et (TU) sont parallèles.

(c) Dans le triangle RST, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{RST} = 180° - (39° + 63°) = 78°$. Avec les homologues : $\widehat{TUR} = \widehat{RST} = 78°$ (S ↔ U) ; $\widehat{UTR} = \widehat{SRT} = 39°$ (R ↔ T) ; $\widehat{TRU} = \widehat{RTS} = 63°$ (T ↔ R).

(d) XZ = 70 mm = 7 cm. Longueurs rangées : XYZ : 4,5 cm ; 6,04 cm ; 7 cm et RST : 4,5 cm ; 6,4 cm ; 7 cm. Or 6,04 ≠ 6,4. Des triangles égaux ont les mêmes longueurs, donc les pièces XYZ et RST ne sont pas superposables : Malo a tort.

Ex. 21 ★★★ **Les gabarits de menuisier de Zoé**

(a) De B partent 5 cm et 6 cm, comme de P (NP = 5 cm, QP = 6 cm) : B ↔ P. De D partent 5 cm et 8 cm, comme de N (NP = 5 cm, NQ = 8 cm) : D ↔ N. De F partent 8 cm et 6 cm, comme de Q (NQ = 8 cm, QP = 6 cm) : F ↔ Q.

(b) Dans les triangles BDF et PNQ : • BD = PN = 5 cm (données) ; • DF = NQ = 8 cm (données) ; • BF = PQ = 6 cm (données). D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles BDF et PNQ sont égaux (B ↔ P, D ↔ N, F ↔ Q).

Ex. 21 (suite)

(c) Périmètre de BDF : $5 + 8 + 6 = 19$ cm ; périmètre de HIJ : $4 + 7 + 8 = 19$ cm. Les périmètres sont égaux. Longueurs rangées : BDF : 5 cm ; 6 cm ; 8 cm et HIJ : 4 cm ; 7 cm ; 8 cm. Elles ne sont pas les mêmes ; or des triangles égaux ont les mêmes longueurs, donc BDF et HIJ ne sont pas égaux. Le même périmètre ne suffit pas : Zoé a tort.

(d) Dans le triangle BDF, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{BFD} = 180° - (93° + 49°) = 38°$. Avec les homologues : $\widehat{NPQ} = \widehat{DBF} = 93°$ (B ↔ P) ; $\widehat{PNQ} = \widehat{BDF} = 49°$ (D ↔ N) ; $\widehat{PQN} = \widehat{BFD} = 38°$ (F ↔ Q).

4. *Cas d'égalité : un angle entre deux côtés*

Ex. 22 ★☆☆ **Repérer l'angle compris**

(a) Les côtés [TR] et [TS] ont pour extrémité commune T : c'est l'angle $\widehat{RTS}$.

(b) Le sommet est M : l'angle $\widehat{KML}$ est compris entre [MK] et [ML].

(c) Non. L'extrémité commune de [PQ] et [QU] est Q, alors que le sommet de $\widehat{QPU}$ est P. Cet angle est compris entre [PQ] et [PU].

(d) N doit être la lettre du milieu : $\widehat{VNB}$ (ou $\widehat{BNV}$).

(e) L'extrémité commune de [FE] et [FG] est F : c'est l'angle $\widehat{EFG}$. Il est codé droit, donc $\widehat{EFG} = 90°$.

Ex. 23 ★☆☆ **Le deuxième cas s'applique-t-il ?**

(a) Non. L'extrémité commune de [GH] et [HI] est H, mais l'angle connu a pour sommet G : il n'est pas compris entre ces deux côtés (même chose en J pour JKL). Deux côtés et un angle non compris ne suffisent pas.

(b) [AB] et [BC] ont pour extrémité commune B, et [DE] et [EF] ont pour extrémité commune E : il faut $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.

(c) Oui. L'angle droit en N est compris entre [NM] et [NP], et l'angle droit en T est compris entre [TU] et [TS]. On a MN = TU, NP = TS et $\widehat{MNP} = \widehat{UTS} = 90°$. D'après le deuxième cas d'égalité, les triangles MNP et UTS sont égaux (M ↔ U, N ↔ T, P ↔ S). Le second triangle est retourné.

Ex. 23 (suite)

(d) Oui. L'angle de 110° est compris entre [PO] et [PQ] dans OPQ, et entre [CZ] et [CB] dans BCZ. OP = CZ = 5,6 cm, PQ = CB = 3 cm et $\widehat{OPQ} = \widehat{ZCB} = 110°$. D'après le deuxième cas, les triangles OPQ et ZCB sont égaux (O ↔ Z, P ↔ C, Q ↔ B). Les angles $\widehat{OQP}$ et $\widehat{ZBC}$ sont homologues, donc $\widehat{CBZ} = 47°$.

Ex. 24 ★★☆ **Symétrie et angles opposés par le sommet**

(a) Dans les triangles OAB et OA'D : • OA = OA' (A' est le symétrique de A par rapport à O, donc O est le milieu de [AA']) ; • OB = OD (donnée) ; • $\widehat{AOB} = \widehat{A'OD}$ (angles opposés par le sommet). D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles OAB et OA'D sont égaux.

(b) O ↔ O, A ↔ A', B ↔ D. Les côtés [AB] et [A'D] sont homologues, donc A'D = AB = 3,5 cm.

