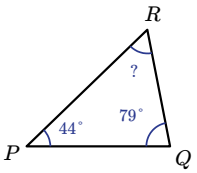
49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 4e : angles, triangles égaux, agrandissement*

À retenir : Angle qui manque : $180° - (a + b)$, avec les parenthèses. Agrandir ou réduire de coefficient k : toutes les longueurs $\times k$, l'aire $\times k^2$, les angles ne changent pas. Avoir les mêmes angles ne suffit pas pour que deux triangles soient égaux.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : l'angle qui manque** — Calcule l'angle demandé. Cite la propriété que tu utilises.

(a) Dans le triangle PQR, $\widehat{QPR} = 44°$ et $\widehat{PQR} = 79°$. Calcule $\widehat{PRQ}$.



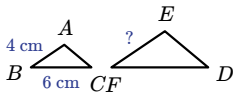
(b) Le triangle DEF est isocèle en D et $\widehat{EDF} = 36°$. Calcule $\widehat{DEF}$.

(c) Le triangle GHK est rectangle en H et $\widehat{HGK} = 31°$. Calcule $\widehat{HKG}$.

(d) Dans TUV, $\widehat{TUV} = 61°$ et $\widehat{TVU} = 53°$. Lina écrit : $\widehat{UTV} = 180 - 61 + 53 = 172°$. Corrige son calcul.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : agrandir ou réduire** — Réponds à chaque question en justifiant.

(a) Les côtés du triangle ABC mesurent AB = 4 cm, AC = 3,5 cm et BC = 6 cm. On l'agrandit de coefficient 1,6 et on obtient EFD (dans cet ordre). Calcule EF, ED et FD.



(b) Sur une figure, un segment de 8 cm devient un segment de 5 cm. Calcule k. Est-ce un agrandissement ou une réduction ?

(c) Un triangle a un angle de 54°. On le réduit de coefficient 0,75. Combien mesure l'angle qui lui correspond ?

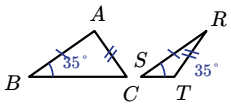
(d) L'aire d'un triangle vaut 12 cm². On l'agrandit de coefficient 2,5. Calcule l'aire du nouveau triangle.

(e) Un triangle est agrandi de coefficient 1,2. Un côté de l'agrandissement mesure 11,4 cm. Calcule la longueur du côté qui lui correspond dans le triangle de départ.

Ex. 3 ★★☆ **Triangles égaux : qui a raison ?** — Pour chaque affirmation, dis si l'élève a raison et justifie ta réponse.

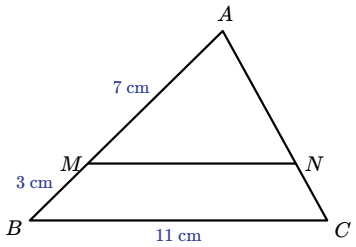
(a) Dans KLM, $\widehat{LKM} = 42°$ et $\widehat{KLM} = 67°$. Dans XYZ, $\widehat{YXZ} = 42°$ et $\widehat{XZY} = 71°$. Saïd : « Ils ont les mêmes angles, donc ils sont égaux. » A-t-il raison ?

(b) On a AB = RS = 5 cm, AC = RT = 3,5 cm et $\widehat{ABC} = \widehat{RST} = 35°$. Chloé dit : « ABC et RST sont égaux. » A-t-elle raison ?



(c) On a GH = UV = 4,2 cm, HI = VW = 6 cm et $\widehat{GHI} = \widehat{UVW} = 64°$. Noé dit : « GHI et UVW sont égaux. » A-t-il raison ? Quelle longueur est alors égale à GI ?

Ex. 4 ★★☆ **Triangles emboîtés : le bon coefficient** — Sur la figure, M est sur [AB], N est sur [AC] et $(MN) \parallel (BC)$. On donne AM = 7 cm, MB = 3 cm, BC = 11 cm et AN = 5,6 cm. Le triangle AMN est donc une réduction du triangle ABC.

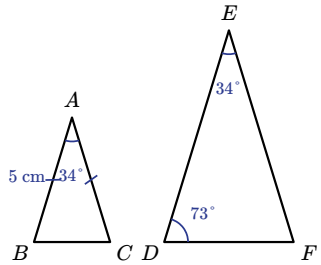


(a) Ilyes écrit : $k = \frac{AM}{MB}$. Explique son erreur, puis calcule le bon coefficient k.

(b) Calcule la longueur MN.

(c) Calcule la longueur AC.

Ex. 5 ★★★ **Deux isocèles : angles et triangles égaux** — Le triangle ABC est isocèle en A avec $\widehat{BAC} = 34°$ et AB = AC = 5 cm. Dans le triangle DEF, $\widehat{EDF} = 73°$, $\widehat{DEF} = 34°$ et DE = 8,5 cm.



(a) Calcule $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Cite la propriété utilisée.

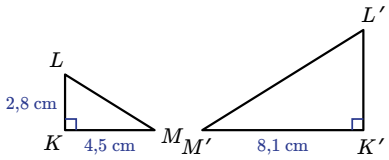
Ex. 5 **(suite)**

(b) Calcule $\widehat{DFE}$. Déduis-en la nature du triangle DEF, puis la longueur EF.

(c) Les deux triangles ont les mêmes angles : on admet que DEF est un agrandissement de ABC. Quel sommet de DEF correspond à A ? Calcule le coefficient k.

(d) Le triangle GHI vérifie GH = HI = 5 cm et $\widehat{GHI} = 73°$. Rayan pense que le cas « un angle compris entre deux côtés » prouve que GHI et ABC sont égaux. Calcule les angles de GHI, puis dis s'il a raison.

Ex. 6 ★★★ **Agrandir, réduire… sans déformer** — Le triangle KLM est rectangle en K, avec KL = 2,8 cm, KM = 4,5 cm et LM = 5,3 cm. Jade en trace un agrandissement K'L'M' ($K \leftrightarrow K'$, $L \leftrightarrow L'$, $M \leftrightarrow M'$) avec K'M' = 8,1 cm.



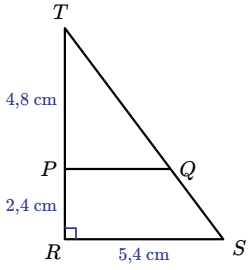
(a) Calcule le coefficient k de Jade et dis si c'est un agrandissement ou une réduction. Calcule K'L' et L'M'.

(b) Paul ajoute 3,6 cm à chaque côté de KLM. Il dit : « J'ai aussi un côté de 8,1 cm, donc j'ai le triangle de Jade. » A-t-il raison ? Son triangle est-il rectangle ? Justifie.

