1. Rappels de 4^e : angles, triangles égaux, agrandissement

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : l'angle qui manque**

(a) La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Dans PQR : $\widehat{PRQ} = 180° - (44° + 79°) = 180° - 123° = 57°$.

(b) Dans un triangle isocèle, les deux angles à la base sont égaux.
Donc $\widehat{DEF} = (180° - 36°) \div 2 = 144° \div 2 = 72°$.

(c) Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont pour somme 90°.
Donc $\widehat{HKG} = 90° - 31° = 59°$.

(d) Lina a oublié les parenthèses : avec son calcul, elle retire 61 puis ajoute 53, et elle obtient 172°. Il faut retirer la somme des deux angles : $\widehat{UTV} = 180° - (61° + 53°) = 180° - 114° = 66°$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : agrandir ou réduire**

(a) On multiplie chaque longueur par $k = 1{,}6$. $EF = AB \times 1{,}6 = 4 \times 1{,}6 = 6{,}4$ cm ; $ED = AC \times 1{,}6 = 3{,}5 \times 1{,}6 = 5{,}6$ cm ; $FD = BC \times 1{,}6 = 6 \times 1{,}6 = 9{,}6$ cm.

(b) $k = \frac{5}{8} = 0{,}625$. On a $0 < k < 1$, donc c'est une réduction.

(c) L'angle mesure toujours 54°. Dans un agrandissement ou une réduction, les longueurs changent mais les angles restent les mêmes.

(d) L'aire est multipliée par k^2, pas par k. Nouvelle aire : $12 \times 2{,}5^2 = 12 \times 6{,}25 = 75$ cm².

(e) Agrandir, c'est multiplier par $k = 1{,}2$. Pour revenir au triangle de départ, on divise : $11{,}4 \div 1{,}2 = 9{,}5$ cm.

Ex. 3 ★★☆ **Triangles égaux : qui a raison ?**

(a) Dans KLM : $\widehat{KML} = 180° - (42° + 67°) = 71°$. Dans XYZ : $\widehat{XYZ} = 180° - (42° + 71°) = 67°$. Les deux triangles ont donc les mêmes angles. Mais trois angles égaux donnent la même forme, pas la même taille : XYZ peut être un agrandissement de KLM. Saïd a tort, on ne peut pas conclure qu'ils sont égaux.

Ex. 3 (suite)

(b) Chloé a tort. Dans le cas d'égalité, l'angle doit être compris entre les deux côtés égaux. L'angle compris entre [AB] et [AC] est $\widehat{BAC}$, pas $\widehat{ABC}$. Aucun cas d'égalité ne s'applique. D'ailleurs, sur la figure, les deux triangles vérifient ces données mais ne sont pas superposables : $BC \neq ST$.

(c) On sait que GH = UV, HI = VW et $\widehat{GHI} = \widehat{UVW}$. Cet angle est compris entre les deux côtés égaux. Or deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés de même longueur sont égaux.
Donc Noé a raison, et le côté homologue de [GI] donne GI = UW.

Ex. 4 ★★★ **Triangles emboîtés : le bon coefficient**

(a) Il faut comparer le côté AM au côté entier AB, pas au morceau MB. D'ailleurs, $\frac{7}{3} > 1$ ne peut pas être le coefficient d'une réduction. On a $AB = AM + MB = 7 + 3 = 10$ cm, donc $k = \frac{AM}{AB} = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

(b) [MN] est le côté homologue de [BC].
Donc $MN = BC \times k = 11 \times 0{,}7 = 7{,}7$ cm.

(c) [AN] est le côté homologue de [AC]. On a $AN = AC \times 0{,}7$, donc pour revenir à ABC on divise : $AC = 5{,}6 \div 0{,}7 = 8$ cm.

Ex. 5 ★★★ **Deux isocèles : angles et triangles égaux**

(a) On sait que ABC est isocèle en A. Or dans un triangle isocèle, les deux angles à la base sont égaux.
Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180° - 34°) \div 2 = 146° \div 2 = 73°$.

(b) Dans DEF, $\widehat{DFE} = 180° - (73° + 34°) = 180° - 107° = 73°$. On sait que $\widehat{EDF} = \widehat{DFE} = 73°$. Or si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.
Donc DEF est isocèle en E, et EF = ED = 8,5 cm.

(c) A est le sommet de l'angle de 34° ; dans DEF, c'est E : $A \leftrightarrow E$. Le côté [AB] relie les angles de 34° et 73°, comme [ED].
Donc $k = \frac{ED}{AB} = \frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$. Comme $k > 1$, c'est bien un agrandissement.

Ex. 5 **(suite)**

(d) GHI est isocèle en H, donc $\widehat{HGI} = \widehat{HIG} = (180° - 73°) \div 2 = 53{,}5°$. Ses angles ($73°$; $53{,}5°$; $53{,}5°$) ne sont pas ceux de ABC, donc GHI et ABC ne sont pas égaux. Rayan a tort : dans ABC, l'angle compris entre les côtés [AB] et [AC] de 5 cm est $\widehat{BAC} = 34°$, pas un angle de $73°$. L'angle doit être compris entre les deux côtés.

Ex. 6 ★★★ **Agrandir, réduire… sans déformer**

(a) $k = \frac{K'M'}{KM} = \frac{8{,}1}{4{,}5} = 1{,}8$. Comme $k > 1$, c'est un agrandissement. $K'L' = 2{,}8 \times 1{,}8 = 5{,}04$ cm et $L'M' = 5{,}3 \times 1{,}8 = 9{,}54$ cm.

(b) Paul obtient des côtés de $2{,}8 + 3{,}6 = 6{,}4$ cm, $4{,}5 + 3{,}6 = 8{,}1$ cm et $5{,}3 + 3{,}6 = 8{,}9$ cm. Or $\frac{6{,}4}{2{,}8} \approx 2{,}29$ alors que $\frac{8{,}1}{4{,}5} = 1{,}8$: les longueurs n'ont pas été multipliées par un même nombre, donc ce n'est pas un agrandissement de KLM, ni le triangle de Jade. Il a tort. De plus, $6{,}4^2 + 8{,}1^2 = 106{,}57$ et $8{,}9^2 = 79{,}21$. Comme $106{,}57 \neq 79{,}21$, d'après le théorème de Pythagore, son triangle n'est pas rectangle : il a changé de forme.

(c) Aire de KLM : $\frac{2{,}8 \times 4{,}5}{2} = 6{,}3$ cm². Une aire est multipliée par k^2, pas par k : $k^2 = \frac{1{,}575}{6{,}3} = 0{,}25$, donc $k = 0{,}5$ (car $0{,}5^2 = 0{,}25$). C'est bien une réduction ($k < 1$). Côtés : $2{,}8 \times 0{,}5 = 1{,}4$ cm ; $4{,}5 \times 0{,}5 = 2{,}25$ cm ; $5{,}3 \times 0{,}5 = 2{,}65$ cm.

(d) Dans KLM rectangle en K : $\tan \widehat{KLM} = \frac{KM}{KL} = \frac{4{,}5}{2{,}8}$, donc $\widehat{KLM} \approx 58°$. Ilan a tort : une réduction multiplie les longueurs par k, mais les angles ne changent pas. L'angle homologue mesure lui aussi environ $58°$.

Ex. 7 ★★★ **Type brevet : la barre de renfort**

(a) P est sur [TR], donc $TR = TP + PR = 4{,}8 + 2{,}4 = 7{,}2$ cm. Dans TRS rectangle en R, d'après le théorème de Pythagore : $TS^2 = TR^2 + RS^2 = 51{,}84 + 29{,}16 = 81$, donc $TS = \sqrt{81} = 9$ cm.

(b) On sait que P est sur [TR], Q sur [TS] et $(PQ) \parallel (RS)$: les triangles TPQ et TRS sont emboîtés, donc TPQ est une réduction de TRS. Son coefficient se calcule avec le côté entier TR : $k = \frac{TP}{TR} = \frac{4{,}8}{7{,}2} = \frac{2}{3}$.

(c) $PQ = RS \times k = 5{,}4 \times \frac{2}{3} = 3{,}6$ cm. $TQ = TS \times k = 9 \times \frac{2}{3} = 6$ cm, donc $QS = TS - TQ = 9 - 6 = 3$ cm.

