1. Rappels : symétries axiale et centrale

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : symétrique par rapport à O dans un repère**

(a) On change le signe des deux coordonnées : $A'(5\,;\,-2)$. Milieu de $[AA']$: $\frac{-5+5}{2}=0$ et $\frac{2+(-2)}{2}=0$, c'est bien $O(0\,;\,0)$.

(b) On change le signe des deux coordonnées : $B'(-2{,}5\,;\,4)$.

(c) Non. Yanis n'a changé que le signe de l'ordonnée : son point est le symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses. Par rapport à O, on change le signe des DEUX coordonnées : $C'(3\,;\,6)$.

(d) D′ est l'image, D est le point de départ. Comme O est le milieu de $[DD']$, on change aussi les deux signes : $D(6\,;\,-0{,}5)$.

(e) C'est le centre $O(0\,;\,0)$: en changeant les signes, on obtient $(-0\,;\,-0)=(0\,;\,0)$. O est le seul point invariant.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : axe oblique sur quadrillage**

(a) Lina n'a pas compté perpendiculairement à (d). Comme (d) est oblique, je suis la diagonale des carreaux : de A à (d), 2 carreaux en diagonale vers le bas à droite, puis 2 de plus. A′ est à 4 carreaux à droite et 4 carreaux en dessous de A.

(b) B : 3 carreaux en diagonale jusqu'à (d), puis 3 de plus : B′ est à 6 carreaux à droite et 6 en dessous de B. C : 2 carreaux en diagonale, puis 2 de plus : C′ est à 4 carreaux à droite et 4 en dessous de C. Je trace A′B′C′ : il est retourné en miroir.

(c) E′ est confondu avec E : les points de l'axe (d) sont invariants.

(d) De B, je compte 3 carreaux en diagonale vers le bas à droite et j'arrive sur (d) au point E. Encore 3 carreaux et j'arrive en B′.
Donc E est le milieu de [BB′]. De plus, (d) est perpendiculaire à [BB′].
Donc (d) est la médiatrice de [BB′].

Ex. 3 ★★☆ **Miroir ou demi-tour ?**

(a) La figure 1 est retournée en miroir. De A à (d_1) : 5 carreaux vers la droite, perpendiculairement à (d_1), puis 5 de plus, et j'arrive en A_1. C'est la même chose pour B, C et D. C'est la symétrie axiale d'axe (d_1).

(b) Non. De A à (d_2) : 2 carreaux vers le bas, perpendiculairement à (d_2), puis 2 de plus, et j'arrive en A_3. Le milieu de $[AA_3]$ est sur (d_2), pas en O. C'est un pliage le long de (d_2) : la figure 3 est retournée en miroir (tête en bas ET miroir). C'est la symétrie axiale d'axe (d_2).

(c) De A à O : 5 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. Je refais ce trajet après O et j'arrive en A_2 : O est le milieu de $[AA_2]$. De C à O : 2 carreaux vers la droite et 5 vers le bas, puis encore 2 et 5, et j'arrive en C_2. La figure a la tête en bas, sans miroir : c'est la symétrie centrale de centre O (un demi-tour).

Ex. 4 ★★☆ **Ce que la symétrie conserve**

(a) On sait que E′F′G′ est le symétrique de EFG par rapport à (d). Or une symétrie axiale conserve les longueurs et les angles.
Donc $E'F' = EF = 3$ cm et $\widehat{F'E'G'} = \widehat{FEG} = 72°$.

(b) H′ est confondu avec H : H est sur l'axe (d), et les points de l'axe sont invariants.

(c) Oui pour l'axe : la symétrie d'axe (d) échange E et E′, G et G′, donc elle transforme EGG′E′ en lui-même. Pour le centre : $EE' = 11-1 = 10$ cm et $GG' = 10-2 = 8$ cm. Une symétrie centrale qui transforme la figure en elle-même enverrait le côté $[EE']$ sur le côté opposé $[G'G]$. Or elle conserve les longueurs et $10 \neq 8$.
Donc EGG′E′ n'a pas de centre de symétrie.

Ex. 5 ★★★ **Le drapeau de Malo**

(a) Non. Pour la symétrie de centre O, on change le signe des DEUX coordonnées : $C'(-4{,}5\,;\,-3)$. Vérification : O est bien le milieu de $[CC']$, car $\frac{4{,}5+(-4{,}5)}{2}=0$ et $\frac{3+(-3)}{2}=0$. Malo n'a changé que l'abscisse.

(b) $A'(-2\,;\,1)$, $B'(-2\,;\,-4)$, $D'(-2\,;\,-2)$ (et $C'(-4{,}5\,;\,-3)$). Le haut du mât B′ est maintenant sous le pied A′ et la pointe C′ est à gauche : le fanion a fait un demi-tour, il a la tête en bas, sans effet miroir.

Ex. 5 **(suite)**

(c) Il obtient les points $(-2\,;\,-1)$, $(-2\,;\,4)$, $(-4{,}5\,;\,3)$ et $(-2\,;\,2)$: chaque point et son image sont sur la même ligne, à la même distance de l'axe des ordonnées, de part et d'autre de cet axe. C'est la symétrie axiale d'axe l'axe des ordonnées : le mât reste debout et la pointe passe à gauche, le fanion est retourné en miroir.