(c) Non. Les triangles OAB et OA'D sont égaux, avec O ↔ O, A ↔ A' et B ↔ D. Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OA'D}$ sont donc homologues, et des angles homologues ont la même mesure : $\widehat{OAB} = \widehat{OA'D}$.

Ex. 25 ★★☆ **Le cerf-volant d'Inès**

(a) Dans les triangles ABC et ADC : • AB = AD = 3 cm (donnée) ; • AC = AC (côté commun) ; • $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = 40°$ (donnée), et cet angle est compris entre [AB] et [AC] d'un côté, entre [AD] et [AC] de l'autre. D'après le deuxième cas d'égalité, les triangles ABC et ADC sont égaux (A ↔ A, B ↔ D, C ↔ C). Le second est retourné par rapport à (AC).

(b) Avec A ↔ A, B ↔ D et C ↔ C, les côtés [CB] et [CD] sont homologues, donc CB = CD. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont homologues, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$. Enfin, $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 40° + 40° = 80°$.

(c) Non. Les côtés [EF] et [EG] ont pour extrémité commune E, mais l'angle connu a pour sommet G : il n'est pas compris entre ces deux côtés. Deux côtés et un angle non compris ne permettent pas d'appliquer le deuxième cas.

Ex. 26 ★★★ **Le pylône du pont à haubans**

(a) Dans les triangles PAI et PBI : • IA = IB (I est le milieu de [AB]) ; • PI = PI (côté commun) ; • $\widehat{PIA} = \widehat{PIB} = 90°$ ((PI) est perpendiculaire à (AB)). L'angle de sommet I est compris entre [IP] et [IA] dans PAI, et entre [IP] et [IB] dans PBI. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles PAI et PBI sont égaux (P ↔ P, A ↔ B, I ↔ I). Le second triangle est retourné par rapport au premier.

(b) Les côtés [PA] et [PB] sont homologues, donc PA = PB. La droite (PI) est perpendiculaire à [AB] en son milieu : c'est la médiatrice de [AB]. On a retrouvé la propriété : un point de la médiatrice d'un segment est à la même distance des deux extrémités de ce segment.

(c) Les angles $\widehat{PAI}$ et $\widehat{PBI}$ sont homologues, donc $\widehat{PBI} = 38°$. Dans le triangle PAI : $\widehat{API} = 180° - (90° + 38°) = 52°$. Les angles $\widehat{API}$ et $\widehat{BPI}$ sont homologues, donc $\widehat{BPI} = 52°$.
Donc $\widehat{APB} = 52° + 52° = 104°$.

(d) L'angle $\widehat{PAI}$ a pour sommet A : il est compris entre [AP] et [AI], et non entre les côtés [PI] et [PA] utilisés par Malo (leur extrémité commune est P). C'est un angle non compris, donc le deuxième cas ne s'applique pas. Il fallait utiliser IA = IB et l'angle droit de sommet I, compris entre [IP] et [IA].

Ex. 27 ★★★ **Le renfort de l'étagère**

(a) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et coupées par la sécante (BD). Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont alternes-internes, donc ils ont la même mesure.

(b) Dans les triangles ABD et CDB : • AB = CD = 6 cm (donnée) ; • BD = DB (côté commun) ; • $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ (angles alternes-internes, question précédente). L'angle de sommet B est compris entre [BA] et [BD], et celui de sommet D entre [DC] et [DB]. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles ABD et CDB sont égaux (A ↔ C, B ↔ D, D ↔ B).

(c) Première erreur, l'ordre des sommets : B correspond à D et D correspond à B, il faut donc écrire « ABD et CDB », pas « CBD ». Seconde erreur : [AD] est homologue de [CB], pas de [CD].
Donc AD = CB, et non AD = CD.

(d) Les côtés [AD] et [CB] sont homologues, donc AD = CB = 5 cm. Périmètre de ABCD : 6 + 5 + 6 + 5 = 22 cm.

Ex. 27 **(suite)**

(e) Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont homologues, donc ils ont la même mesure. Pour les droites (AD) et (BC) coupées par la sécante (BD), ce sont des angles alternes-internes. Ils ont la même mesure, donc (AD) // (BC).

Ex. 28 ★★★ **Les pièces du puzzle de Nora**

(a) Dans les triangles KLM et STR : • LK = TS = 3 cm (donnée) ; • LM = TR = 4,5 cm (donnée) ; • $\widehat{KLM} = \widehat{STR} = 90°$ (angles droits codés). L'angle de sommet L est compris entre [LK] et [LM], celui de sommet T entre [TS] et [TR]. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles KLM et STR sont égaux (K ↔ S, L ↔ T, M ↔ R). La pièce a été tournée.

(b) Les côtés [KM] et [SR] sont homologues, donc RS = KM ≈ 5,4 cm. Périmètre de RTS : 4,5 + 3 + 5,4 = 12,9 cm environ.

(c) Non. L'angle droit a pour sommet U : il est compris entre [UV] et [UW]. Or les deux côtés connus sont [UV] et [VW], dont l'extrémité commune est V. L'angle n'est pas compris entre ces deux côtés, donc le deuxième cas ne s'applique pas. De plus, ici le côté de 4,5 cm fait face à l'angle droit, alors que dans KLM il est un côté de l'angle droit : les données ne sont pas placées de la même façon. On ne peut pas conclure que les triangles sont égaux.