(c) Léna réduit KLM : sa réduction a une aire de 1,575 cm². Elle écrit : « L'aire est divisée par 4, donc $k = 0{,}25$. » Corrige-la, puis calcule les côtés de sa réduction.

(d) Calcule $\widehat{KLM}$ au degré près. Ilan dit : « La réduction de Léna est plus petite, donc cet angle y est plus petit. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Type brevet : la barre de renfort** — La maquette du flanc d'une rampe de skate est le triangle TRS, rectangle en R. P est sur [TR], Q est sur [TS] et la barre [PQ] est parallèle à (RS). On donne TP = 4,8 cm, PR = 2,4 cm et RS = 5,4 cm.



(a) Calcule TR, puis TS.

(b) Justifie que le triangle TPQ est une réduction du triangle TRS, puis calcule son coefficient k sous forme de fraction.

(c) Calcule PQ et QS.

(d) Calcule l'aire de TRS, puis celle de TPQ à l'aide de k. Déduis-en l'aire de la partie PRSQ.

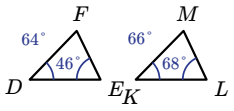
2. *Prouver que deux triangles sont semblables par les angles*

À retenir : Deux paires d'angles égaux suffisent, car le 3e angle se calcule avec 180° : 35° et 71° donnent 74°. Je compare les trois angles, pas leur place, et je ne mesure jamais. Deux triangles rectangles ou isocèles ne sont pas toujours semblables.

Ex. 8 ★☆☆ **Le troisième angle, puis on compare** — Dans chaque cas, calcule le troisième angle de chaque triangle. Les triangles sont-ils semblables ? Justifie. S'ils le sont, donne les sommets homologues. Ne mesure rien : calcule.

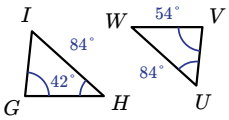
(a) Dans ABC : $\widehat{BAC} = 29°$ et $\widehat{ABC} = 83°$. Dans RTS : $\widehat{RTS} = 68°$ et $\widehat{TSR} = 29°$.

(b) Sur la figure (pas à l'échelle), DEF et KLM ont l'air semblables : $\widehat{EDF} = 46°$, $\widehat{DEF} = 64°$, $\widehat{MKL} = 68°$ et $\widehat{KLM} = 66°$.



La figure n'est pas à l'échelle.

(c) Dans GHI : $\widehat{HGI} = 84°$ et $\widehat{GHI} = 42°$. Dans UVW : $\widehat{VUW} = 54°$ et $\widehat{UVW} = 84°$.

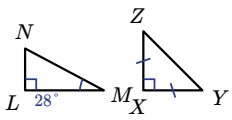


(d) PQR est rectangle en P avec $\widehat{PQR} = 33°$. XYZ est rectangle en Y avec $\widehat{YXZ} = 57°$.

(e) EFG est isocèle en E avec $\widehat{FEG} = 44°$. LMN est isocèle en L avec $\widehat{LMN} = 44°$.

Ex. 9 ★☆☆ **Vrai ou faux ?** — Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifie avec les angles ou avec un contre-exemple.

(a) « Deux triangles rectangles sont toujours semblables. » Observe LMN, rectangle en L avec $\widehat{LMN} = 28°$, et XYZ, rectangle isocèle en X.



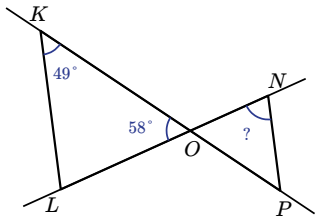
(b) « Deux triangles équilatéraux sont toujours semblables. »

(c) « Si deux triangles ont chacun un angle de 50°, alors ils sont semblables. »

(d) « Deux triangles isocèles dont l'angle au sommet mesure 36° sont semblables. »

(e) « Deux triangles semblables sont toujours égaux. »

Ex. 10 ★★☆ **Le pupitre pliant en X** — Le pied d'un pupitre pliant forme un X. Les droites (KP) et (LN) se coupent en O, et $(KL) \parallel (NP)$. On donne $\widehat{LKO} = 49°$ et $\widehat{KOL} = 58°$.



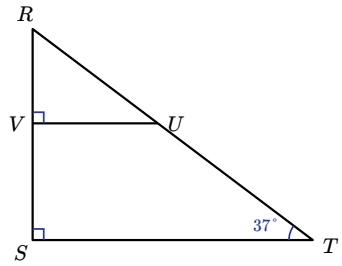
(a) Justifie que $\widehat{KOL} = \widehat{PON}$ en citant la propriété utilisée.

(b) Quel angle du triangle ONP est égal à $\widehat{LKO}$? Justifie en citant la propriété.

(c) Démontre que les triangles OKL et ONP sont semblables, puis calcule $\widehat{ONP}$.

(d) Sami écrit : « OKL et ONP sont semblables dans cet ordre, donc K et N sont homologues. » A-t-il raison ? Justifie et corrige.

Ex. 11 ★★☆ **La barre du toboggan** — Ben dessine le profil d'un toboggan. L'échelle [RS] est perpendiculaire au sol (ST), et [RT] est la glissière. Une barre [VU] relie l'échelle à la glissière ($V \in [RS], U \in [RT]$), avec $(VU) \perp (RS)$. On donne $\widehat{RTS} = 37°$.

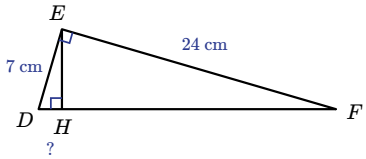


(a) Démontre que les triangles RVU et RST sont semblables, en citant la propriété.

(b) Écris les sommets homologues, puis les deux triangles dans l'ordre des homologues.

(c) Sans mesurer, calcule $\widehat{VRU}$ puis $\widehat{RUV}$.

Ex. 12 ★★★ **Le renfort de la rampe de skate** — Sur la maquette d'une rampe de skate, le profil est un triangle DEF rectangle en E. Un renfort [EH] est perpendiculaire à la planche [DF], avec H sur [DF]. On donne DE = 7 cm et EF = 24 cm.



(a) Calcule DF.

Ex. 12 **(suite)**

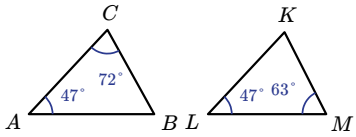
(b) Démontre que les triangles HDE et EDF sont semblables. Écris les sommets homologues.

(c) Lina affirme : « HDE et HEF sont semblables, car ce sont deux triangles rectangles. » Son argument est-il valable ? Démontre proprement si HDE et HEF sont semblables.

(d) Calcule DH sans mesurer. Donne d'abord le coefficient de réduction k.

(e) Calcule EH.