(d) Par la symétrie de centre O, l'image de E est $(0\,;\,-3{,}5)$, qui est différent de E : E n'est pas invariant (seul O l'est). Par la transformation de Malo, l'image de E est $(-0\,;\,3{,}5)$, c'est-à-dire E lui-même : E est sur l'axe, il est invariant.

(e) $A'(-2\,;\,1)$, $B'(-2\,;\,-4)$ et $D'(-2\,;\,-2)$ ont la même abscisse -2, et l'ordonnée de D′ est comprise entre -4 et 1.
Donc D′ est sur [A′B′]. On retrouve que la symétrie centrale conserve l'alignement : l'image du segment [AB] est le segment [A′B′].

Ex. 6 ★★★ **Le motif de papier peint d'Inès**

(a) (d) est verticale : je compte horizontalement, donc perpendiculairement à (d). K est à 4 carreaux à gauche de (d) : K′ est sur la même ligne, à 4 carreaux à droite. L est à 1 carreau à gauche : L′ est à 1 carreau à droite. M est à 2 carreaux à gauche : M′ est à 2 carreaux à droite.

(b) De L à O : 1 carreau vers la droite et 6 vers le bas. Je refais ce trajet après O : L_1 est à 1 carreau à droite et 6 carreaux sous O (O est le milieu de $[LL_1]$). De même, K_1 est à 4 carreaux à droite et 4 sous O, et M_1 à 2 à droite et 2 sous O.

(c) Non. Une symétrie centrale est un demi-tour autour de O : le sommet le plus haut L devient L_1, le plus bas, et la pointe K passe à droite. $K_1L_1M_1$ a la tête en bas, sans effet miroir. C'est K′L′M′ qui est retourné en miroir.

(d) K_1 est à 4 carreaux à droite de (d) : K_2 est sur la même ligne, à 4 carreaux à gauche, donc 8 carreaux sous K. L_2 est 1 carreau à gauche de (d), sur la ligne de L_1 ; M_2 est 2 carreaux à gauche de (d), sur la ligne de M_1. De K′ à O : 4 carreaux vers la gauche et 4 vers le bas ; je refais ce trajet et j'arrive en K_2.
Donc $K_2L_2M_2$ est aussi le symétrique de K′L′M′ par rapport à O. La symétrie de centre O échange KLM et $K_1L_1M_1$, et elle échange K′L′M′ et $K_2L_2M_2$: le motif est sa propre image, O est un centre de symétrie du motif.

Ex. 7 ★★★ **Vrai ou faux : le carreau de Noé**

(a) Vrai. De B à O : 2 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. Je refais ce trajet après O : j'arrive en D. O est donc le milieu de [BD], et D est le symétrique de B par rapport à O.

(b) Faux. A est à 2 carreaux sous cette droite. Je compte perpendiculairement (verticalement) : son symétrique est 2 carreaux au-dessus, à la verticale de A, donc 2 carreaux à gauche de D. Ce n'est pas un sommet de ABCD : le parallélogramme n'est pas sa propre image par cette symétrie axiale.

(c) Faux. De A à O : 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Je refais ce trajet après O : le symétrique de A est C, et non A. Avec une symétrie centrale, seul le centre O est invariant. Ce sont les points de l'axe qui sont invariants, mais avec une symétrie axiale.

(d) Vrai. On sait que, par la symétrie de centre O, A a pour image C, B a pour image D et C a pour image A.
Donc [AB] a pour image [CD], et $\widehat{ABC}$ a pour image $\widehat{CDA}$. Or une symétrie centrale conserve les longueurs et les angles.
Donc CD = AB = 6 cm et $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 117°$.

2. *Reconnaître une translation*

Ex. 8 ★☆☆ **Quatre candidats**

(a) Oui. Le triangle a gardé son orientation et chaque sommet a fait le même déplacement : de A à D, de B à E, de C à G, 1 carreau vers la droite et 4 vers le haut. DEG est l'image de ABC par la translation qui transforme A en D.

(b) Non. HIJ a bougé, mais il est retourné comme dans un miroir : A est à 6 carreaux à gauche de (d) et H à 6 carreaux à droite. HIJ est l'image de ABC par la symétrie axiale d'axe (d). Ce n'est pas un glissement.

(c) C'est KLM. Non : O est le milieu de [AK], de [BL] et de [CM]. KLM est donc l'image de ABC par la symétrie centrale de centre O (un demi-tour). Ce n'est pas un glissement.

(d) Non. NRS est agrandi : NR = 6 carreaux alors que AB = 3 carreaux. Or une translation conserve les longueurs.
Donc NRS n'est pas l'image de ABC par une translation.

Ex. 9 ★☆☆ **Suivre la flèche**

(a) De A$(2\,;\,3)$ à B$(-2\,;\,2)$: $-2-2=-4$, donc 4 vers la gauche, et $2-3=-1$, donc 1 vers le bas. Je refais ce déplacement à partir de M$(3\,;\,-1)$: M′$(3-4\,;\,-1-1)$, soit M′$(-1\,;\,-2)$.