(d) Aire de KLM : $3 \times 4{,}5 \div 2 = 6{,}75$ cm². Aire de XYZ : $1{,}5 \times 9 \div 2 = 6{,}75$ cm². Les aires sont égales. Mais XY = 1,5 cm, et aucun côté de KLM ne mesure 1,5 cm (ses côtés mesurent 3 cm, 4,5 cm et environ 5,4 cm). Deux triangles égaux ont des côtés de mêmes longueurs, donc XYZ n'est pas égal à KLM. C'est un contre-exemple : avoir la même aire ne suffit pas.

5. *Cas d'égalité : un côté entre deux angles*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur le troisième cas**

(a) Faux. Les extrémités de [JN] sont J et N. L'angle $\widehat{JBN}$ a pour sommet B, donc il n'est pas adjacent à [JN]. Les angles adjacents à [JN] sont $\widehat{BJN}$ et $\widehat{BNJ}$.

Ex. 29 **(suite)**

(b) Faux. Trois angles égaux ne suffisent pas. Ces triangles existent, car $45^\circ + 55^\circ + 80^\circ = 180^\circ$. Contre-exemple : un triangle où le côté compris entre les angles de 45° et 55° mesure 4 cm, et un autre où ce côté mesure 8 cm. Les deux ont des angles de 45°, 55° et 80°, mais ils n'ont pas la même taille, donc ils ne sont pas superposables.

(c) Vrai. Dans les triangles EFG et CUX : • $EF = CU =$ 5,2 cm ; • $\widehat{FEG} = \widehat{UCX} = 47^\circ$; • $\widehat{EFG} = \widehat{CUX} = 105^\circ$. Ces angles sont aux deux extrémités de [EF] et de [CU]. D'après le troisième cas d'égalité (un côté compris entre deux angles), les triangles EFG et CUX sont égaux (E $\leftrightarrow$ C, F $\leftrightarrow$ U, G $\leftrightarrow$ X).

(d) Faux. L'angle de 42° a pour sommet S dans MSW et Y dans HYK, donc S $\leftrightarrow$ Y. L'angle de 76° a pour sommet W dans MSW et K dans HYK, donc W $\leftrightarrow$ K. Ainsi M $\leftrightarrow$ H. D'après le troisième cas, ce sont les triangles MSW et HYK qui sont égaux (M $\leftrightarrow$ H, S $\leftrightarrow$ Y, W $\leftrightarrow$ K).

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : d'abord le troisième angle**

(a) $\widehat{JKL} = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$. [JK] est compris entre des angles de 50° (en J) et de 60° (en K). [PR] est compris entre des angles de 50° (en P) et de 60° (en R). Comme JK = PR = 6 cm, d'après le troisième cas d'égalité, les triangles JKL et PRS sont égaux (J $\leftrightarrow$ P, K $\leftrightarrow$ R, L $\leftrightarrow$ S).

(b) $\widehat{TVU} = 180^\circ - (38^\circ + 97^\circ) = 45^\circ$ et $\widehat{FEH} = 180^\circ -$ $(38^\circ + 45^\circ) = 97^\circ$: Zoé a tort, l'angle de 97° est en E. [UV] est compris entre des angles de 38° (en U) et de 45° (en V). [FH] est compris entre des angles de 38° (en F) et de 45° (en H). Comme $UV = FH =$ 4,5 cm, d'après le troisième cas d'égalité, les triangles TUV et EFH sont égaux (T $\leftrightarrow$ E, U $\leftrightarrow$ F, V $\leftrightarrow$ H).

(c) $\widehat{CDN} = 180^\circ - (64^\circ + 58^\circ) = 58^\circ$ et $\widehat{QWY} = 180^\circ -$ $(64^\circ + 64^\circ) = 52^\circ$. [CD] est compris entre 64° et 58°, mais [QW] est compris entre 64° et 52°. Les angles de CDN (64°, 58°, 58°) ne sont pas ceux de QWY (64°, 64°, 52°). Les triangles ne sont donc pas superposables : ils ne sont pas égaux.

Ex. 31 ★★☆ **Le cerf-volant de Lina**

(a) Dans les triangles HGB et HDB : • [HB] est un côté commun ; • $\widehat{GHB} = \widehat{DHB} = 38^\circ$ (donnée) ; • $\widehat{GBH} =$ $\widehat{DBH} = 28^\circ$ (donnée). Ces deux angles sont aux extrémités H et B du côté [HB]. D'après le troisième cas d'égalité (un côté compris entre deux angles), les triangles HGB et HDB sont égaux (H $\leftrightarrow$ H, G $\leftrightarrow$ D, B $\leftrightarrow$ B).

(b) Les côtés [HG] et [HD] sont homologues (H $\leftrightarrow$ H, G $\leftrightarrow$ D), donc HD = HG = 32 cm.

(c) Non. [GB] relie G et B : son homologue relie D et B, c'est [DB]. On a donc GB = DB, et pas GB = HD.

(d) $\widehat{HDB} = 180^\circ - (38^\circ + 28^\circ) = 114^\circ$.