(d) Aire de TRS : $\frac{7{,}2 \times 5{,}4}{2} = 19{,}44$ cm². Une aire est multipliée par k^2 : aire de TPQ $= 19{,}44 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 19{,}44 \times \frac{4}{9} = 8{,}64$ cm². Aire de PRSQ $= 19{,}44 - 8{,}64 = 10{,}8$ cm².

2. *Prouver que deux triangles sont semblables par les angles*

Ex. 8 ★★★ **Le troisième angle, puis on compare**

(a) Dans ABC, $\widehat{ACB} = 180° - (29° + 83°) = 68°$. Dans RTS, $\widehat{SRT} = 180° - (68° + 29°) = 83°$. Les deux triangles ont des angles de $29°$, $68°$ et $83°$: ils ont deux angles deux à deux égaux, donc ils sont semblables. On a $A \leftrightarrow S$, $B \leftrightarrow R$ et $C \leftrightarrow T$: ABC et SRT sont semblables (dans cet ordre).

(b) Dans DEF, $\widehat{DFE} = 180° - (46° + 64°) = 70°$. Dans KLM, $\widehat{KML} = 180° - (68° + 66°) = 46°$. DEF a des angles de $46°$, $64°$ et $70°$. KLM a des angles de $46°$, $66°$ et $68°$. Seul l'angle de $46°$ se retrouve dans les deux : les triangles ne sont pas semblables, même s'ils en ont l'air sur la figure.

(c) Dans GHI, $\widehat{GIH} = 180° - (84° + 42°) = 54°$. Dans UVW, $\widehat{UWV} = 180° - (54° + 84°) = 42°$. Les deux triangles ont des angles de $42°$, $54°$ et $84°$, même s'ils ne sont pas à la même place : ils sont semblables. On a $G \leftrightarrow V$, $H \leftrightarrow W$ et $I \leftrightarrow U$: GHI et VWU sont semblables (dans cet ordre).

(d) Dans PQR, $\widehat{PRQ} = 180° - (90° + 33°) = 57°$. Dans XYZ, $\widehat{XZY} = 180° - (90° + 57°) = 33°$. Les deux triangles ont des angles de $90°$, $33°$ et $57°$: ils sont semblables. On a $P \leftrightarrow Y$, $Q \leftrightarrow Z$ et $R \leftrightarrow X$: PQR et YZX sont semblables (dans cet ordre).

(e) Dans EFG, isocèle en E, les angles à la base sont égaux : $\widehat{EFG} = \widehat{EGF} = (180° - 44°) \div 2 = 68°$. Dans LMN, isocèle en L, $\widehat{LNM} = \widehat{LMN} = 44°$, donc $\widehat{MLN} = 180° - 2 \times 44° = 92°$. Les angles sont $44°$, $68°$, $68°$ pour EFG et $44°$, $44°$, $92°$ pour LMN : les triangles ne sont pas semblables.

Ex. 9 ★★★ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux. Dans LMN, $\widehat{LNM} = 180° - (90° + 28°) = 62°$: ses angles sont $90°$, $28°$ et $62°$. XYZ est rectangle isocèle, donc ses angles sont $90°$, $45°$ et $45°$. Seul l'angle droit est commun : ces triangles ne sont pas semblables. Il faut aussi un angle aigu égal.

(b) Vrai. Un triangle équilatéral a trois angles de $60°$. Deux triangles équilatéraux ont donc leurs angles deux à deux égaux : ils sont semblables.

Ex. 9 **(suite)**

(c) Faux. Contre-exemple : un triangle d'angles 50°, 60°, 70° et un triangle d'angles 50°, 50°, 80° (car $180° - 2 \times 50° = 80°$). Un seul angle égal ne suffit pas : il en faut deux.

(d) Vrai. Les angles à la base mesurent $(180° - 36°) \div 2 = 72°$ dans chacun. Les deux triangles ont des angles de 36°, 72° et 72° : ils sont semblables.

(e) Faux. Un triangle équilatéral de côté 2 cm et un triangle équilatéral de côté 5 cm sont semblables (trois angles de 60°), mais ils ne sont pas égaux : ils n'ont pas la même taille.

Ex. 10 ★★☆ **Le pupitre pliant en X**

(a) On sait que les droites (KP) et (LN) se coupent en O. Or deux angles opposés par le sommet sont égaux. Donc $\widehat{KOL} = \widehat{PON}$.

(b) On sait que $(KL) \parallel (NP)$ et que (KP) est une sécante. Les angles $\widehat{LKO}$ et $\widehat{NPO}$ sont alternes-internes. Or deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux.
Donc $\widehat{LKO} = \widehat{NPO}$: c'est l'angle de sommet P.

(c) On sait que $\widehat{KOL} = \widehat{PON}$ (question 1) et que $\widehat{LKO} = \widehat{NPO}$ (question 2). Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc les triangles OKL et ONP sont semblables. Dans ONP : $\widehat{PON} = 58°$ et $\widehat{NPO} = 49°$, donc $\widehat{ONP} = 180° - (58° + 49°) = 73°$.

(d) Non. Les sommets homologues sont les sommets des angles égaux : $\widehat{LKO} = \widehat{NPO}$, donc $K \leftrightarrow P$ et non $K \leftrightarrow N$. Avec $O \leftrightarrow O$, on obtient aussi $L \leftrightarrow N$. Il faut écrire : OKL et OPN sont semblables (dans cet ordre).

Ex. 11 ★★☆ **La barre du toboggan**

(a) On sait que $\widehat{RVU} = 90°$ (car $(VU) \perp (RS)$) et que $\widehat{RST} = 90°$. L'angle $\widehat{VRU}$ est commun aux deux triangles ($\widehat{VRU} = \widehat{SRT}$). Deux angles droits seuls ne suffiraient pas : c'est l'angle aigu commun qui permet de conclure. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc RVU et RST sont semblables.

(b) Les angles droits donnent $V \leftrightarrow S$, l'angle commun donne $R \leftrightarrow R$, donc $U \leftrightarrow T$. RVU et RST sont semblables (dans cet ordre).

Ex. 11 **(suite)**

(c) Dans RST, $\widehat{SRT} = 180° - (90° + 37°) = 53°$, donc $\widehat{VRU} = 53°$ (angle commun). U et T sont homologues, donc $\widehat{RUV} = \widehat{RTS} = 37°$.

Ex. 12 ★★★ **Le renfort de la rampe de skate**

(a) Le triangle DEF est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore : $DF^2 = DE^2 + EF^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$, donc $DF = \sqrt{625} = 25$ cm.

(b) On sait que $\widehat{DHE} = 90°$ et $\widehat{DEF} = 90°$. De plus, H est sur [DF], donc l'angle $\widehat{EDF}$ est commun aux deux triangles. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc HDE et EDF sont semblables (dans cet ordre) : $H \leftrightarrow E$, $D \leftrightarrow D$, $E \leftrightarrow F$.

(c) L'argument n'est pas valable : deux triangles rectangles ne sont pas toujours semblables (exemple : 90°, 30°, 60° et 90°, 45°, 45°). Il faut aussi un angle aigu égal.
Dans EDF : $\widehat{EDF} + \widehat{EFD} = 90°$. Dans HEF, rectangle en H : $\widehat{HEF} + \widehat{HFE} = 90°$. Or $\widehat{HFE} = \widehat{EFD}$ (angle commun), donc $\widehat{HEF} = 90° - \widehat{EFD} = \widehat{EDF}$. HDE et HEF ont chacun un angle droit en H, et $\widehat{HDE} = \widehat{HEF}$. Ils ont donc deux angles deux à deux égaux : ils sont semblables, avec $H \leftrightarrow H$, $D \leftrightarrow E$, $E \leftrightarrow F$. La conclusion de Lina est juste, mais pas sa justification.

(d) HDE est une réduction de EDF. Les côtés opposés à l'angle droit sont homologues : [DE] dans HDE et [DF] dans EDF.
Donc $k = \frac{DE}{DF} = \frac{7}{25} = 0{,}28$. [DH] est opposé à $\widehat{HED}$, homologue de $\widehat{DFE}$: [DH] est donc homologue de [DE]. $DH = DE \times k = 7 \times 0{,}28 = 1{,}96$ cm.

(e) [HE] est opposé à l'angle $\widehat{D}$ dans HDE, et [EF] est opposé à l'angle $\widehat{D}$ dans EDF : ce sont des côtés homologues. $EH = EF \times k = 24 \times 0{,}28 = 6{,}72$ cm.