(b) Je refais le même déplacement à partir de N$(-1\,;\,4)$: N′$(-1-4\,;\,4-1)$, soit N′$(-5\,;\,3)$.

(c) T est l'antécédent de R : je fais le déplacement à l'envers à partir de R$(0\,;\,-3)$, 4 vers la droite et 1 vers le haut. T$(0+4\,;\,-3+1)$, soit T$(4\,;\,-2)$.

(d) Attention : de B vers A, c'est le sens contraire, donc 4 vers la droite et 1 vers le haut. Image de M : $(3+4\,;\,-1+1)$, soit $(7\,;\,0)$.

(e) Non. A et B sont distincts : chaque point du plan glisse de 4 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas. Aucun point ne reste à sa place : aucun point n'est invariant.

Ex. 10 ★★☆ **Le bon parallélogramme**

(a) E va en F et G va en H : le parallélogramme est EFHG (forme ABM′M avec A = E, B = F, M′ = H, M = G).

(b) Non. Dans EFGH, les côtés [FG] et [HE] se croisent : c'est un quadrilatère croisé. Le bon ordre est EFHG.

(c) On sait que la translation qui transforme E en F transforme G en H, et G n'est pas sur la droite (EF). Or si la translation qui transforme A en B transforme M en M′, alors ABM′M est un parallélogramme.
Donc EFHG est un parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur. (EF) // (GH) et GH = EF = 3,9 cm.

(d) La translation qui transforme F en E a la même direction et la même longueur, mais le sens contraire. Elle ramène H sur G : l'image de H est G.

Ex. 11 ★★☆ **La maison du jeu vidéo**

(a) K vers K′, L vers L′, M vers M′, P vers P′ : 7 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. N vers N′ : 8 carreaux vers la droite et 1 vers le bas.

(b) Non. La maison a gardé son orientation, mais tous ses points n'ont pas fait le même déplacement : N s'est déplacé de 8 carreaux vers la droite, les autres sommets de 7. Le toit est déformé.

(c) N′ doit faire le même déplacement que les autres sommets : 7 carreaux vers la droite et 1 vers le bas à partir de N, soit 1 carreau à gauche du N′ dessiné.

Ex. 11 **(suite)**

(d) Valise : oui, elle glisse tout droit sans tourner et tous ses points font le même déplacement. Porte : non, elle tourne autour de ses gonds (les points près des gonds bougent moins). Reflet : non, il est retourné comme dans un miroir
(symétrie axiale).

Ex. 12 ★★★ **Le drapeau et ses quatre copies**

(a) A3B3C3D3 a la tête en bas : son mât pointe vers le bas et son fanion vers la gauche. C'est l'image de ABCD par la symétrie centrale de centre O, car O est le milieu de [AA3] : $(7+13)\div 2=10$ et $(3+11)\div 2=7$. Ce n'est donc pas une image par une translation.
A4B4C4D4 a la même orientation, mais il est agrandi : AB = 3 carreaux et A4B4 = 7 − 1 = 6 carreaux. Or une translation conserve les longueurs. Ce n'est donc pas une image par une translation non plus.

(b) De A à A1 : $13-7=6$ et $1-3=-2$, soit 6 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. On trouve le même déplacement pour B, C et D (par exemple de C à C1 : $15-9=6$ et $4-6=-2$). Tous les points font le même déplacement, sans changer d'orientation : A1B1C1D1 est l'image de ABCD par une translation. De A à A2 : $1-7=-6$ et $5-3=2$, soit 6 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut, et c'est pareil pour B, C et D. A2B2C2D2 est donc aussi l'image de ABCD par une translation.

(c) Non. Les deux déplacements ont la même direction et la même longueur, mais ils sont de sens contraires : l'un va vers la droite et le bas, l'autre vers la gauche et le haut. Ce sont deux translations différentes : celle qui transforme A en A1 et celle qui transforme A en A2.

(d) De A2 à A1 : $13-1=12$ et $1-5=-4$, soit 12 carreaux vers la droite et 4 vers le bas (pareil de B2 à B1 : $13-1=12$ et $4-8=-4$). Deux fois la translation qui transforme A en A1 : $6+6=12$ carreaux vers la droite et $2+2=4$ vers le bas. C'est le même déplacement : Ben a raison. En effet, cette translation amène A2 en A, puis A en A1.

Ex. 13 ★★★ **La cabine de la télécabine**

(a) De K à K1 : $1-(-4)=5$ et $2-(-1)=3$. De L à L1 : $4-(-1)=5$ et $2-(-1)=3$. De M à M1 : $4-(-1)=5$ et $4-1=3$. De N à N1 : $2-(-3)=5$ et $4-1=3$. Tous les sommets font le même déplacement, 5 vers la droite et 3 vers le haut : K1L1M1N1 est l'image de KLMN par une translation.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Non. Le déplacement de K vers K2 est juste ($4-(-4)=8$ et $1-(-1)=2$), mais celui de L vers L2 donne $1-(-1)=2$ vers la droite et $1-(-1)=2$ vers le haut. Les sommets ne font pas tous le même déplacement. La cabine K2L2M2N2 a la tête en bas : ses coordonnées sont celles de KLMN avec les signes changés. C'est donc l'image par la symétrie centrale de centre l'origine du repère.