Ex. 13 ★★★ **Les voiles qui se ressemblent** — Ben compare les voiles de plusieurs bateaux. Voile ABC : $\widehat{BAC} = 47°$ et $\widehat{ACB} = 72°$. Voile RTS : $\widehat{SRT} = 72°$ et $\widehat{RTS} = 61°$. Voile KLM : $\widehat{KLM} = 47°$ et $\widehat{LMK} = 63°$.



La figure n'est pas à l'échelle.

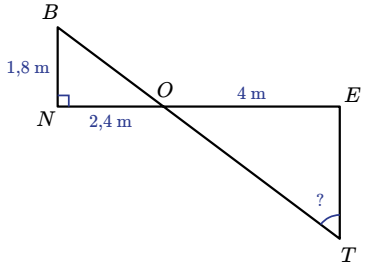
(a) Démontre que les voiles ABC et RTS sont semblables. Écris les sommets homologues dans l'ordre.

(b) Sur la figure, KLM ressemble à ABC, et Noé le « vérifie » au rapporteur. Les triangles ABC et KLM sont-ils semblables ? Justifie sans mesurer.

(c) Voile XYZ : $\widehat{YXZ} = 72°$ et $\widehat{XYZ} = \widehat{XZY} + 14°$. Mia : « On ne connaît qu'un angle de XYZ, on ne peut pas la comparer à ABC. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Explique pourquoi aucun triangle isocèle ne peut être semblable à la voile ABC.

Ex. 14 ★★★ **Les câbles croisés de la passerelle** — Sur le plan d'une passerelle, les câbles [BT] et [NE] se croisent en O. Les poutres [BN] et [ET] sont parallèles, et $(BN) \perp (NE)$. On donne ON = 2,4 m, BN = 1,8 m et OE = 4 m.



(a) Démontre que les triangles OBN et OTE sont semblables, en citant les propriétés. Écris les sommets homologues.

(b) Démontre que le triangle OTE est rectangle en E.

(c) Calcule OB.

(d) Léo écrit : « $k = \frac{OE}{OB} = \frac{4}{3}$ ». Explique son erreur, puis calcule le bon coefficient k pour passer de OBN à OTE.

Ex. 14 **(suite)**

(e) Calcule OT et ET, puis la mesure de $\widehat{OTE}$ arrondie au degré.

3. *Prouver que deux triangles sont semblables par les côtés*

À retenir : Je range les côtés de chaque triangle, puis je calcule les trois quotients dans le même sens, en valeurs exactes et dans la même unité : $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = 1{,}5$, donc semblables (réciproque). Un seul quotient différent : pas semblables.

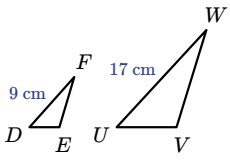
Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes — Trois quotients, une conclusion** — Les longueurs sont en cm. Tu calcules toujours les quotients dans le même sens : triangle 2 sur triangle 1.

(a) Triangle 1 : 8 ; 3 ; 6. Triangle 2 : 17,6 ; 6,6 ; 13,2. Range les côtés de chaque triangle dans l'ordre croissant.

(b) Pour les deux triangles de la question précédente, calcule les trois quotients. Les triangles sont-ils semblables ? Justifie.

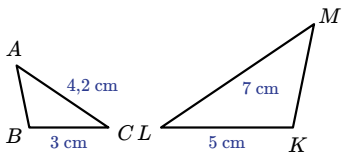
(c) Triangle 1 : 10 ; 16 ; 14. Triangle 2 : 7 ; 5 ; 8. Lina trouve $\frac{10}{5} = 2$, $\frac{14}{7} = 2$ et $\frac{8}{16} = 0{,}5$, et conclut : « pas semblables ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) On donne $DE = 4$, $EF = 7$, $DF = 9$, $UV = 8$, $VW = 14$ et $UW = 17$. On a déjà $\frac{UV}{DE} = \frac{VW}{EF} = 2$. Termine la vérification : les triangles DEF et UVW sont-ils semblables ? Justifie.



La figure n'est pas à l'échelle.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes — Des mm, des cm et un k en fraction** —



Dans le triangle ABC : $AB = 24$ mm, $BC = 3$ cm et $AC = 4{,}2$ cm. Dans le triangle KLM : $KM = 4$ cm, $KL = 5$ cm et $LM = 7$ cm.

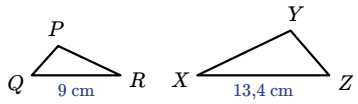
(a) Exprime AB en cm, puis range les côtés de chaque triangle dans l'ordre croissant.

(b) Calcule les trois quotients (KLM sur ABC). Donne chacun sous forme de fraction simplifiée.

(c) Conclus en citant la propriété utilisée et donne k.

(d) Écris les sommets homologues, puis complète : « ABC et … sont semblables (dans cet ordre) ».

Ex. 17 ★★☆ **Presque égaux, mais pas égaux** —



La figure n'est pas à l'échelle.

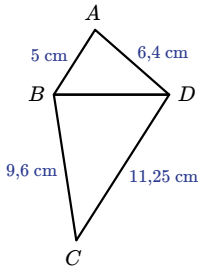
Dans le triangle PQR : $PQ = 4$ cm, $PR = 7$ cm et $QR = 9$ cm. Dans le triangle XYZ : $YZ = 6$ cm, $XY = 10{,}5$ cm et $XZ = 13{,}4$ cm.

(a) Range les côtés de chaque triangle. Calcule les deux premiers quotients (XYZ sur PQR) en valeurs exactes.

(b) Noé obtient $\frac{13{,}4}{9} \approx 1{,}5$ à la calculatrice et dit que les triangles sont semblables. Compare 13,4 et $9 \times 1{,}5$. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Quelle longueur faudrait-il pour XZ pour que les triangles soient semblables ? Dans ce cas, écris les sommets homologues.

Ex. 18 ★★☆ **Deux triangles accolés** —



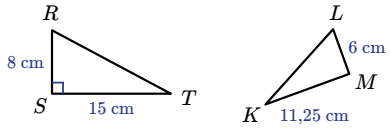
Les triangles ABD et BCD ont le côté [BD] en commun. On donne $AB = 5$ cm, $AD = 6{,}4$ cm, $BD = 7{,}5$ cm, $BC = 9{,}6$ cm et $CD = 11{,}25$ cm.

(a) Montre que les triangles ABD et BCD sont semblables.

(b) Écris les sommets homologues. Quel angle du triangle BCD est égal à $\widehat{ABD}$? Justifie.

(c) Donne, sous forme de fraction, le coefficient de réduction k qui permet de passer du triangle BCD au triangle ABD.

Ex. 19 ★★★ **Deux flancs de pupitre** — Sacha, à Rennes, découpe deux flancs de pupitre. Le triangle RST est rectangle en S, avec $RS = 8$ cm et $ST = 15$ cm. Le triangle KLM a pour côtés $KL = 12{,}75$ cm, $LM = 6$ cm et $KM = 11{,}25$ cm.