Ex. 13 ★★★ **Les voiles qui se ressemblent**

(a) Dans ABC : $\widehat{ABC} = 180° - (47° + 72°) = 61°$. Dans RTS : $\widehat{RST} = 180° - (72° + 61°) = 47°$. Les deux triangles ont des angles de 47°, 61° et 72°. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc ABC et STR sont semblables (dans cet ordre) : $A \leftrightarrow S$, $B \leftrightarrow T$, $C \leftrightarrow R$.

Ex. 13 **(suite)**

(b) On ne mesure pas sur une figure, on calcule. Dans KLM : $\widehat{LKM} = 180° - (47° + 63°) = 70°$. Les angles de KLM mesurent 47°, 63° et 70°, et ceux de ABC mesurent 47°, 61° et 72°. Un seul angle est égal (47°), donc les triangles ABC et KLM ne sont pas semblables, même s'ils se ressemblent.

(c) Mia a tort. Dans XYZ : $\widehat{XYZ} + \widehat{XZY} = 180° - 72° = 108°$. Comme $\widehat{XYZ}$ mesure 14° de plus : $\widehat{XZY} = (108° - 14°) \div 2 = 47°$ et $\widehat{XYZ} = 47° + 14° = 61°$.
XYZ a des angles de 47°, 61° et 72°, comme ABC. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc ABC et ZYX sont semblables (dans cet ordre) : $A \leftrightarrow Z$, $B \leftrightarrow Y$, $C \leftrightarrow X$.

(d) Un triangle semblable à ABC a les mêmes angles que ABC : 47°, 61° et 72°. Ce sont trois mesures différentes. Or un triangle isocèle a deux angles égaux (les angles à la base).
Donc aucun triangle isocèle ne peut être semblable à ABC.

Ex. 14 ★★★ **Les câbles croisés de la passerelle**

(a) Les angles $\widehat{BON}$ et $\widehat{TOE}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet sont égaux, donc $\widehat{BON} = \widehat{TOE}$. Les angles $\widehat{OBN}$ et $\widehat{OTE}$ sont alternes-internes, formés par les parallèles (BN) et (ET) et la sécante (BT). Or deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{OBN} = \widehat{OTE}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc OBN et OTE sont semblables (dans cet ordre) : $O \leftrightarrow O$, $B \leftrightarrow T$, $N \leftrightarrow E$.

(b) Les triangles OBN et OTE sont semblables, avec $N \leftrightarrow E$. Leurs angles homologues sont égaux, donc $\widehat{OET} = \widehat{ONB} = 90°$: OTE est rectangle en E.

(c) Le triangle OBN est rectangle en N. D'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = ON^2 + BN^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 = 5{,}76 + 3{,}24 = 9$, donc $OB = 3$ m.

(d) Les côtés homologues sont opposés aux angles égaux. [OE] est opposé à l'angle en T, et T est homologue de B. Dans OBN, le côté opposé à B est [ON], pas [OB] ([OB] est l'hypoténuse, homologue de [OT]). Léo a donc associé des côtés qui ne sont pas homologues. Le bon coefficient est $k = \frac{OE}{ON} = \frac{4}{2{,}4} = \frac{5}{3}$ (c'est un agrandissement).

Ex. 14 **(suite)**

(e) $OT = OB \times k = 3 \times \frac{5}{3} = 5$ m ; $ET = BN \times k = 1{,}8 \times \frac{5}{3} = 3$ m. Dans OTE, rectangle en E : $\tan \widehat{OTE} = \frac{OE}{ET} = \frac{4}{3}$, donc $\widehat{OTE} \approx 53°$.

3. *Prouver que deux triangles sont semblables par les côtés*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes — Trois quotients, une conclusion**

(a) Triangle 1 : 3 ; 6 ; 8. Triangle 2 : 6,6 ; 13,2 ; 17,6.

(b) $\frac{6{,}6}{3} = 2{,}2$; $\frac{13{,}2}{6} = 2{,}2$; $\frac{17{,}6}{8} = 2{,}2$. Les longueurs des côtés sont proportionnelles. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc les triangles sont semblables, avec $k = 2{,}2$.

(c) Non. Lina mélange les deux sens : $\frac{10}{5}$ et $\frac{14}{7}$ sont « triangle 1 sur triangle 2 », mais $\frac{8}{16}$ est « triangle 2 sur triangle 1 ». Rangés : 10 ; 14 ; 16 et 5 ; 7 ; 8. Dans le même sens : $\frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{7}{14} = 0{,}5$; $\frac{8}{16} = 0{,}5$. Les longueurs sont proportionnelles. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc les triangles sont semblables, avec $k = 0{,}5$ (réduction).

(d) $\frac{UW}{DF} = \frac{17}{9} \approx 1{,}89$, et $9 \times 2 = 18 \neq 17$. Le troisième quotient n'est pas égal à 2 : les longueurs ne sont pas proportionnelles, donc les triangles DEF et UVW ne sont pas semblables. Deux quotients égaux ne suffisent pas.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes — Des mm, des cm et un k en fraction**

(a) $AB = 24$ mm $= 2{,}4$ cm. ABC : $AB = 2{,}4$; $BC = 3$; $AC = 4{,}2$. KLM : $KM = 4$; $KL = 5$; $LM = 7$.

(b) $\frac{KM}{AB} = \frac{4}{2{,}4} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$; $\frac{KL}{BC} = \frac{5}{3}$; $\frac{LM}{AC} = \frac{7}{4{,}2} = \frac{70}{42} = \frac{5}{3}$.

(c) Les trois quotients sont égaux : les longueurs des côtés sont proportionnelles. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables (réciproque).
Donc ABC et KLM sont semblables, avec $k = \frac{5}{3}$ (on garde la fraction).

Ex. 16 **(suite)**

(d) [BC] est opposé à A et [KL] est opposé à M, donc $A \leftrightarrow M$. [AC] est opposé à B et [LM] est opposé à K, donc $B \leftrightarrow K$. [AB] est opposé à C et [KM] est opposé à L, donc $C \leftrightarrow L$. ABC et MKL sont semblables (dans cet ordre).

Ex. 17 ★★☆ **Presque égaux, mais pas égaux**

(a) PQR : 4 ; 7 ; 9. XYZ : 6 ; 10,5 ; 13,4. $\frac{6}{4} = 1{,}5$ et $\frac{10{,}5}{7} = 1{,}5$.

(b) $9 \times 1{,}5 = 13{,}5 \neq 13{,}4$, donc $\frac{13{,}4}{9} \neq 1{,}5$ (en fait $\frac{13{,}4}{9} \approx 1{,}49$). Un quotient diffère : les longueurs ne sont pas proportionnelles, donc les triangles ne sont pas semblables. Noé a tort, car on ne conclut pas sur un arrondi.

(c) Il faudrait $XZ = 9 \times 1{,}5 = 13{,}5$ cm. Les côtés homologues sont [PQ] et [YZ], [PR] et [XY], [QR] et [XZ]. Les sommets opposés sont homologues : $R \leftrightarrow X$, $Q \leftrightarrow Z$ et $P \leftrightarrow Y$. PQR et YZX seraient semblables (dans cet ordre).

Ex. 18 ★★☆ **Deux triangles accolés**

(a) On range les côtés. ABD : $AB = 5$; $AD = 6{,}4$; $BD = 7{,}5$. BCD : $BD = 7{,}5$; $BC = 9{,}6$; $CD = 11{,}25$. Le côté commun [BD] est le plus grand côté de ABD mais le plus petit de BCD. $\frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$; $\frac{9{,}6}{6{,}4} = 1{,}5$; $\frac{11{,}25}{7{,}5} = 1{,}5$. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc ABD et BCD sont semblables.

(b) [AB] (opposé à D) correspond à [BD] (opposé à C) : $D \leftrightarrow C$. [AD] (opposé à B) correspond à [BC] (opposé à D) : $B \leftrightarrow D$. [BD] (opposé à A) correspond à [CD] (opposé à B) : $A \leftrightarrow B$. ABD et BDC sont semblables (dans cet ordre). Les angles homologues de deux triangles semblables sont égaux, donc $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.

(c) $k = \frac{AB}{BD} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{2}{3}$; on vérifie : $\frac{AD}{BC} = \frac{6{,}4}{9{,}6} = \frac{2}{3}$ et $\frac{BD}{CD} = \frac{7{,}5}{11{,}25} = \frac{2}{3}$. $k = \frac{2}{3}$.