(c) Je fais le même déplacement à partir de P : $P'(-2{,}5+5\,;\,-3+3)$, soit $P'(2{,}5\,;\,0)$.

(d) Non : Zoé a ajouté le déplacement alors qu'il fallait le soustraire. $R(0{,}5-5\,;\,6-3)$, soit $R(-4{,}5\,;\,3)$. Vérification : $-4{,}5+5=0{,}5$ et $3+3=6$.

Ex. 14 ★★★ **Le monte-charge et la vitre**

(a) On sait que P′Q′R′S′ est l'image de PQRS par la translation qui transforme P en P′. Or une translation conserve les longueurs et les angles.
Donc R′S′ = RS = 2 cm et $\widehat{P'Q'R'}=\widehat{PQR}=90°$.

(b) Non. De P à P″ : $10-1=9$ cm vers la droite. De S à S″ : $9-2=7$ cm vers la droite. De Q à Q″ : $7-4=3$ cm vers la droite. Les points ne font pas tous le même déplacement. P″Q″R″S″ est retournée (S est à gauche du haut de la caisse, S″ est à droite) : c'est l'image de PQRS par la symétrie axiale d'axe (d).

(c) On sait que la translation qui transforme P en P′ transforme Q en Q′, et Q n'est pas sur la droite (PP′). Or si la translation qui transforme A en B transforme M en M′, alors ABM′M est un parallélogramme.
Donc PP′Q′Q est un parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur. (PP′) // (QQ′) et QQ′ = PP′ = 4,5 cm.

(d) T′ est 4,5 cm au-dessus de T, sur la droite (PP′), soit $1+4{,}5=5{,}5$ cm au-dessus de P : T′ est donc $5{,}5-4{,}5=1$ cm au-dessus de P′. Les points P, P′, T et T′ sont alignés : PP′T′T est aplati, ce n'est pas un parallélogramme. On a quand même TT′ = PP′ = 4,5 cm, avec la même direction et le même sens.

3. *Translation et parallélogramme*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : lire une translation dans un parallélogramme**

(a) EFGH a la forme ABM′M avec A = E, B = F, M′ = G et M = H.
Donc l'image de H est G (et non l'inverse). De E à F : 5 carreaux vers la droite ; de H : $2+5=7$, on arrive bien en G.

(b) FGHE a la forme ABM′M avec A = F, B = G, M′ = H et M = E.
Donc l'image de E est H. De F à G : 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut ; à partir de E(0 ; 0), on arrive en (2 ; 3), c'est-à-dire en H.

(c) GHEF a la forme ABM′M avec A = G, B = H, M′ = E et M = F.
Donc E est l'image de F : le point cherché est F. De G à H : 5 carreaux vers la gauche ; à partir de F : $5-5=0$, on arrive bien en E.

(d) De H à E : 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas. On fait le même déplacement de G à F ($7-2=5$; $3-3=0$). C'est donc la translation qui transforme G en F
(GFEH est la forme ABM′M).

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : le bon ordre des sommets**

(a) Forme ABM′M avec A = R, B = S, M′ = P′ et M = P : RSP′P est un parallélogramme.

(b) Non. Le bon parallélogramme est CDTU (forme ABM′M : C, D, puis l'image T, puis U). CDUT est un quadrilatère croisé.

(c) Non. Ces deux translations ont la même direction et la même longueur, mais elles vont en sens contraire. La translation qui transforme B en A transforme M′ en M, et non M en M′.

(d) De A à B : 3 carreaux vers la droite. À partir de M : $5+3=8$, donc M′(8 ; 0). M est sur la droite (AB), donc A, B, M et M′ sont alignés : le quadrilatère est aplati, ABM′M n'est pas un parallélogramme.

Ex. 17 ★★☆ **Quatrième sommet dans un repère**

(a) Déplacement horizontal : $2-(-3)=5$; vertical : $-1-1=-2$. M′$(-1+5\,;\,4-2)$, soit $M'(4\,;\,2)$.

(b) ABM′M est un parallélogramme. [AB] et [MM′] sont parallèles et de même longueur, et [AM] et [BM′] aussi. De A à M : $-1-(-3)=2$ vers la droite et $4-1=3$ vers le haut ; de B à M′ : $4-2=2$ et $2-(-1)=3$. C'est le même déplacement.

Ex. 17 **(suite)**

(c) On fait le déplacement à rebours, donc on le soustrait : $0{,}5 - 5 = -4{,}5$ et $-2{,}5 - (-2) = -0{,}5$.
Donc $R(-4{,}5\,;\,-0{,}5)$.

Ex. 18 ★★☆ **La télécabine**

(a) De D à E : 5 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. Je refais ce déplacement à partir de chaque sommet : K′(6 ; 7), L′(9 ; 7), M′(9 ; 9) et N′(6 ; 9).

(b) On sait que la translation qui transforme D en E transforme L en L′, et que L n'est pas sur la droite (DE). Or si une translation transforme D en E et L en L′ (L hors de (DE)), alors DEL′L est un parallélogramme.
Donc DEL′L est un parallélogramme.