(a) Calcule la longueur RT.

(b) Range les côtés de chaque triangle, puis prouve que RST et KLM sont semblables. Donne le coefficient k de RST vers KLM.

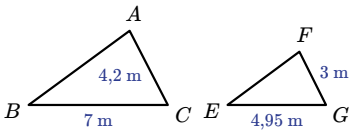
Ex. 19 (suite)

(c) Yanis affirme : « KLM est rectangle en L, car S est la 2e lettre de RST et L la 2e lettre de KLM. » A-t-il raison ? Justifie avec les sommets homologues.

(d) Calcule $\widehat{SRT}$ arrondi au degré, puis déduis-en la mesure de $\widehat{KLM}$.

(e) Calcule l'aire de RST, puis celle de KLM à l'aide de k.

Ex. 20 ★★★ **Trois voiles pour un club** — Le club nautique de Quiberon a une grande voile triangulaire ABC : $AB = 6{,}3$ m, $BC = 7$ m, $AC = 4{,}2$ m. Il étudie deux petites voiles : EFG avec $EF = 4{,}5$ m, $FG = 3$ m, $EG = 4{,}95$ m, et RST avec $RS = 4$ m, $ST = 2{,}4$ m, $RT = 3{,}6$ m.



La figure n'est pas à l'échelle.

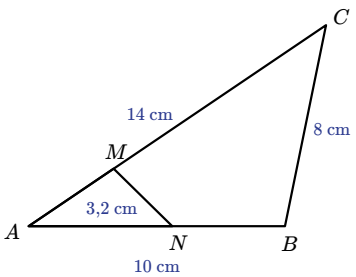
(a) Inès calcule $\frac{FG}{AC}$ et $\frac{EF}{AB}$, trouve le même résultat et conclut que ABC et EFG sont semblables. Calcule ces quotients en fractions simplifiées. Son raisonnement suffit-il ? Justifie.

(b) Tom arrondit les trois quotients au centième et trouve 0,71 trois fois. Compare exactement $\frac{EG}{BC}$ et $\frac{FG}{AC}$ avec un produit en croix. Les voiles ABC et EFG sont-elles semblables ? Justifie.

(c) Range les côtés, puis prouve que les voiles ABC et RST sont semblables. Donne k de ABC vers RST sous forme de fraction.

(d) Écris les sommets homologues de ABC et RST, puis complète : « ABC et … sont semblables (dans cet ordre) ».

Ex. 21 ★★★ **Une découpe dans un coin de plaque** — Dans une plaque triangulaire ABC, un menuisier de Besançon découpe le triangle AMN, avec M sur [AC] et N sur [AB]. On donne $AB = 10$ cm, $AC = 14$ cm, $BC = 8$ cm, $AM = 4$ cm, $NB = 4{,}4$ cm et $MN = 3{,}2$ cm.



(a) Calcule la longueur AN.

(b) Range les côtés de chaque triangle, puis prouve que AMN et ABC sont semblables. Donne le coefficient k de ABC vers AMN.

(c) Écris les sommets homologues. Quel angle du triangle AMN est égal à $\widehat{ABC}$?

Ex. 21 (suite)

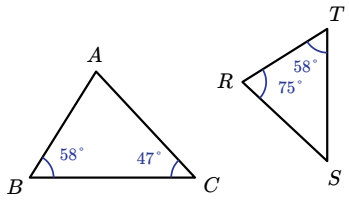
(d) Léo affirme que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. A-t-il raison ? Justifie.

(e) L'aire de ABC vaut environ 39,2 cm². Lou calcule l'aire de AMN avec $39{,}2 \times 0{,}4$. Corrige son erreur et donne l'aire de AMN au dixième.

4. *Repérer les sommets et les côtés homologues*

À retenir : Sommets homologues = sommets des angles égaux ; côté homologue = côté opposé à l'angle égal. « ABC et RTS semblables (dans cet ordre) » : $AB \leftrightarrow RT$, $BC \leftrightarrow TS$, $AC \leftrightarrow RS$. La position sur la figure ne compte pas.

Ex. 22 ★★★ **Automatismes — Les angles égaux donnent les homologues** — Dans le triangle ABC : $\widehat{ABC} = 58°$ et $\widehat{ACB} = 47°$. Dans le triangle RST : $\widehat{SRT} = 75°$ et $\widehat{RTS} = 58°$.



(a) Calcule $\widehat{BAC}$.

(b) Calcule $\widehat{RST}$.

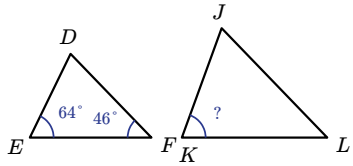
(c) Inès associe les sommets dans l'ordre alphabétique : $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow S$, $C \leftrightarrow T$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Justifie que les triangles ABC et RST sont semblables, puis écris-les dans l'ordre des homologues.

(e) Quel est le côté homologue de $[BC]$? Justifie.

(f) Quel est le côté homologue de $[AC]$? Justifie.

Ex. 23 ★★★ **Automatismes — Lire « dans cet ordre » lettre à lettre** — Les triangles DEF et KJL sont semblables (dans cet ordre). On donne $\widehat{DEF} = 64°$ et $\widehat{EFD} = 46°$.



(a) Écris les trois paires de sommets homologues.

(b) Calcule $\widehat{LKJ}$. Justifie.

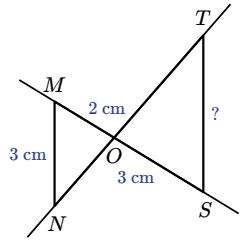
(c) Sur la figure, $[EF]$ et $[KL]$ sont tous les deux « en bas ». Sont-ils homologues ? Justifie.

(d) Quel est le côté homologue de $[KL]$? Justifie.

Ex. 23 **(suite)**

(e) Complète l'égalité : $\frac{KJ}{DE} = \frac{\dots}{EF} = \frac{KL}{\dots}$.

Ex. 24 ★★☆ **Papillon : les homologues de part et d'autre de O** — Les droites (MS) et (NT) se coupent en O, et $(MN) \parallel (ST)$. On donne $OM = 2$ cm, $OS = 3$ cm, $MN = 3$ cm et $OT = 3{,}9$ cm.



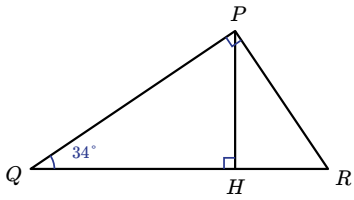
(a) Démontre que les triangles OMN et OTS sont semblables.