Ex. 32 ★★☆ **La croix de l'étagère**

(a) • IE = IL (I est le milieu de [EL]) ; • $\widehat{EIF} = \widehat{LIK}$ (angles opposés par le sommet) ; • $\widehat{IEF} = \widehat{ILK}$ (angles alternes-internes formés par les parallèles (EF) et (KL) avec la sécante (EL)).

(b) [IE] est compris entre les angles de sommets I et E, et [IL] entre les angles de sommets I et L. D'après le troisième cas d'égalité (un côté compris entre deux angles), les triangles IEF et ILK sont égaux (I $\leftrightarrow$ I, E $\leftrightarrow$ L, F $\leftrightarrow$ K).

(c) Les côtés [EF] et [LK] sont homologues (E $\leftrightarrow$ L, F $\leftrightarrow$ K), donc $KL = EF =$ 62,5 cm.

(d) Les angles égaux sont en E et en L, donc E $\leftrightarrow$ L, et F $\leftrightarrow$ K. Il faut écrire les sommets dans l'ordre des homologues : « les triangles IEF et ILK sont égaux ».

Ex. 33 ★★★ **Le pylône du pont à haubans**

(a) (PH) est perpendiculaire à (AB), donc $\widehat{PHA} = 90^\circ$. Dans le triangle PHA, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{APH} = 180^\circ - (90^\circ + 58^\circ) = 32^\circ$. Attention : l'angle de 58° est en A, il n'est pas adjacent au côté [PH]. C'est pour cela qu'on calcule d'abord l'angle en P.

(b) Dans les triangles PHA et PHB : • PH = PH (côté commun) ; • $\widehat{PHA} = \widehat{PHB} = 90^\circ$ ((PH) est perpendiculaire à (AB)) ; • $\widehat{APH} = \widehat{BPH} = 32^\circ$ (calcul de la question précédente et donnée). Ces deux angles sont aux deux extrémités du côté [PH]. D'après le troisième cas d'égalité (un côté compris entre deux angles), les triangles PHA et PHB sont égaux (P $\leftrightarrow$ P, H $\leftrightarrow$ H, A $\leftrightarrow$ B).

Ex. 33 **(suite)**

(c) Les côtés [HA] et [HB] sont homologues, donc HA = HB = 45 m. Les côtés [PA] et [PB] sont homologues, donc PA = PB = 85 m.

(d) H est sur [AB] et HA = HB, donc H est le milieu de [AB]. La droite (PH) est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu H de [AB] : c'est la médiatrice de [AB]. On le vérifie aussi avec PA = PB : le point P est à égale distance de A et de B.

Ex. 34 ★★★ **La pièce de puzzle de Sacha**

(a) Dans les triangles ABC et CDA : • AC = CA (côté commun) ; • $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 25°$ (donnée) ; • $\widehat{BCA} = \widehat{DAC} = 35°$ (donnée). Ces angles sont aux deux extrémités du côté [AC]. D'après le troisième cas d'égalité (un côté compris entre deux angles), les triangles ABC et CDA sont égaux (A ↔ C, B ↔ D, C ↔ A).

(b) Première erreur : l'ordre des sommets. L'angle de 25° est en A dans ABC et en C dans CDA, donc A ↔ C : il faut écrire « ABC et CDA ». Deuxième erreur : [BC] et [CD] ne sont pas homologues. Avec B ↔ D et C ↔ A, [BC] est homologue de [DA].
Donc DA = BC = 4,4 cm, et CD = AB = 6 cm (côtés homologues).

(c) Dans le triangle ABC : $\widehat{ABC} = 180° - (25° + 35°) = 120°$. Les sommets B et D sont homologues, donc $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 120°$.

(d) Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont alternes-internes pour les droites (AB) et (CD) avec la sécante (AC). Ils sont égaux, donc (AB) // (CD). De même, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{DAC}$ sont alternes-internes et égaux, donc (BC) // (AD). Le quadrilatère ABCD a ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme. Périmètre : 6 + 4,4 + 6 + 4,4 = 20,8 cm.

Ex. 35 ★★★ **La ferme de charpente de Rayan**

(a) ABC est isocèle en A, donc ses angles à la base sont égaux : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 65°$. Somme des angles : $\widehat{BAC} = 180° - 2 \times 65° = 50°$.

(b) Dans BMC : $\widehat{MBC} = 65°$, $\widehat{MCB} = 30°$, donc $\widehat{BMC} = 180° - (65° + 30°) = 85°$. Dans CNB : $\widehat{NCB} = 65°$, $\widehat{NBC} = 30°$, donc $\widehat{CNB} = 85°$. Les trois angles sont bien égaux. Mais trois angles égaux ne suffisent pas. Contre-exemple : deux triangles équilatéraux de côtés 2 cm et 5 cm ont tous leurs angles égaux à 60°, et ils ne sont pas égaux. Il faut aussi un côté.

Ex. 35 **(suite)**

(c) Dans les triangles BCM et CBN : • BC = CB (côté commun) ; • $\widehat{MBC} = \widehat{NCB} = 65°$ (angles à la base du triangle ABC isocèle en A) ; • $\widehat{BCM} = \widehat{CBN} = 30°$ (donnée, angles marqués). Ces angles sont aux deux extrémités du côté [BC]. D'après le troisième cas d'égalité (un côté compris entre deux angles), les triangles BCM et CBN sont égaux (B ↔ C, C ↔ B, M ↔ N).