(c) De la même façon, DEK′K et DEM′M sont des parallélogrammes.
Donc [KK′] et [MM′] sont tous les deux parallèles à [DE] et de même longueur que [DE]. Ils sont donc parallèles entre eux et de même longueur.

Ex. 19 ★★★ **Corriger Léo dans un repère**

(a) Déplacement horizontal : $-5{,}5 - (-2) = -3{,}5$, soit 3,5 vers la gauche ; vertical : $1 - (-1) = 2$. M′ $(0 + (-3{,}5)\,;\,2 + 2)$, soit M′$(-3{,}5\,;\,4)$.

(b) Non. On sait que la translation qui transforme A en B transforme M en M′, et que M n'est pas sur la droite (AB). Or si la translation qui transforme A en B transforme M en M′, alors ABM′M est un parallélogramme.
Donc c'est ABM′M, et pas ABMM′ : ce quadrilatère-là est croisé, car ses côtés [BM] et [M′A] se coupent.

(c) On sait que ABM′M est un parallélogramme. Or les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur.
Donc AM = BM′ et (AM) // (BM′).

(d) Pour trouver l'antécédent, je soustrais le déplacement : $R(-7 - (-3{,}5)\,;\,-2 - 2)$, soit $R(-3{,}5\,;\,-4)$. A va en B et R va en R′ : le parallélogramme est ABR′R.

Ex. 20 ★★★ **Au compas sur feuille blanche**

(a) Je trace un arc de cercle de centre M et de rayon AB = 4 cm, puis un arc de centre B et de rayon AM = 3 cm. Les arcs se coupent en deux points : je garde celui qui rend ABM′M non croisé, du même côté de (AB) que M, à droite de M (sens de A vers B).

Ex. 20 **(suite)**

(b) Par construction, MM′ = AB et BM′ = AM. On sait donc que ABM′M est un quadrilatère non croisé dont les côtés opposés ont deux à deux la même longueur. Or un tel quadrilatère est un parallélogramme.
Donc ABM′M est un parallélogramme. Or si ABM′M est un parallélogramme, M′ est l'image de M par la translation qui transforme A en B.

(c) On sait que ABM′M est un parallélogramme. Or ses côtés opposés ont la même longueur : MM′ = AB = 4 cm et BM′ = AM = 3 cm.
Donc son périmètre vaut $4 + 3 + 4 + 3 = 14$ cm.

(d) N glisse de 4 cm sur la droite (AB), dans le sens de A vers B : N′ est sur (AB), après N, et AN′ = 6 + 4 = 10 cm. A, B, N et N′ sont alignés : le quadrilatère ABN′N est aplati, ce n'est donc pas un parallélogramme.

Ex. 21 ★★★ **La pièce de jeu vidéo qui glisse deux fois**

(a) De A à B : $5 - 1 = 4$ carreaux vers la droite et $8 - 7 = 1$ vers le haut. D1$(1 + 4\,;\,2 + 1)$ = D1(5 ; 3), E1(8 ; 3), F1(5 ; 5).

(b) De B à C : $7 - 5 = 2$ carreaux vers la droite et $5 - 8 = -3$, soit 3 vers le bas. D2$(5 + 2\,;\,3 - 3)$ = D2(7 ; 0), E2(10 ; 0), F2(7 ; 2).

(c) De D à D2 : $7 - 1 = 6$ carreaux vers la droite et $0 - 2 = -2$, soit 2 vers le bas. De A à C : $7 - 1 = 6$ et $5 - 7 = -2$: c'est le même déplacement. C'est la translation qui transforme A en C (et non celle qui transforme B en C).

(d) On sait que la translation qui transforme D en D2 transforme E en E2, et que E n'est pas sur la droite (DD2). Or si une translation transforme D en D2 et E en E2 (E hors de (DD2)), alors DD2E2E est un parallélogramme.
Donc ses côtés opposés [D2E2] et [ED] sont parallèles : (DE) // (D2E2).

4. *Image d'un point par une translation*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : glisser un triangle sur quadrillage**

(a) De A à B : $6 - 2 = 4$ carreaux vers la gauche et $5 - 2 = 3$ carreaux vers le haut.

Ex. 22 (suite)

(b) À partir de K, je fais 4 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut : K′ se trouve 1 carreau à gauche de A et 2 carreaux au-dessus.

(c) À partir de L : 4 vers la gauche, 3 vers le haut ; L′ est 1 carreau à gauche de B et 2 carreaux en dessous. À partir de M : 4 vers la gauche, 3 vers le haut ; M′ est 4 carreaux à droite de B et 2 carreaux au-dessus.

(d) Je relie K′, L′, M′ dans cet ordre. Le triangle K′L′M′ a la même forme et la même orientation que KLM : il a simplement glissé.

(e) Elle a inversé les deux déplacements : le déplacement horizontal est de 4 carreaux (vers la gauche) et le vertical de 3 carreaux (vers le haut). On ne mélange pas le déplacement horizontal et le déplacement vertical.

Ex. 23 ★☆☆ Automatismes : image et antécédent dans un repère

(a) Déplacement horizontal : $2-(-1{,}5)=3{,}5$, soit 3,5 vers la droite.

(b) Déplacement vertical : $-3-2=-5$, soit 5 vers le bas.