(b) Écris les sommets homologues, puis l'égalité des trois quotients avec les côtés de OMN au dénominateur.

(c) Calcule le coefficient d'agrandissement k qui fait passer de OMN à l'autre triangle, puis calcule ST.

(d) Calcule ON.

Ex. 25 ★★☆ **Hauteur issue de l'angle droit : trois triangles semblables** — Le triangle PQR est rectangle en P et $\widehat{PQR} = 34°$. Le point H est le pied de la hauteur issue de P : H est sur $[QR]$ et $(PH) \perp (QR)$.



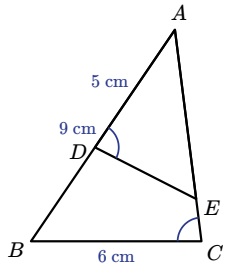
(a) Calcule $\widehat{PRQ}$, $\widehat{HPQ}$ et $\widehat{HPR}$.

(b) Justifie que les triangles PQR, PHQ et PHR sont semblables, puis écris-les dans l'ordre des homologues.

(c) Dans le triangle HPR, quels sont les côtés homologues de $[PQ]$ et de $[QR]$? Justifie.

(d) Écris l'égalité des trois quotients pour les triangles PQR et HPR, avec les côtés de PQR au dénominateur.

Ex. 26 ★★★ **Un triangle retourné à l'intérieur d'un autre** — Dans le triangle ABC, on a $AB = 9$ cm, $AC = 7{,}5$ cm et $BC = 6$ cm. Le point D est sur $[AB]$ avec $AD = 5$ cm, le point E est sur $[AC]$, et $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$.



(a) Démontre que les triangles ADE et ABC sont semblables.

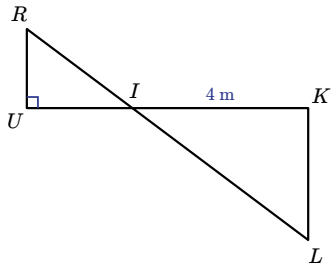
(b) Lina affirme : « $[DE]$ est en bas, comme $[BC]$, donc $D \leftrightarrow B$ et $E \leftrightarrow C$. » A-t-elle raison ? Justifie, puis écris les deux triangles dans l'ordre des homologues.

(c) Écris l'égalité des trois quotients des côtés homologues, avec les côtés de ADE au numérateur.

(d) Calcule le coefficient de réduction k, puis les longueurs AE et DE.

(e) Calcule le périmètre du quadrilatère $DBCE$.

Ex. 27 ★★★ **Le plan d'une passerelle en papillon** — Sur le plan d'une passerelle, les droites (RL) et (UK) se coupent en I, et $(UR) \parallel (KL)$. Le triangle IUR est rectangle en U avec $IU = 2{,}4$ m et $UR = 1{,}8$ m. De plus, $IK = 4$ m.



(a) Calcule la longueur IR.

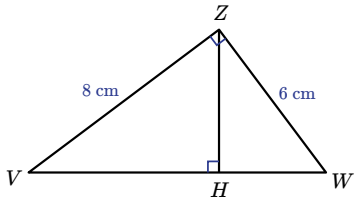
(b) Démontre que les triangles IUR et ILK sont semblables, puis écris les paires de sommets homologues.

(c) Calcule le coefficient d'agrandissement k qui fait passer de IUR à l'autre triangle, puis KL et IL.

(d) Calcule $\widehat{UIR}$ arrondi au degré, puis déduis-en $\widehat{ILK}$ sans utiliser la trigonométrie.

(e) Calcule l'aire du triangle IUR, puis déduis-en l'aire de l'autre triangle à l'aide de k.

Ex. 28 ★★★ **Hauteur issue de l'angle droit : quotients et aires** — Le triangle VZW est rectangle en Z, avec $ZV = 8$ cm et $ZW = 6$ cm. Le point H est le pied de la hauteur issue de Z : H est sur $[VW]$ et $(ZH) \perp (VW)$.



(a) Calcule la longueur VW.

(b) Démontre que les triangles ZVH et VZW sont semblables, puis écris-les dans l'ordre des homologues.

(c) Malo écrit : $\frac{VH}{VZ} = \frac{HZ}{VW} = \frac{VZ}{ZW}$. A-t-il raison ? Justifie, puis écris l'égalité correcte.

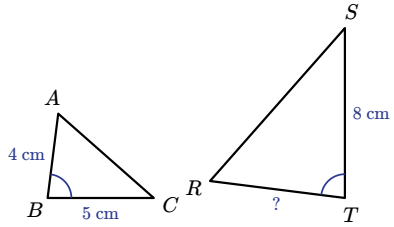
(d) Calcule le coefficient de réduction k qui fait passer de VZW au petit triangle, puis les longueurs ZH et VH.

(e) Calcule HW. Théo affirme que l'aire de VHZ vaut 0,8 fois celle de VZW. Corrige-le, puis calcule l'aire de VHZ.

5. *Calculer le coefficient k et une longueur*

À retenir : $k = \frac{\text{côté du second}}{\text{côté homologue du premier}}$; $\times k$ pour aller vers le second, $\div k$ pour revenir. Ex. : $k = \frac{14}{4} = 3{,}5$ et $3 \times 3{,}5 = 10{,}5$. Prends le côté entier (AB, pas MB), garde k exact ($\frac{5}{3}$) et arrondis à la fin.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : k à l'aller et au retour** — Les triangles ABC et RTS sont semblables (dans cet ordre) : $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow T$, $C \leftrightarrow S$. On donne AB = 4 cm, BC = 5 cm, TS = 8 cm et RS = 9,6 cm.



(a) Écris les trois paires de côtés homologues.

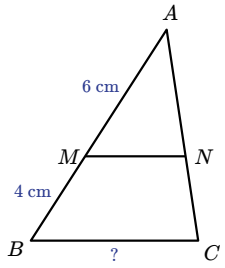
(b) Calcule le coefficient d'agrandissement k qui permet de passer de ABC à RTS.

(c) Calcule la longueur RT.

(d) Calcule la longueur AC.

(e) Contrôle tes résultats : les longueurs de RTS sont-elles plus grandes, et l'ordre des côtés est-il conservé ? Justifie.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : triangles emboîtés et k exact** — M est sur [AB], N est sur [AC] et $(MN) \parallel (BC)$: les triangles AMN et ABC sont semblables (dans cet ordre). On donne AM = 6 cm, MB = 4 cm, MN = 4 cm et AC = 8,5 cm.



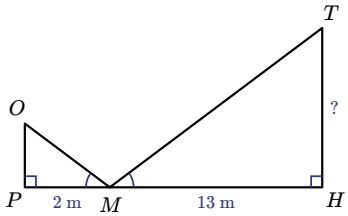
(a) Calcule la longueur AB.