(d) Les côtés [BM] et [CN] sont homologues, donc CN = BM = 3 m. ABC est isocèle en A, donc AC = AB = 7,1 m. AN = AC − CN = 7,1 − 3 = 4,1 m et AM = AB − BM = 7,1 − 3 = 4,1 m. AM = AN, donc le triangle AMN est isocèle en A.

(e) Vrai. Avec B ↔ C, C ↔ B et M ↔ N, le côté [CM] de BCM est homologue du côté [BN] de CBN.
Donc BN = CM.

6. *Ce qui ne suffit pas : contre-exemples*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : suffit ou ne suffit pas ?**

(a) Dans les triangles GHI et RST : • GH = RS (codage) ; • HI = ST (codage) ; • $\widehat{GHI} = \widehat{RST}$ (codage), et cet angle est compris entre [GH] et [HI], comme l'angle de sommet S entre [RS] et [ST]. Ça suffit : d'après le deuxième cas d'égalité, les triangles GHI et RST sont égaux (G ↔ R, H ↔ S, I ↔ T). Le triangle RST est retourné.

(b) Trois côtés égaux deux à deux : ça suffit (premier cas). De K partent 4,5 cm et 5,2 cm, comme de V ; de L partent 4,5 cm et 7 cm, comme de W.
Donc K ↔ V, L ↔ W, M ↔ U : les triangles KLM et VWU sont égaux.

(c) Ne suffit pas : 48 + 67 + 65 = 180, ces angles forment bien un triangle, mais il n'existe pas de cas « trois angles ». Les triangles ont la même forme et peuvent avoir des tailles différentes : ils ne sont pas forcément égaux.

(d) $\widehat{PQR} = 180° - (52° + 73°) = 55°$ et $\widehat{XYZ} = 180° - (52° + 73°) = 55°$. Le côté [PQ] est compris entre les angles de 52° et de 55°, comme [XY]. Ça suffit (troisième cas, après calcul du troisième angle) : les triangles PQR et XYZ sont égaux (P ↔ X, Q ↔ Y, R ↔ Z).

Ex. 36 **(suite)**

(e) Ne suffit pas. $\widehat{EFG} = 180° - (45° + 80°) = 55°$: les angles adjacents à [EF] mesurent 45° et 55°, alors que ceux qui sont adjacents à [JK] mesurent 45° et 80°. Le côté de 5 cm n'est pas placé de la même façon : [EF] et [JK] ne sont pas homologues.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : même aire, mais égaux ?**

(a) $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{6 \times 2}{2} = 6$ cm².

(b) $\mathcal{A}_{DEF} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ cm².

(c) Non. ABC a un côté de 6 cm, alors que les côtés de DEF mesurent 4 cm, 3 cm et 5 cm : aucun ne mesure 6 cm. Les triangles ne sont pas superposables, donc ils ne sont pas égaux, même s'ils ont la même aire.

(d) … pas forcément égaux : ABC et DEF ont la même aire, mais ne sont pas égaux.

(e) … pas égaux : deux triangles égaux ont toujours le même périmètre. Ici, les périmètres sont différents, donc les triangles ne peuvent pas être égaux.

Ex. 38 ★★☆ **La pièce de puzzle d'Inès**

(a) [AB] est un côté commun : AB = 7 cm. C et D sont sur le même côté de l'angle de sommet A, donc $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 40°$. C et D sont sur le cercle de centre B et de rayon 5 cm, donc BC = BD = 5 cm.

(b) Sur la construction, on mesure AC ≈ 3,2 cm et AD ≈ 7,5 cm. Ces longueurs sont différentes : les triangles ABC et ABD ne sont pas superposables, donc ils ne sont pas égaux. C'est un contre-exemple.

(c) L'angle de 40° a pour sommet A. Il n'est pas compris entre [AB] et [BC], dont l'extrémité commune est B. Deux côtés et un angle non compris ne suffisent pas : on a construit deux triangles différents. Correction : on peut donner AC = 3,2 cm à la place de BC. L'angle en A est alors compris entre [AB] et [AC], et d'après le deuxième cas, la pièce est unique.

Ex. 39 ★★☆ **Les équerres de menuisier de Tom**

(a) Les angles sont bien égaux deux à deux : deux angles donnés par Ben, plus les angles droits en P et en C. Mais il n'existe pas de cas d'égalité « trois angles ». Trois angles égaux donnent la même forme, pas forcément la même taille.

Ex. 39 **(suite)**

(b) Non. Le plus petit côté de NPQ mesure 3 cm, et BCD n'a aucun côté de 3 cm (ses côtés mesurent 6 cm, 8 cm et 10 cm). Les triangles ne sont pas superposables : ils ne sont pas égaux.

(c) $\mathcal{P}_{NPQ} = 3 + 4 + 5 = 12$ cm.

(d) Par exemple, un triangle équilatéral de côté 4 cm : $4 + 4 + 4 = 12$ cm. On peut le construire, car $4 < 4 + 4$. Il n'a aucun côté de 3 cm, donc il n'est pas égal à NPQ : avoir le même périmètre ne suffit pas.

Ex. 40 ★★★ **Le plan de toit de Maëlle**

(a) La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Dans ABC : $\widehat{BAC} = 180 - (50 + 70) = 60°$. Dans DEF : $\widehat{DFE} = 180 - (50 + 70) = 60°$.