(c) $E'(-4+3{,}5\,;\,1{,}5-5)$, soit $E'(-0{,}5\,;\,-3{,}5)$.

(d) $F'(0{,}5+3{,}5\,;\,-2-5)$, soit $F'(4\,;\,-7)$.

(e) Pour un antécédent, je fais le déplacement inverse : $1-3{,}5=-2{,}5$ et $-1+5=4$, soit $G(-2{,}5\,;\,4)$.

Ex. 24 ★★☆ Au compas sur feuille blanche

(a) Un arc de centre M et de rayon AB = 5 cm, puis un arc de centre B et de rayon AM = 3 cm.

(b) M′ est le point d'intersection pour lequel la flèche de M à M′ va dans le même sens que celle de A à B, c'est-à-dire vers la droite, parallèlement à (AB). L'autre point d'intersection est sous (AB) : la flèche de M vers ce point descendrait.

(c) On sait que ABM′M est un parallélogramme. Or dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.
Donc MM′ = AB = 5 cm et BM′ = AM = 3 cm.

(d) Non. Le parallélogramme associé est ABM′M : on part de A, on va à B, puis à l'image M′, puis à M. Dans « ABMM′», [BM] et [M′A] seraient des côtés, alors que ce sont les diagonales.

Ex. 25 ★★☆ Le vaisseau qui glisse

(a) Déplacement horizontal : $1{,}5-(-3)=4{,}5$; vertical : $-1-2{,}5=-3{,}5$. C'est un déplacement de 4,5 vers la droite et de 3,5 vers le bas.

(b) $N''(1{,}5-5\,;\,-1+3)$, soit $N''(-3{,}5\,;\,2)$.

(c) Les déplacements s'ajoutent : $4{,}5-5=-0{,}5$ et $-3{,}5+3=-0{,}5$. Une seule translation : 0,5 vers la gauche et 0,5 vers le bas. Vérification : $-3-0{,}5=-3{,}5$ et $2{,}5-0{,}5=2$.

(d) Non : 5 unités vers la gauche, c'est -5 sur l'abscisse, pas $+5$. $T''(-1+4{,}5-5\,;\,3-3{,}5+3)$, soit $T''(-1{,}5\,;\,2{,}5)$. Avec la translation unique : $-1-0{,}5=-1{,}5$ et $3-0{,}5=2{,}5$.

Ex. 26 ★★★ Le plan de Besançon : trois élèves, trois erreurs

(a) Arrivée − départ. Horizontal : $-1-2{,}5=-3{,}5$; vertical : $3-(-1)=4$. La translation déplace donc de 3,5 vers la gauche et de 4 vers le haut.

(b) Lucas a ajouté le déplacement aux coordonnées de B : $-1-3{,}5=-4{,}5$ et $3+4=7$. Il faut partir de M : $M'(-2-3{,}5\,;\,-3{,}5+4)$, soit $M'(-5{,}5\,;\,0{,}5)$.

(c) Non. Chloé a ajouté le déplacement : $0+(-3{,}5)=-3{,}5$ et $-2+4=2$. Pour un antécédent, on fait le déplacement inverse, donc on soustrait : $0-(-3{,}5)=3{,}5$ et $-2-4=-6$, soit $R(3{,}5\,;\,-6)$. Vérification : $3{,}5-3{,}5=0$ et $-6+4=-2$.

(d) Non. Nora a mélangé les coordonnées : elle a ajouté le déplacement vertical à l'abscisse et le déplacement horizontal à l'ordonnée. On ajoute $-3{,}5$ à l'abscisse et 4 à l'ordonnée : $T'(1-3{,}5\,;\,0{,}5+4)$, soit $T'(-2{,}5\,;\,4{,}5)$.

Ex. 27 ★★★ Le fanion qui glisse deux fois

(a) De A à B : 4 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. De C à D : 8 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas.

(b) À partir de chaque sommet, je compte 4 carreaux vers la droite et 3 vers le haut : K1 est 4 carreaux à droite et 3 au-dessus de K (de même pour L1, M1, N1). Puis, à partir de chaque point K1, L1, M1, N1, je compte 8 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas pour obtenir K2, L2, M2, N2. Je relie dans le même ordre : les fanions ont la même forme et la même orientation.

Ex. 27 **(suite)**

(c) Non. Les sens ne sont pas les mêmes : 4 vers la droite puis 8 vers la gauche donnent $4 - 8 = -4$, soit 4 carreaux vers la gauche ; 3 vers le haut puis 2 vers le bas donnent $3 - 2 = 1$, soit 1 carreau vers le haut. La translation unique déplace de 4 carreaux vers la gauche et de 1 vers le haut. Vérification : K2 est bien 4 carreaux à gauche et 1 au-dessus de K.

(d) On sait que [K1L1] est l'image de [KL] par la translation qui transforme A en B, et que [K2L2] est l'image de [K1L1] par la translation qui transforme C en D. Or une translation conserve les longueurs.
Donc K2L2 = K1L1 = KL = 4 cm
(4 carreaux).

Ex. 28 ★★★ **Les cabines de la télécabine**

(a) P′ est l'image de P, donc ABP′P est un parallélogramme : PP′ = AB et AP = BP′. Lina trace l'arc de centre P′ de rayon AB = 4 cm et l'arc de centre A de rayon BP′ = 2,5 cm.