(b) Calcule le coefficient k qui permet de passer de AMN à ABC. Donne-le sous forme de fraction irréductible.

(c) Calcule BC, arrondi au millimètre.

(d) Calcule AN.

Ex. 31 ★★☆ **La hauteur d'un sapin mesurée avec un miroir** — À Annecy, Nora veut connaître la hauteur TH d'un sapin. Elle pose un miroir M au sol et recule jusqu'à voir le sommet T dans le miroir. Ses yeux O sont à OP = 1,5 m du sol, avec PM = 2 m et MH = 13 m. Le rayon lumineux fait des angles égaux avec le sol : $\widehat{OMP} = \widehat{TMH}$.



La figure n'est pas à l'échelle.

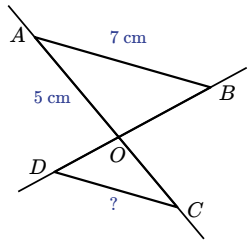
(a) Démontre que les triangles OPM et THM sont semblables.

(b) Écris les côtés homologues, puis calcule le coefficient k qui permet de passer de OPM à THM.

(c) Calcule la hauteur TH du sapin.

(d) Calcule OM, puis déduis-en TM à l'aide de k.

Ex. 32 ★★☆ **L'erreur de Yanis dans le papillon** — Les droites (AC) et (BD) se coupent en O et $(AB) \parallel (CD)$: les triangles OAB et OCD sont semblables (dans cet ordre). On donne OA = 5 cm, AC = 8,5 cm, AB = 7 cm et OD = 2,8 cm.



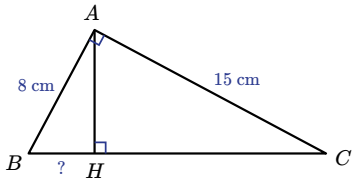
(a) Calcule OC.

(b) Yanis écrit : « $k = \frac{AC}{OA} = \frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$ ». Calcule le bon coefficient k et explique l'erreur de Yanis.

(c) Calcule CD, puis vérifie que ton résultat est cohérent avec la valeur de k.

(d) Calcule OB.

Ex. 33 ★★★ **Hauteur issue de l'angle droit : Pythagore, k et trigonométrie** — ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A. On donne AB = 8 cm et AC = 15 cm.



(a) Calcule BC.

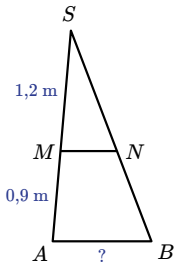
(b) Démontre que les triangles ABC et HBA sont semblables (dans cet ordre), puis écris les sommets homologues.

(c) Calcule le coefficient k qui permet de passer de ABC à HBA. Donne sa valeur exacte. S'agit-il d'un agrandissement ou d'une réduction ?

(d) Calcule BH et AH avec la valeur exacte de k. Arrondis au dixième seulement à la fin, puis contrôle l'ordre des côtés.

(e) Calcule $\widehat{ABC}$ au degré près, puis déduis-en $\widehat{HAC}$.

Ex. 34 ★★★ **L'échelle double et sa barre de sécurité** — À Rodez, Malik ouvre une échelle double de sommet S. Les pieds A et B sont posés au sol. Une barre [MN] relie les deux montants, avec M sur [SA], N sur [SB] et $(MN) \parallel (AB)$. On donne SM = 1,2 m, MA = 0,9 m, SB = 2,24 m et MN = 56 cm.



(a) Démontre que les triangles SMN et SAB sont semblables, puis écris les sommets homologues.

(b) Inès écrit : $k = \frac{MA}{SM} = \frac{0{,}9}{1{,}2} = 0{,}75$, donc AB = 56 × 0,75 = 42 cm. Explique son erreur et le contrôle qui la révèle, puis calcule AB en m.

(c) Calcule SN, puis NB.

(d) Calcule le périmètre du triangle SMN, puis déduis-en celui de SAB sans additionner ses côtés.

Ex. 35 ★★★ **Voilerie : quelles voiles sont semblables ?** — À Lorient, une voilerie découpe des voiles triangulaires. La voile 1 EFG est rectangle en E, avec EG = 4,8 m, FG = 6 m et EF = 3,6 m. La voile 2 RST a pour côtés RS = 5,6 m, ST = 7 m et RT = 4,2 m. La voile 3 a pour côtés 7,2 m, 9,5 m et 5,4 m.

(a) Démontre que les voiles 1 et 2 sont semblables. Écris-les dans l'ordre des sommets homologues et donne k en valeur exacte.

(b) Les voiles 1 et 3 sont-elles semblables ? Justifie.

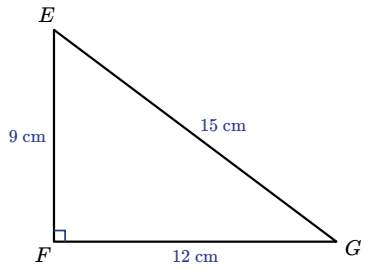
(c) Calcule l'aire de la voile 1, puis déduis-en celle de la voile 2 à l'aide de k.

(d) Une voile de dériveur est semblable à la voile 1 et son aire vaut 2,16 m². Calcule le coefficient qui permet de passer de la voile 1 à cette voile, puis la longueur de son plus grand côté.

6. *Calculer un périmètre ou une aire*

À retenir : Coefficient k : périmètre $\times k$, aire $\times k^2$ (pas $\times k$). Ex. : $k = 3$ donne une aire $\times 9$. À rebours : rapport des aires = 9, donc $k = 3$ (et pas 4,5). Partie restante : aire du grand − aire du petit.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : périmètre et aire de l'image** — Le triangle EFG, rectangle en F, a pour côtés EF = 9 cm, FG = 12 cm et EG = 15 cm, pour périmètre 36 cm et pour aire 54 cm². On l'agrandit ou on le réduit avec un coefficient k.



(a) Pour $k = 3$, calcule le périmètre et l'aire de l'image.

(b) Pour $k = 1{,}2$, calcule k^2, puis l'aire de l'image.

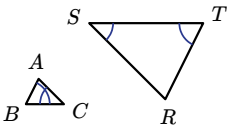
(c) Pour $k = 0{,}5$, l'aire de l'image est-elle plus grande ou plus petite que 54 cm² ? Calcule-la.

(d) Pour $k = \frac{4}{3}$, calcule le périmètre et l'aire de l'image en gardant les fractions.

(e) Le périmètre de l'image vaut 126 cm. Calcule k, puis l'aire de l'image.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : retrouver k avec les aires** — Dans chaque cas, les deux triangles sont semblables.

(a) ABC et RTS sont semblables (dans cet ordre). L'aire de ABC est 7 cm², celle de RTS 63 cm². Calcule k^2, puis k.