Ex. 19 ★★★ **Deux flancs de pupitre**

(a) Le triangle RST est rectangle en S. D'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2 = 64 + 225 = 289$, donc $RT = \sqrt{289} = 17$ cm.

Ex. 19 **(suite)**

(b) On range les côtés. RST : 8 ; 15 ; 17. KLM : 6 ; 11,25 ; 12,75. $\frac{LM}{RS} = \frac{6}{8} = 0{,}75$; $\frac{KM}{ST} = \frac{11{,}25}{15} = 0{,}75$; $\frac{KL}{RT} = \frac{12{,}75}{17} = 0{,}75$. Les trois quotients sont égaux : les longueurs sont proportionnelles. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc RST et KLM sont semblables, avec $k = 0{,}75$ (réduction).

(c) Non. Les sommets homologues sont opposés aux côtés homologues : [RS] et [LM] donnent $T \leftrightarrow K$; [ST] et [KM] donnent $R \leftrightarrow L$; [RT] et [KL] donnent $S \leftrightarrow M$. RST et LMK sont semblables (dans cet ordre). Or deux triangles semblables ont leurs angles deux à deux égaux, donc $\widehat{LMK} = \widehat{RST} = 90°$: KLM est rectangle en M, pas en L.

(d) Dans RST rectangle en S : $\tan\widehat{SRT} = \frac{ST}{RS} = \frac{15}{8}$, donc $\widehat{SRT} \approx 62°$. Comme $R \leftrightarrow L$, les angles en R et en L sont égaux : $\widehat{KLM} = \widehat{SRT} \approx 62°$.

(e) Aire de RST : $\frac{8 \times 15}{2} = 60$ cm². Les aires sont multipliées par k^2 : aire de KLM $= 60 \times 0{,}75^2 = 60 \times 0{,}5625 = 33{,}75$ cm².

Ex. 20 ★★★ **Trois voiles pour un club**

(a) Côtés rangés. EFG : 3 ; 4,5 ; 4,95. ABC : 4,2 ; 6,3 ; 7. $\frac{FG}{AC} = \frac{3}{4{,}2} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ et $\frac{EF}{AB} = \frac{4{,}5}{6{,}3} = \frac{45}{63} = \frac{5}{7}$. Le raisonnement ne suffit pas : deux quotients égaux ne suffisent pas, il faut vérifier le troisième, $\frac{EG}{BC}$.

(b) Produits en croix : $4{,}95 \times 4{,}2 = 20{,}79$ et $7 \times 3 = 21$. $20{,}79 \neq 21$, donc $\frac{4{,}95}{7} \neq \frac{3}{4{,}2}$ (en fait $\frac{4{,}95}{7} \approx 0{,}707$ et $\frac{5}{7} \approx 0{,}714$). Les arrondis cachaient la différence. Un quotient diffère : les longueurs ne sont pas proportionnelles, donc ABC et EFG ne sont pas semblables.

(c) Côtés rangés. RST : 2,4 ; 3,6 ; 4. ABC : 4,2 ; 6,3 ; 7. $\frac{ST}{AC} = \frac{2{,}4}{4{,}2} = \frac{4}{7}$; $\frac{RT}{AB} = \frac{3{,}6}{6{,}3} = \frac{4}{7}$; $\frac{RS}{BC} = \frac{4}{7}$. Les longueurs sont proportionnelles. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc ABC et RST sont semblables, avec $k = \frac{4}{7}$ (réduction).

(d) [AC] et [ST] sont homologues, donc $B \leftrightarrow R$; [AB] et [RT] donnent $C \leftrightarrow S$; [BC] et [RS] donnent $A \leftrightarrow T$. ABC et TRS sont semblables (dans cet ordre).

Ex. 21 ★★★ **Une découpe dans un coin de plaque**

(a) N est sur [AB], donc $AN = AB - NB = 10 - 4{,}4 = 5{,}6$ cm.

(b) Côtés rangés. AMN : $MN = 3{,}2$; $AM = 4$; $AN = 5{,}6$. ABC : $BC = 8$; $AB = 10$; $AC = 14$. $\frac{MN}{BC} = \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4$; $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4$; $\frac{AN}{AC} = \frac{5{,}6}{14} = 0{,}4$. Les longueurs sont proportionnelles. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc AMN et ABC sont semblables, avec $k = 0{,}4$ (réduction).

(c) [MN] et [BC] sont homologues, donc $A \leftrightarrow A$; [AM] et [AB] donnent $N \leftrightarrow C$; [AN] et [AC] donnent $M \leftrightarrow B$. AMN et ABC sont semblables (dans cet ordre). Comme $M \leftrightarrow B$, l'angle égal à $\widehat{ABC}$ est $\widehat{AMN}$.

(d) Non. M est sur [AC] et N sur [AB]. Si (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$. Or $\frac{AM}{AC} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0{,}29$ et $\frac{AN}{AB} = \frac{5{,}6}{10} = 0{,}56$. Ces quotients sont différents, donc (MN) et (BC) ne sont pas parallèles : M est homologue de B, pas de C.

(e) Lou multiplie l'aire par k au lieu de k^2 (elle trouve 15,68 cm²). Les aires sont multipliées par k^2 : aire de AMN $\approx 39{,}2 \times 0{,}4^2 = 39{,}2 \times 0{,}16 = 6{,}272$, soit environ 6,3 cm².

4. *Repérer les sommets et les côtés homologues*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes — Les angles égaux donnent les homologues**

(a) Dans ABC : $\widehat{BAC} = 180° - (58° + 47°) = 75°$.

(b) Dans RST : $\widehat{RST} = 180° - (75° + 58°) = 47°$.

(c) Non. Les sommets homologues sont les sommets des angles égaux. Or $\widehat{ABC} = 58°$ et $\widehat{RST} = 47°$: ces angles ne sont pas égaux, donc B n'est pas l'homologue de S. En fait $A \leftrightarrow R$ (75°), $B \leftrightarrow T$ (58°) et $C \leftrightarrow S$ (47°).

(d) On sait que $\widehat{ABC} = \widehat{RTS} = 58°$ et que $\widehat{ACB} = \widehat{RST} = 47°$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc ABC et RTS sont semblables (dans cet ordre).

(e) $[BC]$ est opposé à l'angle de sommet A (75°). Son homologue est le côté opposé à l'angle de sommet R : c'est $[TS]$. Sur la figure, l'un est horizontal et l'autre vertical : le triangle RST est tourné et retourné.

Ex. 22 (suite)

(f) $[AC]$ est opposé à l'angle de sommet B (58°). Son homologue est le côté opposé à l'angle de sommet T : c'est $[RS]$.

Ex. 23 ★★☆ **Automatismes — Lire « dans cet ordre » lettre à lettre**

(a) On lit lettre à lettre : $D \leftrightarrow K$, $E \leftrightarrow J$, $F \leftrightarrow L$.

(b) K est l'homologue de D, donc $\widehat{LKJ} = \widehat{EDF}$. Dans DEF : $\widehat{EDF} = 180° - (64° + 46°) = 70°$.
Donc $\widehat{LKJ} = 70°$.

(c) Non. $[EF]$ joint E et F, dont les homologues sont J et L : son homologue est $[JL]$, pas $[KL]$. La position sur le dessin ne compte pas : KJL est retourné.

(d) $[KL]$ joint K et L, qui sont les homologues de D et F : son homologue est $[DF]$.

(e) $\frac{KJ}{DE} = \frac{JL}{EF} = \frac{KL}{DF}$.

Ex. 24 ★★☆ **Papillon : les homologues de part et d'autre de O**

(a) On sait que les points M, O, S sont alignés, ainsi que N, O, T. Or deux angles opposés par le sommet sont égaux, donc $\widehat{MON} = \widehat{SOT}$. On sait aussi que $(MN) \parallel (ST)$ et que la droite (MS) les coupe. Or deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{OMN} = \widehat{OST}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc OMN et OTS sont semblables.

(b) $O \leftrightarrow O$ (angles opposés par le sommet), $M \leftrightarrow S$ (angles alternes-internes) et $N \leftrightarrow T$. Les sommets homologues M et S sont de part et d'autre de O. Les triangles OMN et OST sont semblables (dans cet ordre), donc $\frac{OS}{OM} = \frac{OT}{ON} = \frac{ST}{MN}$.

(c) $k = \frac{OS}{OM} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. $[ST]$ est l'homologue de $[MN]$ (et non $[OT]$, même si T est en haut comme M) : $ST = 3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ cm.