(b) Le troisième cas demande un côté et ses deux angles adjacents. Dans ABC, [BC] est compris entre les angles de 50° (en B) et de 70° (en C). Dans DEF, [EF] est compris entre les angles de 50° (en E) et de 60° (en F). L'angle de 70° est en D : il n'est pas adjacent à [EF]. Le côté de 6 cm n'est pas placé de la même façon : il fait face à l'angle de 60° dans ABC, mais à l'angle de 70° dans DEF. Le troisième cas ne s'applique pas.

(c) Les angles homologues seraient égaux. Chaque triangle a des angles de 50°, 60° et 70°, tous différents, donc on aurait A ↔ F (60°), B ↔ E (50°) et C ↔ D (70°). Le côté homologue à [BC] serait [ED].

(d) Sur la construction, on mesure DE ≈ 5,5 cm. Si les triangles étaient égaux, on aurait DE = BC = 6 cm, puisque [ED] et [BC] seraient homologues. Or DE ≈ 5,5 cm ≠ 6 cm : les triangles ABC et DEF ne sont pas égaux. C'est un contre-exemple : un côté et deux angles égaux, mais placés différemment, ne suffisent pas.

(e) Dans GHI : $\widehat{GIH} = 180 - (50 + 60) = 70°$ (somme des angles). Dans les triangles ABC et GHI : • BC = HI = 6 cm (données) ; • $\widehat{ABC} = \widehat{GHI} = 50°$ (données) ; • $\widehat{ACB} = \widehat{GIH} = 70°$ (donnée et calcul). Le côté [BC] est compris entre les angles en B et en C, et [HI] entre les angles en H et en I. D'après le troisième cas d'égalité (un côté et ses deux angles adjacents), les triangles ABC et GHI sont égaux (A ↔ G, B ↔ H, C ↔ I). Les côtés [AC] et [GI] sont homologues, donc AC = GI.

Ex. 41 ★★★ **Les voiles de Yanis**

(a) Périmètre de KLM : $4 + 4{,}2 + 5{,}8 = 14$ cm. Périmètre de RTS : $5{,}6 + 3{,}4 + 5 = 14$ cm. Les deux voiles ont le même périmètre.

(b) KLM est rectangle en L : aire $= 4 \times 4{,}2 \div 2 = 8{,}4$ cm². RTS a pour base [RT] et pour hauteur [SH] : aire $= 5{,}6 \times 3 \div 2 = 8{,}4$ cm². Les deux voiles ont la même aire.

(c) Non. Deux triangles égaux ont leurs trois côtés égaux deux à deux. Le plus long côté de KLM mesure 5,8 cm, celui de RTS 5,6 cm, et aucun côté de RTS ne mesure 5,8 cm. Les triangles KLM et RTS ne sont donc pas égaux. C'est un contre-exemple : même périmètre et même aire ne suffisent pas.

(d) « Pas égaux » veut dire qu'on est sûr qu'ils ne se superposent pas. « Pas forcément égaux » veut dire que la donnée ne permet pas de conclure : ils peuvent être égaux ou non. Exemple 1 : KLM et son symétrique par une symétrie axiale ont la même aire et sont égaux, car la symétrie conserve les longueurs. Exemple 2 : KLM et RTS ont la même aire, mais ne sont pas égaux. Ben a donc raison.

(e) Dans les triangles UVW et KLM : • UV = KL = 4 cm (donnée) ; • $\widehat{UVW} = \widehat{KLM} = 90°$ (triangles rectangles en V et en L) ; • VW = LM = 4,2 cm (donnée). L'angle droit en V est compris entre [VU] et [VW], et l'angle droit en L entre [LK] et [LM]. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles UVW et KLM sont égaux (U ↔ K, V ↔ L, W ↔ M). Les côtés [UW] et [KM] sont homologues, donc UW = KM = 5,8 cm.

Ex. 42 ★★★ **Les haubans du pont de Lina**

(a) Dans SHA, les côtés [SA] et [SH] ont pour extrémité commune S. L'angle compris entre eux est $\widehat{ASH}$, et non l'angle droit en H. Lina utilise donc deux côtés et un angle non compris : ce n'est pas un cas d'égalité.

(b) SA = SB, donc le triangle SAB est isocèle en S, et ses angles à la base sont égaux : $\widehat{SBA} = \widehat{SAB} = 52°$. Dans SHA, rectangle en H : $\widehat{ASH} = 180 - (90 + 52) = 38°$ (somme des angles). Dans SHB, rectangle en H : $\widehat{BSH} = 180 - (90 + 52) = 38°$.

Ex. 42 **(suite)**

(c) Dans les triangles SHA et SHB : • SA = SB (donnée) ; • $\widehat{ASH} = \widehat{BSH} = 38°$ (question précédente) ; • SH = SH (côté commun). L'angle en S est compris entre [SA] et [SH] dans SHA, et entre [SB] et [SH] dans SHB. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles SHA et SHB sont égaux (S ↔ S, H ↔ H, A ↔ B).

(d) Les côtés [HA] et [HB] sont homologues, donc HA = HB. Comme H est sur [AB], H est le milieu de [AB]. La droite (SH) est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu H de [AB] : c'est la médiatrice de [AB].