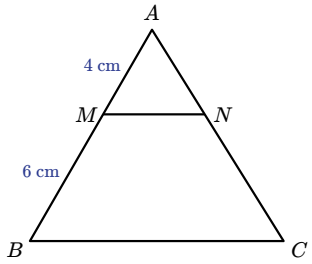
(b) Un triangle de 12 cm² est agrandi en un triangle de 75 cm². Par quel nombre ses côtés sont-ils multipliés ?

(c) Léo dit : « Le rapport des aires vaut 16, donc les côtés sont 8 fois plus longs. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Les côtés du petit triangle mesurent les $\frac{3}{5}$ de ceux du grand. Le grand a une aire de 50 cm². Calcule l'aire du petit.

(e) Un triangle de 98 cm² est réduit en un triangle de 2 cm². Calcule le coefficient de réduction k.

Ex. 38 ★★☆ **Le petit triangle et le trapèze** — M est sur [AB] et N sur [AC], avec $(MN) \parallel (BC)$. On sait que AM = 4 cm et MB = 6 cm. L'aire du triangle ABC est 45 cm².



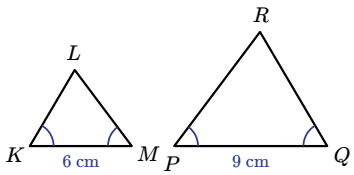
(a) Démontre que les triangles AMN et ABC sont semblables.

(b) Calcule le coefficient de réduction k qui permet de passer de ABC à AMN.

(c) Calcule l'aire du triangle AMN.

(d) Déduis-en l'aire du trapèze MNCB.

Ex. 39 ★★☆ **Le périmètre direct et l'erreur d'Inès** — On sait que $\widehat{LKM} = \widehat{RQP}$ et $\widehat{KML} = \widehat{QPR}$, avec KM = 6 cm et QP = 9 cm. Le triangle KLM a pour périmètre 16,8 cm et pour aire 13,44 cm².

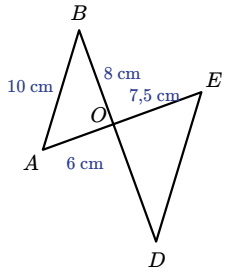


(a) Démontre que les triangles KLM et QRP sont semblables, puis calcule k.

(b) Calcule le périmètre de QRP sans calculer ses côtés.

(c) Inès écrit : « Aire de QRP = 13,44 × 1,5 = 20,16 cm² ». A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

Ex. 40 ★★★ **Le papillon rectangle** — Les droites (AE) et (BD) sont sécantes en O, avec $(AB) \parallel (DE)$. On donne OA = 6 cm, OB = 8 cm, AB = 10 cm et OE = 7,5 cm.



(a) Démontre que les triangles OAB et OED sont semblables, puis écris leurs sommets homologues.

(b) Démontre que le triangle OAB est rectangle en O.

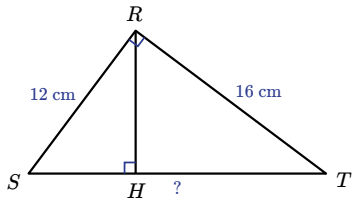
(c) Calcule le périmètre et l'aire du triangle OAB.

(d) Calcule k, puis le périmètre du triangle OED sans calculer OD ni DE.

Ex. 40 (suite)

(e) Noé affirme : « Pour l'aire de OED, je multiplie l'aire de OAB par $2 \times k$. » Corrige-le en calculant l'aire de OED, puis écris le quotient de l'aire de OAB par l'aire de OED en fraction irréductible.

Ex. 41 ★★★ **La hauteur qui partage le triangle** — Le triangle RST est rectangle en R, avec RS = 12 cm et RT = 16 cm. H est le pied de la hauteur issue de R : H est sur [ST] et $(RH) \perp (ST)$.



(a) Calcule ST, puis l'aire du triangle RST.

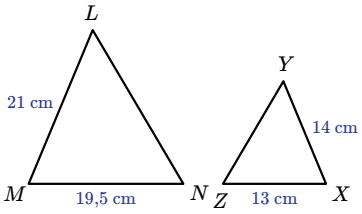
(b) Démontre que les triangles HSR et RST sont semblables, puis écris leurs sommets homologues.

(c) Calcule le coefficient de réduction k qui fait passer de RST à HSR, puis l'aire de HSR.

(d) Déduis-en l'aire du triangle HRT sans calculer de nouveau coefficient.

(e) Tom trouve 76,8 cm² pour l'aire de HRT. Montre qu'il s'est forcément trompé, puis explique son erreur.

Ex. 42 ★★★ **La voile du char à voile** — Pour un modèle réduit de char à voile, Malik compare la voile LMN (LM = 21 cm, MN = 19,5 cm, LN = 22,5 cm) à une petite voile XYZ (XY = 14 cm, YZ = 15 cm, XZ = 13 cm). L'aire de la voile LMN est 189 cm².



(a) Démontre que les triangles LMN et XYZ sont semblables, puis écris-les dans l'ordre des homologues et donne k de LMN vers XYZ.

(b) Sami étudie une voile UVW : UV = 13 cm, VW = 15,4 cm, UW = 14 cm. Il écrit : « $\frac{13}{19{,}5} = \frac{14}{21}$, donc UVW et LMN sont semblables. » Ces triangles sont-ils semblables ? Justifie.

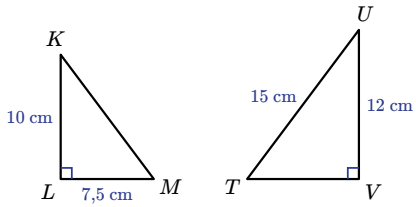
(c) Calcule la valeur exacte de l'aire de la voile XYZ.

(d) Une grande voile PQR, semblable à LMN, a une aire de 4 725 cm². Jade dit : « $4\,725 \div 189 = 25$, donc ses côtés sont $25 \div 2 = 12{,}5$ fois plus longs. » Corrige-la, puis calcule le périmètre de PQR.

7. *Exercices type brevet*

À retenir : Au brevet : ① je justifie la similitude en citant la propriété ; ② k = côté d'arrivée ÷ côté homologue ; ③ longueur $\times k$ (et $\div k$ pour revenir), aire $\times k^2$ (ex. : $k = 3$, aire $\times 9$). Je convertis avant de calculer et je conclus avec l'unité.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : k, longueurs, aire et conversion** — Les triangles KLM et UVT sont semblables, dans cet ordre. On donne $KL = 10$ cm, $LM = 7{,}5$ cm, $UV = 12$ cm et $UT = 15$ cm. L'aire de KLM vaut 37,5 cm².