(d) $[ON]$ est l'homologue de $[OT]$. Pour revenir au petit triangle, on divise par k : $ON = 3{,}9 \div 1{,}5 = 2{,}6$ cm.

Ex. 25 ★★☆ **Hauteur issue de l'angle droit : trois triangles semblables**

(a) Dans PQR : $\widehat{PRQ} = 180° - (90° + 34°) = 56°$. Dans HPQ, rectangle en H : $\widehat{HPQ} = 180° - (90° + 34°) = 56°$. Puis $\widehat{HPR} = 90° - 56° = 34°$.

Ex. 25 **(suite)**

(b) PQR et PHQ ont un angle droit et l'angle commun $\widehat{PQR} = \widehat{PQH} = 34°$. PQR et PHR ont un angle droit et l'angle commun $\widehat{PRQ} = \widehat{PRH} = 56°$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc les trois triangles sont semblables. Homologues : angle droit $P \leftrightarrow H \leftrightarrow H$; $34° : Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow P$; $56° : R \leftrightarrow P \leftrightarrow R$. Dans l'ordre : PQR, HQP et HPR.

(c) PQR et HPR sont semblables (dans cet ordre). $[PQ]$ joint P et Q, dont les homologues sont H et P : son homologue est $[HP]$, et non $[PR]$. $[QR]$ joint Q et R, dont les homologues sont P et R : son homologue est $[PR]$
(opposé à l'angle droit).

(d) $\dfrac{HP}{PQ} = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{HR}{PR}$.

Ex. 26 ★★★ **Un triangle retourné à l'intérieur d'un autre**

(a) On sait que D est sur $[AB]$ et E sur $[AC]$, donc $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ (angle commun). De plus, $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (donné). Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc les triangles ADE et ABC sont semblables.

(b) Non. Les sommets homologues sont les sommets des angles égaux, pas les sommets placés au même endroit sur la figure. On a $A \leftrightarrow A$ (angle commun) et $D \leftrightarrow C$ (car $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$). Le troisième angle est donc aussi égal : $E \leftrightarrow B$. Le triangle ADE est retourné. On écrit : ADE et ACB sont semblables
(dans cet ordre).

(c) On lit lettre à lettre : $AD \leftrightarrow AC$, $DE \leftrightarrow CB$, $AE \leftrightarrow AB$, donc $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{CB} = \dfrac{AE}{AB}$.

(d) $k = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{5}{7{,}5} = \dfrac{2}{3}$. Le côté $[AE]$ est homologue de $[AB]$: $AE = 9 \times \dfrac{2}{3} = 6$ cm. Le côté $[DE]$ est homologue de $[CB]$: $DE = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$ cm.

(e) $DB = AB - AD = 9 - 5 = 4$ cm et $CE = AC - AE = 7{,}5 - 6 = 1{,}5$ cm. Périmètre de $DBCE$: $DB + BC + CE + ED = 4 + 6 + 1{,}5 + 4 = 15{,}5$ cm.

Ex. 27 ★★★ **Le plan d'une passerelle en papillon**

(a) Le triangle IUR est rectangle en U. D'après le théorème de Pythagore : $IR^2 = IU^2 + UR^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 = 5{,}76 + 3{,}24 = 9$, donc $IR = 3$ m.

Ex. 27 **(suite)**

(b) On sait que les points R, I, L sont alignés, ainsi que U, I, K. Or deux angles opposés par le sommet sont égaux, donc $\widehat{UIR} = \widehat{KIL}$. On sait aussi que $(UR) \parallel (KL)$ et que la droite (RL) les coupe. Or deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{URI} = \widehat{KLI}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc IUR et ILK sont semblables. Homologues : $I \leftrightarrow I$, $R \leftrightarrow L$, et donc $U \leftrightarrow K$. Les homologues sont de part et d'autre de I. L'ordre des lettres « ILK » de l'énoncé n'est pas l'ordre des homologues : on écrit IUR et IKL
(dans cet ordre).

(c) $k = \dfrac{IK}{IU} = \dfrac{4}{2{,}4} = \dfrac{5}{3}$. Le côté $[KL]$ est homologue de $[UR]$: $KL = 1{,}8 \times \dfrac{5}{3} = 3$ m. Le côté $[IL]$ est homologue de $[IR]$: $IL = 3 \times \dfrac{5}{3} = 5$ m.

(d) Dans le triangle IUR, rectangle en U : $\tan\widehat{UIR} = \dfrac{UR}{IU} = \dfrac{1{,}8}{2{,}4} = 0{,}75$, donc $\widehat{UIR} \approx 37°$. Comme $L \leftrightarrow R$, on a $\widehat{ILK} = \widehat{IRU} = 180° - 90° - \widehat{UIR} \approx 53°$.

(e) Aire de IUR : $\dfrac{2{,}4 \times 1{,}8}{2} = 2{,}16$ m². Les aires sont multipliées par k^2 : aire de $IKL = 2{,}16 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = 2{,}16 \times \dfrac{25}{9} = 6$ m².
(Vérification : $\dfrac{IK \times KL}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ m².)

Ex. 28 ★★★ **Hauteur issue de l'angle droit : quotients et aires**

(a) Le triangle VZW est rectangle en Z. D'après le théorème de Pythagore : $VW^2 = ZV^2 + ZW^2 = 64 + 36 = 100$, donc $VW = 10$ cm.

(b) Comme H est sur $[VW]$, $\widehat{ZVH} = \widehat{ZVW}$ (angle commun en V). De plus, $\widehat{ZHV} = 90° = \widehat{VZW}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc les triangles ZVH et VZW sont semblables. Homologues : $V \leftrightarrow V$, $H \leftrightarrow Z$ (angles droits), donc $Z \leftrightarrow W$. On écrit : VHZ et VZW sont semblables
(dans cet ordre).

(c) Non. $[HZ]$ est opposé à l'angle de sommet V dans VHZ. Son homologue est le côté opposé à l'angle de sommet V dans VZW : c'est $[ZW]$, pas $[VW]$. De même, $[VZ]$ est homologue de $[VW]$. En lisant lettre à lettre VHZ et VZW, l'égalité correcte est $\dfrac{VH}{VZ} = \dfrac{HZ}{ZW} = \dfrac{VZ}{VW}$.

(d) $k = \dfrac{VZ}{VW} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$. $[HZ]$ est homologue de $[ZW]$: $ZH = 6 \times 0{,}8 = 4{,}8$ cm. $[VH]$ est homologue de $[VZ]$: $VH = 8 \times 0{,}8 = 6{,}4$ cm.

Ex. 28 **(suite)**

(e) $HW = VW - VH = 10 - 6{,}4 = 3{,}6$ cm. Théo se trompe : les longueurs sont multipliées par k, mais les aires sont multipliées par $k^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$. Aire de VZW : $\frac{8\times 6}{2} = 24$ cm², donc aire de VHZ : $0{,}64 \times 24 = 15{,}36$ cm².

5. *Calculer le coefficient k et une longueur*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : k à l'aller et au retour**

(a) $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow T$, $C \leftrightarrow S$, donc [AB] et [RT], [BC] et [TS], [AC] et [RS] sont des côtés homologues.

(b) [TS] est homologue de [BC] (et non de [AB]) : $k = \frac{TS}{BC} = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

(c) [RT] est homologue de [AB] : $RT = AB \times k = 4 \times 1{,}6 = 6{,}4$ cm.

(d) [AC] est homologue de [RS] et on revient au premier triangle, donc on divise : $AC = RS \div k = 9{,}6 \div 1{,}6 = 6$ cm.

(e) Oui. $k = 1{,}6 > 1$: c'est un agrandissement, et on a bien $6{,}4 > 4$, $8 > 5$ et $9{,}6 > 6$. Dans ABC, $4 < 5 < 6$; dans RTS, $6{,}4 < 8 < 9{,}6$: l'ordre des côtés est conservé.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : triangles emboîtés et k exact**

(a) M est sur [AB], donc $AB = AM + MB = 6 + 4 = 10$ cm.

(b) [AB] est homologue de [AM] : on prend le côté entier AB, pas le morceau MB. $k = \frac{AB}{AM} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

(c) [BC] est homologue de [MN] : $BC = MN \times k = 4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$ cm. On arrondit seulement à la fin, sinon avec $k \approx 1{,}7$ on trouverait 6,8 cm.