(e) Faux. La conclusion est vraie, mais la justification de Lina ne l'est pas : l'angle droit en H n'est pas compris entre [SA] et [SH], et « deux côtés et un angle non compris » n'est pas un cas d'égalité. Une conclusion juste ne rend pas juste un raisonnement faux. Il fallait utiliser un vrai cas : ici, l'angle en S compris entre [SA] et [SH].

7. *Démontrer puis en déduire*

Ex. 43 ★☆☆ **Une justification pour chaque égalité**

(a) VW = VX car le triangle VWX est isocèle en V (donnée, codée sur la figure).

(b) HW = HX car H est le milieu de [WX].

(c) Le côté [VH] est commun aux deux triangles.

(d) Les trois côtés sont égaux deux à deux : d'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles VHW et VHX sont égaux (V ↔ V, H ↔ H, W ↔ X).

(e) Les angles $\widehat{VHW}$ et $\widehat{VHX}$ sont homologues, donc ils sont égaux. Les points W, H et X sont alignés, donc $\widehat{VHW} + \widehat{VHX} = 180°$. Chaque angle mesure donc $180° \div 2 = 90°$: $\widehat{VHW} = 90°$. On ne le « voit » pas sur la figure, on le démontre.

Ex. 44 ★☆☆ **Homologues dans le bon ordre**

(a) KL = RT, LM = TS et KM = RS (codages). D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les deux triangles sont égaux.

(b) Les triangles KLM et RTS sont égaux (K ↔ R, L ↔ T, M ↔ S).

(c) Les triangles MKL et SRT sont égaux.

(d) Non. Le sommet K a pour homologue R, et non S. L'angle homologue de $\widehat{LKM}$ est $\widehat{TRS}$, donc $\widehat{TRS} = 72°$.

Ex. 44 (suite)

e) Dans le triangle KLM : $\widehat{KML} = 180° - (45° + 72°) = 63°$. Comme M $\leftrightarrow$ S, l'angle $\widehat{RST}$ est l'homologue de $\widehat{KML}$, donc $\widehat{RST} = 63°$.

Ex. 45 ★★☆ Des triangles égaux à des droites parallèles

a) Dans les triangles EJF et GJH : • JE = JG car J est le milieu de [EG] ; • JF = JH car J est le milieu de [FH] ; • $\widehat{EJF} = \widehat{GJH}$ car ces angles sont opposés par le sommet. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles EJF et GJH sont égaux
(E $\leftrightarrow$ G, J $\leftrightarrow$ J, F $\leftrightarrow$ H).

b) L'angle $\widehat{EJF}$ a pour sommet J, extrémité commune de [JE] et [JF] : il est bien compris entre ces côtés. De même, $\widehat{GJH}$ est compris entre [JG] et [JH]. Comme E $\leftrightarrow$ G, J $\leftrightarrow$ J et F $\leftrightarrow$ H, les côtés [EF] et [GH] sont homologues, donc GH = EF = 4,5 cm. L'angle homologue de $\widehat{JEF}$ est $\widehat{JGH}$, donc $\widehat{JEF} = \widehat{JGH}$.

c) Les angles $\widehat{JEF}$ et $\widehat{JGH}$ sont alternes-internes : ils sont formés par les droites (EF) et (GH) et la sécante (EG). Ils sont égaux, donc les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

d) Tom se sert du parallélisme de (EF) et (GH) pour justifier son égalité. Or c'est justement ce qu'on veut démontrer : on ne peut pas l'utiliser comme justification. Il faut d'abord démontrer que les triangles sont égaux.

Ex. 46 ★★☆ Le poinçon de la charpente

a) Le triangle SPQ est isocèle en S (SP = SQ), donc ses angles à la base sont égaux : $\widehat{SQP} = 32°$. Dans le triangle SPT, rectangle en T : $\widehat{PST} = 180° - (90° + 32°) = 58°$. Dans le triangle SQT, rectangle en T : $\widehat{QST} = 180° - (90° + 32°) = 58°$.

b) L'angle compris entre [SP] et [ST] est l'angle de sommet S. L'angle droit, lui, est en T : il n'est pas compris entre les deux côtés. Avec deux côtés et un angle non compris, on ne peut pas conclure.

Ex. 46 (suite)

c) On compare les triangles SPT et SQT : • SP = SQ (donnée : les chevrons ont la même longueur) ; • $\widehat{SPT} = \widehat{SQT} = 32°$ (angles à la base du triangle isocèle SPQ) ; • $\widehat{PST} = \widehat{QST} = 58°$ (somme des angles). Le côté [SP] est compris entre les angles de sommets S et P, et [SQ] entre ceux de sommets S et Q. D'après le troisième cas d'égalité (un côté et ses deux angles adjacents), les triangles SPT et SQT sont égaux (S $\leftrightarrow$ S, P $\leftrightarrow$ Q, T $\leftrightarrow$ T). Les côtés [PT] et [QT] sont homologues, donc PT = QT. Comme T est sur [PQ], T est le milieu de [PQ].