(b) P est le point pour lequel la flèche de P à P′ a la même direction et le même sens que celle de A à B : P est en bas à gauche de P′. Avec l'autre point d'intersection, la flèche vers P′ n'est pas parallèle à (AB) : ce point ne convient pas.

(c) N est sur la droite (AB) : le parallélogramme ABN′N est « aplati » et N′ est sur (AB), 4 cm plus loin que N dans le sens de A vers B.
Donc AN′ = 1,5 + 4 = 5,5 cm et BN′ = 5,5 − 4 = 1,5 cm : N′ est au-delà de B.

(d) Non. On sait que la translation qui transforme A en B transforme P en P′. Or alors ABP′P est un parallélogramme, et ses côtés opposés ont la même longueur.
Donc PP′ = AB = 4 cm : la cabine a parcouru 4 cm.
C'est AP qui est égal à BP′ = 2,5 cm.

5. *Image d'une figure sur quadrillage*

Ex. 29 ★☆☆ **Un triangle qui glisse en oblique**

(a) De A à B : 4 − 1 = 3 carreaux vers la droite et 5 − 1 = 4 carreaux vers le haut.

(b) Je pars de K et je refais le déplacement : 3 carreaux vers la droite, puis 4 vers le haut. K′ est 3 carreaux à droite et 4 au-dessus de K.

Ex. 29 **(suite)**

(c) À partir de L : 3 vers la droite et 4 vers le haut, j'obtiens L′. À partir de M, pareil, j'obtiens M′. Je relie K′, L′, M′ : on obtient un triangle de même forme et de même orientation que KLM.

(d) Non. Le déplacement se refait à partir du point dont on cherche l'image, donc à partir de K, et jamais à partir de B. Le point de Nina, c'est l'image de B, pas celle de K.

(e) [K′L′] mesure 10 − 6 = 4 carreaux, comme [KL] : une translation conserve les longueurs.

Ex. 30 ★☆☆ **L'image d'un cercle**

(a) De E à F : 7 − 10 = −3, donc 3 carreaux vers la gauche, et 5 − 6 = −1, donc 1 carreau vers le bas.

(b) À partir de O : 3 carreaux vers la gauche, puis 1 vers le bas. O′ est 3 carreaux à gauche et 1 sous O.

(c) Une translation conserve les longueurs, donc le rayon reste 2 carreaux. Je trace le cercle de centre O′ et de rayon 2 carreaux.

(d) Non. Une translation fait glisser tous les points du même déplacement. Ici, le déplacement est petit (3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas) par rapport au cercle, qui a 2 + 2 = 4 carreaux de diamètre. L'image recouvre donc en partie le cercle de départ. Ce n'est pas une erreur.

Ex. 31 ★★☆ **Retrouver le drapeau de départ**

(a) De A à B : 4 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. Pour un antécédent, je recule : 4 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut.

(b) À partir de chaque point image : 4 vers la gauche et 2 vers le haut. P est 4 carreaux à gauche et 2 au-dessus de P′. On fait de même pour Q, R et S. Je trace le mât [PQ] et le triangle QRS : le drapeau a la même orientation que P′Q′R′S′.

(c) Sam a placé R 4 carreaux à droite et 2 sous R′. Son point est l'image de R′, pas son antécédent. Pour un antécédent, on recule : on fait le déplacement dans l'autre sens
(4 vers la gauche et 2 vers le haut).

(d) Non. De P′ à P : 4 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. De A à B : 4 vers la droite et 2 vers le bas. C'est la même direction et la même longueur, mais pas le même sens. Pour aller de P′ à P, il faut la translation qui transforme B en A.

Ex. 32 ★★☆ **La maison de Hugo**

(a) De U à V : $8 - 1 = 7$ carreaux vers la droite, et 0 carreau vers le haut ou vers le bas. Le déplacement est purement horizontal.

(b) De C à C′, de D à D′, de E à E′ et de G à G′ : 7 carreaux vers la droite. De F à F′ : $11 - 3 = 8$ carreaux. C'est donc F′ qui est mal placé, avec un carreau de trop.

(c) Je pars de F et je fais 7 carreaux vers la droite, sans monter ni descendre. F′ doit être 1 carreau à gauche du point de Hugo. Je relie ensuite C′D′E′F′G′ dans cet ordre.

(d) Non. Une translation fait seulement glisser la figure. L'image a la même orientation : elle n'est ni retournée ni tête en bas. Une maison au toit vers le bas n'est donc pas l'image de CDEFG par une translation.

Ex. 33 ★★★ **La pièce du jeu vidéo qui glisse deux fois**

(a) De A$(11\,;\,10)$ à B$(9\,;\,9)$: $11 - 9 = 2$ carreaux vers la gauche et $10 - 9 = 1$ carreau vers le bas. Je refais ce déplacement à partir de chaque sommet : K′$(2\,;\,3)$, L′$(5\,;\,3)$, M′$(7\,;\,5)$, N′$(5\,;\,7)$, P′$(2\,;\,7)$. Je relie K′, L′, M′, N′, P′ dans cet ordre.