(d) [AN] est homologue de [AC] et on revient au petit triangle, donc on divise : $AN = AC \div \frac{5}{3} = 8{,}5 \times \frac{3}{5} = 5{,}1$ cm.

Ex. 31 ★★☆ **La hauteur d'un sapin mesurée avec un miroir**

(a) On sait que $\widehat{OPM} = \widehat{THM} = 90°$ et que $\widehat{OMP} = \widehat{TMH}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc OPM et THM sont semblables (dans cet ordre).

(b) $O \leftrightarrow T$, $P \leftrightarrow H$, $M \leftrightarrow M$: [OP] et [TH], [PM] et [HM], [OM] et [TM] sont homologues. $k = \frac{HM}{PM} = \frac{13}{2} = 6{,}5$.

Ex. 31 **(suite)**

(c) [TH] est homologue de [OP] : $TH = OP \times k = 1{,}5 \times 6{,}5 = 9{,}75$ m. Le sapin mesure 9,75 m.

(d) Le triangle OPM est rectangle en P, donc d'après le théorème de Pythagore, $OM^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25$ et $OM = 2{,}5$ m. [TM] est homologue de [OM] : $TM = 2{,}5 \times 6{,}5 = 16{,}25$ m.

Ex. 32 ★★☆ **L'erreur de Yanis dans le papillon**

(a) O est sur [AC], donc $OC = AC - OA = 8{,}5 - 5 = 3{,}5$ cm.

(b) Le côté homologue de [OA] dans OCD est [OC] : $k = \frac{OC}{OA} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$. Yanis a pris AC, qui n'est pas un côté du triangle OCD : ce n'est donc pas le côté homologue de [OA].

(c) [CD] est homologue de [AB] : $CD = AB \times k = 7 \times 0{,}7 = 4{,}9$ cm. $k = 0{,}7 < 1$: c'est une réduction, et on a bien $4{,}9 < 7$. Avec le k de Yanis, on trouverait 11,9 cm, plus grand que AB : c'est impossible.

(d) [OB] est homologue de [OD] et on revient au premier triangle, donc on divise : $OB = OD \div k = 2{,}8 \div 0{,}7 = 4$ cm
(et non $2{,}8 \times 0{,}7$).

Ex. 33 ★★★ **Hauteur issue de l'angle droit : Pythagore, k et trigonométrie**

(a) Le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$, donc $BC = \sqrt{289} = 17$ cm.

(b) On sait que $\widehat{BAC} = 90°$ et que $\widehat{BHA} = 90°$, car (AH) est une hauteur. L'angle $\widehat{ABC} = \widehat{HBA}$ est commun aux deux triangles. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc ABC et HBA sont semblables. Les sommets homologues sont $A \leftrightarrow H$, $B \leftrightarrow B$ et $C \leftrightarrow A$ (et non dans l'ordre alphabétique).

(c) [BC] est opposé à l'angle droit de ABC. Son homologue est [BA], opposé à l'angle droit de HBA.
Donc $k = \frac{BA}{BC} = \frac{8}{17}$. Comme $k < 1$, c'est une réduction.

(d) [AB] (opposé à C) a pour homologue [HB] (opposé à A) : $BH = 8 \times \frac{8}{17} = \frac{64}{17} \approx 3{,}8$ cm. [AC] (opposé à B) a pour homologue [HA] (opposé à B) : $AH = 15 \times \frac{8}{17} = \frac{120}{17} \approx 7{,}1$ cm. Contrôle : dans ABC, AB < AC < BC ($8 < 15 < 17$). Dans HBA, BH < AH < BA ($3{,}8 < 7{,}1 < 8$). L'ordre est conservé et les longueurs sont plus petites, ce qui convient pour une réduction.

Ex. 33 **(suite)**

(e) Dans ABC rectangle en A, $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8}$, donc $\widehat{ABC} \approx 62°$. Dans ABC, $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC}$. Dans AHC rectangle en H, $\widehat{HAC} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$. Donc $\widehat{HAC} \approx 62°$.

Ex. 34 ★★★ **L'échelle double et sa barre de sécurité**

(a) On sait que $(MN) \parallel (AB)$. Les angles $\widehat{SMN}$ et $\widehat{SAB}$ sont correspondants. Or deux angles correspondants formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{SMN} = \widehat{SAB}$. De plus, l'angle $\widehat{MSN} = \widehat{ASB}$ est commun aux deux triangles. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc SMN et SAB sont semblables, avec $S \leftrightarrow S$, $M \leftrightarrow A$ et $N \leftrightarrow B$.

(b) Erreur : MA est un morceau. Le côté homologue de [SM] est le côté entier [SA]. Contrôle : on passe du petit triangle au grand, donc AB doit être plus grand que MN. Or 42 cm $<$ 56 cm, c'est impossible. Correction : $SA = 1{,}2 + 0{,}9 = 2{,}1$ m et $k = \frac{SA}{SM} = \frac{2{,}1}{1{,}2} = 1{,}75$. Avec MN = 56 cm = 0,56 m, on obtient $AB = 0{,}56 \times 1{,}75 = 0{,}98$ m.

(c) [SN] est dans le petit triangle et son homologue est [SB]. On revient au premier triangle, donc on divise : $SN = 2{,}24 \div 1{,}75 = 1{,}28$ m. Puis $NB = 2{,}24 - 1{,}28 = 0{,}96$ m.

(d) Périmètre de SMN : $1{,}2 + 1{,}28 + 0{,}56 = 3{,}04$ m. Le périmètre est multiplié par k, donc le périmètre de SAB vaut $3{,}04 \times 1{,}75 = 5{,}32$ m. Contrôle : $2{,}1 + 2{,}24 + 0{,}98 = 5{,}32$ m.

Ex. 35 ★★★ **Voilerie : quelles voiles sont semblables ?**

(a) On range les côtés dans l'ordre croissant. Voile 1 : EF = 3,6 ; EG = 4,8 ; FG = 6. Voile 2 : RT = 4,2 ; RS = 5,6 ; ST = 7. On calcule $\frac{RT}{EF} = \frac{4{,}2}{3{,}6} = \frac{7}{6}$; $\frac{RS}{EG} = \frac{5{,}6}{4{,}8} = \frac{7}{6}$; $\frac{ST}{FG} = \frac{7}{6}$. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc EFG et RTS sont semblables (dans cet ordre : $E \leftrightarrow R$, $F \leftrightarrow T$, $G \leftrightarrow S$), avec $k = \frac{7}{6}$.

(b) On range les côtés : 5,4 ; 7,2 ; 9,5. On calcule $\frac{5{,}4}{3{,}6} = 1{,}5$ et $\frac{7{,}2}{4{,}8} = 1{,}5$, mais $\frac{9{,}5}{6} \approx 1{,}58 \neq 1{,}5$. Deux quotients égaux ne suffisent pas : les longueurs ne sont pas proportionnelles, donc les voiles 1 et 3 ne sont pas semblables.

Ex. 35 **(suite)**

(c) EFG est rectangle en E, donc son aire vaut $\frac{3{,}6 \times 4{,}8}{2} = 8{,}64$ m². L'aire est multipliée par k^2 et non par k : $8{,}64 \times \left(\frac{7}{6}\right)^2 = 8{,}64 \times \frac{49}{36} = 11{,}76$ m².

(d) $k^2 = \frac{2{,}16}{8{,}64} = 0{,}25$, donc $k = 0{,}5$ (car $0{,}5^2 = 0{,}25$). C'est une réduction. Le plus grand côté de la voile 1 est FG = 6 m, donc le plus grand côté de la voile du dériveur mesure $6 \times 0{,}5 = 3$ m.

6. *Calculer un périmètre ou une aire*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : périmètre et aire de l'image**

(a) Périmètre : $36 \times 3 = 108$ cm. Aire : $54 \times 3^2 = 54 \times 9 = 486$ cm²
(et non 54×3).

(b) $k^2 = 1{,}2^2 = 1{,}44$. Aire : $54 \times 1{,}44 = 77{,}76$ cm².

(c) $k = 0{,}5 < 1$: c'est une réduction, donc l'aire est plus petite. $k^2 = 0{,}25$ et l'aire vaut $54 \times 0{,}25 = 13{,}5$ cm².

(d) Périmètre : $36 \times \frac{4}{3} = 48$ cm. Aire : $54 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 54 \times \frac{16}{9} = 96$ cm².

(e) $k = \frac{126}{36} = 3{,}5$. $k^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$, donc l'aire vaut $54 \times 12{,}25 = 661{,}5$ cm².