Ex. 47 ★★★ Le cerf-volant de Lina

a) On compare les triangles ABC et ADC. • AB = AD (donnée) ; • CB = CD (donnée) ; • [AC] est un côté commun. D'après le premier cas d'égalité (trois côtés), les triangles ABC et ADC sont égaux
(A $\leftrightarrow$ A, B $\leftrightarrow$ D, C $\leftrightarrow$ C).

b) Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAC}$ sont homologues (A $\leftrightarrow$ A, B $\leftrightarrow$ D, C $\leftrightarrow$ C), donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$. Comme $\widehat{BAC} + \widehat{DAC} = \widehat{BAD} = 70°$, on obtient $\widehat{BAC} = 70° \div 2 = 35°$.

c) Dans les triangles ABI et ADI : • AB = AD (donnée) ; • $\widehat{BAI} = \widehat{DAI} = 35°$ (question précédente) ; • [AI] est un côté commun. L'angle de sommet A est compris entre les deux côtés. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles ABI et ADI sont égaux (A $\leftrightarrow$ A, B $\leftrightarrow$ D, I $\leftrightarrow$ I). Les côtés [IB] et [ID] sont homologues, donc IB = ID.

d) [BI] et [AI] ne sont pas homologues : [AI] est un côté commun, et [BI] a pour homologue [DI]. La bonne conclusion est BI = DI. Ensuite, les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AID}$ sont homologues, donc égaux. Comme B, I et D sont alignés, $\widehat{AIB} + \widehat{AID} = 180°$, donc chacun mesure 90° : (AC) $\perp$ (BD).

e) Dans le triangle ABI, la somme des angles vaut 180°, avec $\widehat{AIB} = 90°$ et $\widehat{BAI} = 35°$.
Donc $\widehat{ABI} = 180° - (90° + 35°) = 55°$.

Ex. 48 ★★★ **Une figure chargée dans un triangle isocèle**

(a) Première erreur : l'angle $\widehat{ABE}$ a pour sommet B. Il n'est pas compris entre [AB] et [AE] (l'angle compris est $\widehat{BAE}$), donc ces données ne forment pas un cas d'égalité. Seconde erreur : l'égalité $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ n'est pas une donnée. C'est une conséquence qu'on cherche, on ne peut pas s'en servir comme justification.

(b) Dans les triangles ABE et ACD : • AB = AC = 7 cm (donnée) ; • AE = AD = 2,8 cm (donnée) ; • $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ car c'est le même angle $\widehat{BAC}$ (44°), compris entre les deux côtés. D'après le deuxième cas d'égalité (un angle compris entre deux côtés), les triangles ABE et ACD sont égaux (A ↔ A, B ↔ C, E ↔ D). Les côtés [BE] et [CD] sont homologues, donc BE = CD. De même, les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{ACD}$ sont homologues, donc $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$.

(c) D est sur [AB], donc DB = AB − AD = 7 − 2,8 = 4,2 cm. De même, EC = AC − AE = 4,2 cm. ABC est isocèle en A, donc ses angles à la base sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180° - 44°) \div 2 = 68°$.

(d) On compare les triangles DBC et ECB. • DB = EC = 4,2 cm (question précédente) ; • $\widehat{DBC} = \widehat{ECB} = 68°$ (angles à la base du triangle isocèle ABC) ; chacun est compris entre les deux côtés ; • [BC] est un côté commun. D'après le deuxième cas d'égalité, les triangles DBC et ECB sont égaux (D ↔ E, B ↔ C, C ↔ B). Les angles $\widehat{DCB}$ et $\widehat{EBC}$ sont homologues, donc $\widehat{DCB} = \widehat{EBC}$.

Ex. 49 ★★★ **Les croisillons du pont**

(a) Le troisième cas demande un côté et ses deux angles adjacents. L'angle $\widehat{OMR}$ a pour sommet M : il n'est pas adjacent au côté [OR]. De même, $\widehat{ONS}$ n'est pas adjacent à [OS]. Il faut d'abord connaître les angles de sommets O et S.

(b) Dans le triangle ORM, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{ROM} = 180° - (52° + 61°) = 67°$. Les angles $\widehat{SON}$ et $\widehat{ROM}$ sont opposés par le sommet, donc $\widehat{SON} = 67°$. Dans le triangle OSN : $\widehat{OSN} = 180° - (67° + 61°) = 52°$.

Ex. 49 **(suite)**

(c) Dans les triangles ORM et OSN : • OR = OS = 3,5 cm (donnée) ; • $\widehat{ROM} = \widehat{SON} = 67°$ (opposés par le sommet) ; • $\widehat{ORM} = \widehat{OSN} = 52°$ (donnée et calcul). Le côté [OR] est compris entre les angles de sommets O et R, et le côté [OS] entre ceux de sommets O et S. D'après le troisième cas d'égalité (un côté et ses deux angles adjacents), les triangles ORM et OSN sont égaux
(O ↔ O, R ↔ S, M ↔ N).

(d) [OM] et [OS] ne sont pas homologues : l'homologue de [OM] est [ON], et celui de [OS] est [OR]. Les côtés [OM] et [ON] sont homologues, donc OM = ON. Comme M, O et N sont alignés, O est le milieu de [MN].

(e) Les angles $\widehat{ORM}$ et $\widehat{OSN}$ sont homologues, donc égaux (52°). Ils sont alternes-internes, formés par les droites (RM) et (SN) et la sécante (RS). Deux angles alternes-internes égaux donnent des droites parallèles : (RM) // (SN).