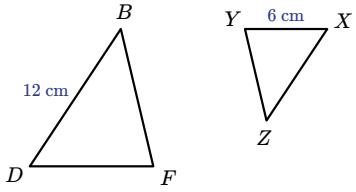
(a) Calcule le coefficient k qui fait passer de KLM à UVT. Est-ce un agrandissement ou une réduction ?

(b) Calcule la longueur VT.

(c) Calcule la longueur KM.

(d) Calcule l'aire de UVT en cm², puis convertis-la en mm².

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : retrouver k d'après les aires** — Les triangles BDF et ZXY sont semblables, dans cet ordre. L'aire de BDF vaut 45 cm² et celle de ZXY vaut 20 cm². On donne $BD = 12$ cm et $XY = 6$ cm.

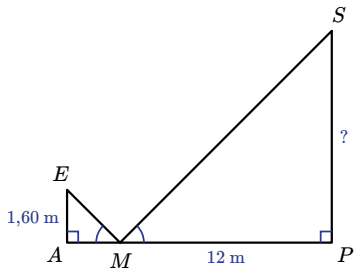


(a) Calcule le coefficient de réduction k qui fait passer de BDF à ZXY. Donne-le sous forme de fraction.

(b) Calcule la longueur ZX.

(c) Noah dit : « Pour trouver DF, je multiplie XY par k. » A-t-il raison ? Justifie, puis calcule DF.

Ex. 45 ★★☆ **La hauteur d'un clocher avec un miroir** — À Albi, Inès veut connaître la hauteur PS d'un clocher. Elle pose un miroir M au sol, puis recule jusqu'en A, d'où elle voit le sommet S dans le miroir. Ses yeux E sont à $AE = 1{,}60$ m du sol. On donne $AM = 60$ cm et $MP = 12$ m. Le sol est horizontal, Inès et le clocher sont verticaux, et le rayon lumineux fait des angles égaux avec le sol : $\widehat{AME} = \widehat{PMS}$.



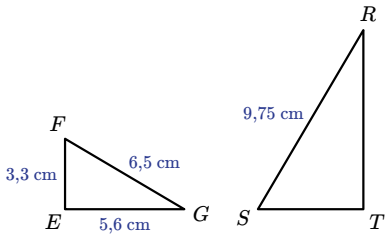
La figure n'est pas à l'échelle.

(a) Démontre que les triangles AEM et PSM sont semblables, puis écris les sommets homologues.

(b) Calcule le coefficient d'agrandissement k qui fait passer de AEM à PSM.

(c) Calcule la hauteur PS du clocher et conclus par une phrase.

Ex. 46 ★★☆ **Brevet : réciproque de Pythagore, similitude et aire** — Le triangle EFG a pour côtés $EF = 3{,}3$ cm, $EG = 5{,}6$ cm et $FG = 6{,}5$ cm. Le triangle RST a pour côtés $RS = 9{,}75$ cm, $ST = 4{,}95$ cm et $RT = 8{,}4$ cm.



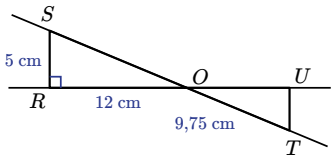
(a) Montre que le triangle EFG est rectangle en E.

(b) Démontre que les triangles EFG et RST sont semblables, puis écris-les avec leurs sommets dans l'ordre des homologues.

(c) Calcule $\widehat{EGF}$ au degré près. Nomme son angle homologue dans RST et donne sa mesure.

(d) Calcule l'aire de EFG, puis celle de RST.

Ex. 47 ★★★ **Brevet : papillon, Pythagore et aire** — Les droites (RU) et (ST) se coupent en O et $(RS) \parallel (TU)$. Le triangle ORS est rectangle en R, avec $OR = 12$ cm et $RS = 5$ cm. On donne aussi $OT = 9{,}75$ cm. On étudie les triangles ORS et TUO.



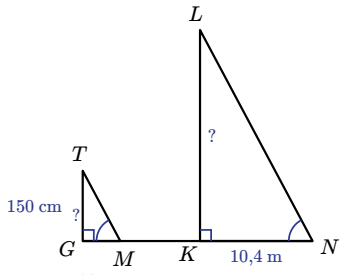
(a) Montre que $OS = 13$ cm.

(b) Démontre que les triangles ORS et TUO sont semblables. Écris ensuite le second triangle dans l'ordre des sommets homologues de ORS.

(c) Calcule le coefficient k qui fait passer de ORS à son semblable, sous forme de fraction irréductible. Calcule ensuite OU et UT.

(d) Calcule l'aire de ORS. Léo affirme : « Pour avoir l'aire de l'autre triangle, je multiplie par k. » A-t-il raison ? Justifie et donne cette aire.

Ex. 48 ★★★ **L'ombre d'un immeuble à Annecy** — À Annecy, Malik plante un bâton vertical [GT] de 150 cm dans un sol horizontal. Au même instant, l'ombre du bâton mesure $GM = 80$ cm. L'ombre d'un immeuble vertical [KL] mesure $KN = 10{,}4$ m. Les rayons du soleil sont parallèles : $(TM) \parallel (LN)$.



La figure n'est pas à l'échelle.

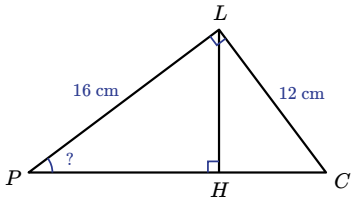
(a) Démontre que les triangles GTM et NLK sont semblables. Écris ensuite le second triangle dans l'ordre des sommets homologues de GTM.

(b) Calcule l'angle $\widehat{TMG}$ que font les rayons du soleil avec le sol, arrondi au degré.

(c) Calcule le coefficient k qui fait passer du triangle du bâton à celui de l'immeuble (attention aux unités). Calcule ensuite la hauteur KL de l'immeuble, en mètres.

(d) Calcule TM. Déduis-en la longueur LN du rayon qui va du sommet de l'immeuble au bout de son ombre, en mètres.

Ex. 49 ★★★ **Brevet : hauteur issue de l'angle droit et tangente** — Le triangle PLC est rectangle en L, avec $PL = 16$ cm et $LC = 12$ cm. Le point H est le pied de la hauteur issue de L : H est sur [PC] et $(LH) \perp (PC)$.



(a) Calcule PC. Calcule ensuite la mesure de l'angle $\widehat{LPC}$, arrondie au degré.

(b) Démontre que les triangles PHL et PLC sont semblables. Écris ensuite l'égalité des trois quotients de côtés homologues.

(c) Montre que $PH = 12{,}8$ cm, puis calcule HL.

(d) Calcule l'aire de PLC. À l'aide de k, calcule ensuite l'aire de PHL, puis déduis-en l'aire du triangle LHC.