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : retrouver k avec les aires**

(a) $k^2 = \frac{63}{7} = 9$, donc $k = 3$ car $3^2 = 9$
(et non $9 \div 2 = 4{,}5$).

(b) $k^2 = \frac{75}{12} = 6{,}25$, donc $k = 2{,}5$ car $2{,}5^2 = 6{,}25$. Les côtés sont multipliés par 2,5.

(c) Non. $k^2 = 16$, donc $k = 4$ car $4^2 = 16$: les côtés sont 4 fois plus longs, pas 8.

(d) $k = \frac{3}{5}$, donc $k^2 = \frac{9}{25}$. Aire du petit : $50 \times \frac{9}{25} = 18$ cm².

(e) $k^2 = \frac{2}{98} = \frac{1}{49}$, donc $k = \frac{1}{7}$ car $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$.

Ex. 38 ★★☆ **Le petit triangle et le trapèze**

(a) On sait que $(MN) \parallel (BC)$. L'angle $\widehat{MAN}$ est commun aux deux triangles. Or deux angles correspondants formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc AMN et ABC sont semblables
(dans cet ordre).

(b) Attention, le côté entier est AB = 4 + 6 = 10 cm, homologue de AM.
Donc $k = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Ex. 38 **(suite)**

(c) $k^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$. Aire de AMN : $45 \times 0{,}16 = 7{,}2$ cm².

(d) Aire de MNCB = aire de ABC − aire de AMN = $45 - 7{,}2 = 37{,}8$ cm².

Ex. 39 ★★☆ **Le périmètre direct et l'erreur d'Inès**

(a) On sait que $\widehat{LKM} = \widehat{RQP}$ et $\widehat{KML} = \widehat{QPR}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc KLM et QRP sont semblables (dans cet ordre) : $K \leftrightarrow Q$, $L \leftrightarrow R$, $M \leftrightarrow P$. [QP] est homologue de [KM] : $k = \frac{QP}{KM} = \frac{9}{6} = 1{,}5$.

(b) Le périmètre est multiplié par k : $16{,}8 \times 1{,}5 = 25{,}2$ cm.

(c) Non : elle a multiplié l'aire par k alors qu'il faut la multiplier par k^2. $k^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$, donc l'aire de QRP vaut $13{,}44 \times 2{,}25 = 30{,}24$ cm².

Ex. 40 ★★★ **Le papillon rectangle**

(a) Les points A, O, E sont alignés, de même que B, O, D. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{EOD}$ sont opposés par le sommet. Or deux angles opposés par le sommet sont égaux, donc $\widehat{AOB} = \widehat{EOD}$. On sait que $(AB) \parallel (DE)$. Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OED}$ sont alternes-internes (sécante (AE)). Or deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{OAB} = \widehat{OED}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc OAB et OED sont semblables (dans cet ordre) : $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow D$.

(b) Dans OAB, le plus grand côté est [AB]. $AB^2 = 10^2 = 100$ et $OA^2 + OB^2 = 36 + 64 = 100$.
Donc $AB^2 = OA^2 + OB^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O.

(c) Périmètre de OAB : $6 + 8 + 10 = 24$ cm. OAB est rectangle en O, donc son aire vaut $\frac{OA \times OB}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$ cm².

(d) [OE] est homologue de [OA] : $k = \frac{OE}{OA} = \frac{7{,}5}{6} = 1{,}25$. Le périmètre est multiplié par k : périmètre de OED = $24 \times 1{,}25 = 30$ cm.

(e) Noé se trompe : l'aire n'est multipliée ni par k ni par $2 \times k$ (cela donnerait $24 \times 2{,}5 = 60$ cm²). Elle est multipliée par $k^2 = 1{,}25^2 = 1{,}5625$. Aire de OED = $24 \times 1{,}5625 = 37{,}5$ cm². Quotient : $\frac{24}{37{,}5} = \frac{240}{375} = \frac{16}{25}$. On retrouve bien $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, où $\frac{4}{5} = \frac{6}{7{,}5}$ est le coefficient de réduction qui fait passer de OED à OAB.

Ex. 41 ★★★ **La hauteur qui partage le triangle**

(a) RST est rectangle en R. D'après le théorème de Pythagore, $ST^2 = RS^2 + RT^2 = 144 + 256 = 400$, donc $ST = 20$ cm. Aire de RST = $\frac{RS \times RT}{2} = \frac{12 \times 16}{2} = 96$ cm².

(b) On sait que $\widehat{SHR} = 90°$ et $\widehat{SRT} = 90°$. L'angle $\widehat{RST}$ (qui est aussi $\widehat{HSR}$) est un angle commun aux deux triangles. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc HSR et RST sont semblables (dans cet ordre) : $H \leftrightarrow R$, $S \leftrightarrow S$, $R \leftrightarrow T$.

(c) [SR] (opposé à H) est homologue de [ST] (opposé à R) : $k = \frac{SR}{ST} = \frac{12}{20} = 0{,}6$. L'aire est multipliée par $k^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$: aire de HSR = $96 \times 0{,}36 = 34{,}56$ cm².
Contrôle : c'est une réduction, et $34{,}56 < 96$.

(d) Les triangles HSR et HRT forment le triangle RST : aire de HRT = $96 - 34{,}56 = 61{,}44$ cm².

(e) Avec les 76,8 cm² de Tom, on aurait $34{,}56 + 76{,}8 = 111{,}36$ cm², soit plus que l'aire de RST (96 cm²). C'est impossible. Erreur : $\frac{76{,}8}{96} = 0{,}8 = \frac{RT}{ST}$, donc Tom a multiplié l'aire par $k = 0{,}8$ au lieu de k^2. Le bon calcul est $96 \times 0{,}8^2 = 96 \times 0{,}64 = 61{,}44$ cm² : on retrouve le résultat de la question précédente.

Ex. 42 ★★★ **La voile du char à voile**

(a) Je range les côtés dans l'ordre croissant. XYZ : 13 ; 14 ; 15. LMN : 19,5 ; 21 ; 22,5. $\frac{XZ}{MN} = \frac{13}{19{,}5} = \frac{2}{3}$; $\frac{XY}{LM} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$; $\frac{YZ}{LN} = \frac{15}{22{,}5} = \frac{2}{3}$. Les longueurs sont proportionnelles. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc LMN et XYZ sont semblables. Les sommets opposés à des côtés homologues se correspondent : $L \leftrightarrow Y$, $M \leftrightarrow X$, $N \leftrightarrow Z$.
Donc LMN et YXZ sont semblables (dans cet ordre), avec un coefficient de réduction $k = \frac{2}{3}$.

(b) Côtés rangés de UVW : 13 ; 14 ; 15,4. Sami n'a calculé que deux quotients. Le troisième vaut $\frac{15{,}4}{22{,}5} \approx 0{,}684$, alors que $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Les trois quotients ne sont pas égaux, donc les longueurs ne sont pas proportionnelles : UVW et LMN ne sont pas semblables, même s'ils se ressemblent.

(c) L'aire est multipliée par $k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Aire de XYZ = $189 \times \frac{4}{9} = 84$ cm².
Contrôle : c'est une réduction, donc l'aire diminue ($84 < 189$). Et non $189 \times \frac{2}{3} = 126$ cm², qui reviendrait à multiplier l'aire par k.

Ex. 42 **(suite)**

(d) Jade a tort : 25 est le rapport des aires, donc $k^2 = 25$. Or $k = 5$, car $5^2 = 25$ (alors que $12{,}5^2 = 156{,}25$). Les côtés de PQR sont 5 fois plus longs que ceux de LMN. Périmètre de LMN : $21 + 19{,}5 + 22{,}5 = 63$ cm. Le périmètre est multiplié par k : périmètre de PQR $= 63 \times 5 = 315$ cm
(en cm, car c'est une longueur).

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : k, longueurs, aire et conversion**

(a) [UV] est homologue de [KL] : $k = \frac{UV}{KL} = \frac{12}{10} = 1{,}2$. Comme $k > 1$, c'est un agrandissement.

(b) [VT] est homologue de [LM] : $VT = 7{,}5 \times 1{,}2 = 9$ cm.

(c) [KM] est homologue de [UT]. On revient au premier triangle, donc on divise : $KM = 15 \div 1{,}2 = 12{,}5$ cm.

(d) L'aire est multipliée par k^2 : $37{,}5 \times 1{,}2^2 = 37{,}5 \times 1{,}44 = 54$ cm². Comme 1 cm² = 100 mm², l'aire de UVT vaut $54 \times 100 = 5\,400$ mm².

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : retrouver k d'après les aires**

(a) Les aires sont multipliées par k^2 : $k^2 = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$. Or $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ et k est positif, donc $k = \frac{2}{3}$.

(b) [ZX] est homologue de [BD] : $ZX = 12 \times \frac{2}{3} = 8$ cm.

(c) Non. [XY] est un côté du second triangle et [DF] est son homologue dans le premier : pour revenir au premier triangle, on divise par k. $DF = 6 \div \frac{2}{3} = 6 \times \frac{3}{2} = 9$ cm.

Ex. 45 ★★☆ **La hauteur d'un clocher avec un miroir**

(a) On sait que $\widehat{EAM} = \widehat{SPM} = 90°$ et que $\widehat{AME} = \widehat{PMS}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc AEM et PSM sont semblables, dans cet ordre : $A \leftrightarrow P$, $E \leftrightarrow S$, $M \leftrightarrow M$.

(b) On met les longueurs dans la même unité : $AM = 60$ cm $= 0{,}6$ m. [MP] est homologue de [MA] : $k = \frac{MP}{MA} = \frac{12}{0{,}6} = 20$.

(c) [PS] est homologue de [AE] : $PS = 1{,}6 \times 20 = 32$ m. Le clocher mesure 32 m de haut.

Ex. 46 ★★☆ **Brevet : réciproque de Pythagore, similitude et aire**

(a) Le plus grand côté de EFG est [FG]. $FG^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$ et $EF^2 + EG^2 = 3{,}3^2 + 5{,}6^2 = 10{,}89 + 31{,}36 = 42{,}25$. On a $FG^2 = EF^2 + EG^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en E.

(b) Je range les côtés du plus petit au plus grand. EFG : 3,3 ; 5,6 ; 6,5. RST : $ST = 4{,}95$; $RT = 8{,}4$; $RS = 9{,}75$. $\frac{4{,}95}{3{,}3} = 1{,}5$; $\frac{8{,}4}{5{,}6} = 1{,}5$; $\frac{9{,}75}{6{,}5} = 1{,}5$. Or si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.
Donc EFG et TSR sont semblables, dans cet ordre ($E \leftrightarrow T$, $F \leftrightarrow S$, $G \leftrightarrow R$).

(c) Dans EFG, rectangle en E : $\tan \widehat{EGF} = \frac{EF}{EG} = \frac{3{,}3}{5{,}6}$, donc $\widehat{EGF} \approx 31°$. Comme $G \leftrightarrow R$, son homologue est $\widehat{TRS}$, et $\widehat{TRS} = \widehat{EGF} \approx 31°$.

(d) EFG est rectangle en E : son aire vaut $\frac{3{,}3 \times 5{,}6}{2} = 9{,}24$ cm². Avec $k = 1{,}5$, l'aire de RST vaut $9{,}24 \times 1{,}5^2 = 9{,}24 \times 2{,}25 = 20{,}79$ cm².

Ex. 47 ★★★ **Brevet : papillon, Pythagore et aire**

(a) Le triangle ORS est rectangle en R. D'après le théorème de Pythagore : $OS^2 = OR^2 + RS^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, donc $OS = \sqrt{169} = 13$ cm.

(b) On sait que R, O, U sont alignés et que S, O, T sont alignés. Or deux angles opposés par le sommet sont égaux, donc $\widehat{ROS} = \widehat{UOT}$. On sait aussi que $(RS) \parallel (TU)$, coupées par la sécante (ST). Or deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{RSO} = \widehat{UTO}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc ORS et TUO sont semblables. Homologues : $O \leftrightarrow O$, $R \leftrightarrow U$, $S \leftrightarrow T$. Dans l'ordre, on écrit : ORS et OUT.

(c) [OT] est homologue de [OS], donc $k = \frac{OT}{OS} = \frac{9{,}75}{13} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$. C'est une réduction. [OU] est homologue de [OR] : $OU = 12 \times \frac{3}{4} = 9$ cm. [UT] est homologue de [RS] : $UT = 5 \times \frac{3}{4} = 3{,}75$ cm.

(d) Aire de ORS : $\frac{12 \times 5}{2} = 30$ cm². Léo a tort : l'aire est multipliée par k^2, pas par k. Sa méthode donnerait $30 \times \frac{3}{4} = 22{,}5$ cm², ce qui est faux. Aire de OUT : $30 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 30 \times \frac{9}{16} = 16{,}875$ cm². Vérification : $\widehat{OUT} = \widehat{ORS} = 90°$ (angles homologues), donc l'aire vaut $\frac{9 \times 3{,}75}{2} = 16{,}875$ cm². L'aire du triangle OUT est de 16,875 cm².

Ex. 48 ★★★ **L'ombre d'un immeuble à Annecy**

(a) On sait que le bâton et l'immeuble sont verticaux et que le sol est horizontal, donc $\widehat{TGM} = \widehat{LKN} = 90°$. On sait aussi que $(TM) \parallel (LN)$, coupées par la droite du sol (GN). Or deux angles correspondants formés par deux droites parallèles sont égaux, donc $\widehat{TMG} = \widehat{LNK}$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc GTM et NLK sont semblables. Homologues : $G \leftrightarrow K$, $T \leftrightarrow L$, $M \leftrightarrow N$. Dans l'ordre, on écrit : GTM et KLN.

(b) Dans le triangle GTM rectangle en G : $\tan\widehat{TMG} = \frac{GT}{GM} = \frac{150}{80} = 1{,}875$.
Donc $\widehat{TMG} \approx 62°$. Les rayons font un angle d'environ $62°$ avec le sol.

(c) On convertit dans la même unité : $KN = 10{,}4$ m $= 1\,040$ cm. [KN] est homologue de [GM], donc $k = \frac{KN}{GM} = \frac{1\,040}{80} = 13$. Attention : $\frac{10{,}4}{80}$ serait faux, car les unités sont mélangées. [KL] est homologue de [GT] : $KL = 150 \times 13 = 1\,950$ cm $= 19{,}5$ m. L'immeuble mesure 19,5 m de haut.

(d) Le triangle GTM est rectangle en G. D'après le théorème de Pythagore : $TM^2 = 150^2 + 80^2 = 22\,500 + 6\,400 = 28\,900$, donc $TM = 170$ cm. [LN] est homologue de [TM] : $LN = 170 \times 13 = 2\,210$ cm $= 22{,}1$ m. Le rayon mesure 22,1 m entre le sommet de l'immeuble et le bout de son ombre.

Ex. 49 ★★★ **Brevet : hauteur issue de l'angle droit et tangente**

(a) Le triangle PLC est rectangle en L. D'après le théorème de Pythagore : $PC^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$, donc $PC = 20$ cm. On a ensuite $\tan\widehat{LPC} = \frac{LC}{PL} = \frac{12}{16} = 0{,}75$, donc $\widehat{LPC} \approx 37°$.

(b) H est sur [PC], donc les triangles PHL et PLC ont l'angle commun $\widehat{LPC} = \widehat{HPL}$. On sait aussi que $\widehat{PHL} = 90°$ (hauteur) et $\widehat{PLC} = 90°$. Or si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.
Donc PHL et PLC sont semblables. Homologues : $P \leftrightarrow P$, $H \leftrightarrow L$, $L \leftrightarrow C$. Égalité des quotients : $\frac{PH}{PL} = \frac{HL}{LC} = \frac{PL}{PC}$.

(c) [PL] dans PHL est homologue de l'hypoténuse [PC] dans PLC, donc le coefficient de réduction de PLC à PHL est $k = \frac{PL}{PC} = \frac{16}{20} = 0{,}8$. Ensuite, [PH] est homologue de [PL] : $PH = 16 \times 0{,}8 = 12{,}8$ cm. [HL] est homologue de [LC] : $HL = 12 \times 0{,}8 = 9{,}6$ cm.

Ex. 49 **(suite)**

(d) Aire de PLC : $\frac{16 \times 12}{2} = 96$ cm². L'aire est multipliée par $k^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$. Aire de PHL : $96 \times 0{,}64 = 61{,}44$ cm².
Les triangles PHL et LHC forment ensemble le triangle PLC, donc l'aire de LHC vaut $96 - 61{,}44 = 34{,}56$ cm².
L'aire du triangle LHC est de 34,56 cm².