(b) Maël a fait le déplacement à partir de B : $(9 - 2\,;\,9 - 1) = (7\,;\,8)$. Or il faut partir de K : K′$(4 - 2\,;\,4 - 1)$, soit K′$(2\,;\,3)$.

(c) M′$(7\,;\,5)$ et N′$(5\,;\,7)$ sont à l'intérieur de la pièce de départ. Les points K′, L′ et P′ sont dehors. Aucun point ne reste à sa place : une translation déplace tous les points de 2 carreaux vers la gauche et de 1 carreau vers le bas, donc elle n'a aucun point invariant. Se chevaucher n'est pas une erreur.

(d) De E$(0\,;\,3)$ à F$(6\,;\,0)$: $6 - 0 = 6$ carreaux vers la droite et $3 - 0 = 3$ carreaux vers le bas. K″$(2 + 6\,;\,3 - 3)$, soit K″$(8\,;\,0)$; M″$(7 + 6\,;\,5 - 3)$, soit M″$(13\,;\,2)$.

(e) Les déplacements s'ajoutent. Horizontal : $-2 + 6 = 4$, soit 4 carreaux vers la droite. Vertical : $-1 - 3 = -4$, soit 4 carreaux vers le bas. Vérification : K$(4\,;\,4)$ donne $(4 + 4\,;\,4 - 4) = (8\,;\,0)$, c'est bien K″.

Ex. 34 ★★★ **La tuile qui sort du quadrillage**

(a) De A$(1\,;\,6)$ à B$(8\,;\,7)$: $8 - 1 = 7$ carreaux vers la droite et $7 - 6 = 1$ vers le haut. R′$(2 + 7\,;\,2 + 1) = (9\,;\,3)$, S′$(5 + 7\,;\,1 + 1) = (12\,;\,2)$, T′$(6 + 7\,;\,4 + 1) = (13\,;\,5)$, U′$(3 + 7\,;\,5 + 1) = (10\,;\,6)$. T′ sort du quadrillage, car $13 > 12$.

Ex. 34 (suite)

(b) Oui. De R à S : $5 - 2 = 3$ carreaux vers la droite et $2 - 1 = 1$ vers le bas. À partir de R′$(9\,;\,3)$, on arrive en $(9 + 3\,;\,3 - 1) = (12\,;\,2)$: c'est bien S′. Une translation fait glisser la tuile sans la déformer, donc [R′S′] a la même direction, le même sens et la même longueur que [RS].

(c) Le sommet le plus à droite est T, à 6 carreaux du bord gauche. Il peut aller au plus jusqu'au bord, à 12 : $12 - 6 = 6$ carreaux vers la droite. En hauteur, le point le plus haut est U : $5 + 1 = 6$, et $6 \leq 8$.
Donc 6 carreaux au plus vers la droite.

(d) Déplacement : 6 vers la droite et 1 vers le haut. R′$(8\,;\,3)$, S′$(11\,;\,2)$, T′$(12\,;\,5)$, U′$(9\,;\,6)$. Dans l'ordre R′, T′, S′, U′, les côtés se croisent : elle obtient un « nœud papillon » et non un carré. Il faut relier dans le même ordre que RSTU : R′S′T′U′.

Ex. 35 ★★★ **Trois triangles sur le plan de Lina**

(a) F1 a la même orientation que KLM : l'angle droit est en bas à gauche et la pointe M1 est en haut. C'est un glissement. F2 est retourné en miroir (symétrie axiale). F3 est tête en bas (demi-tour, symétrie centrale).
Donc seul F1 est l'image de KLM par une translation.

(b) De K$(1\,;\,1)$ à K1$(9\,;\,2)$: $9 - 1 = 8$ vers la droite et $2 - 1 = 1$ vers le haut. De L à L1 : $12 - 4 = 8$ et $2 - 1 = 1$. De M à M1 : $9 - 1 = 8$ et $4 - 3 = 1$. Le déplacement est le même pour les trois sommets : 8 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

(c) Non. De K à K3 : $13 - 1 = 12$ vers la droite et $9 - 1 = 8$ vers le haut. De L à L3 : $10 - 4 = 6$ vers la droite et 8 vers le haut. Les déplacements ne sont pas les mêmes, donc ce n'est pas une translation : F3 est tête en bas. Avoir les mêmes longueurs ne suffit pas.

(d) De K$(1\,;\,1)$ à M$(1\,;\,3)$: $1 - 1 = 0$ carreau horizontalement et $3 - 1 = 2$ carreaux vers le haut. K′$(1\,;\,3)$ est confondu avec M ; L′$(4 + 0\,;\,1 + 2) = (4\,;\,3)$; M′$(1\,;\,3 + 2) = (1\,;\,5)$. M n'est pas invariant : son image est M′$(1\,;\,5)$, différente de M. Une translation n'a aucun point invariant.

6. *Propriétés conservées*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : lire les mesures de l'image**

(a) Une translation conserve les longueurs, donc F′G′ = FG = 5 cm.

(b) Une translation conserve les angles : $\widehat{F'E'G'} = \widehat{FEG} = 90°$.

(c) Les longueurs sont conservées : E′F′ = 4 cm, E′G′ = 3 cm et F′G′ = 5 cm. Périmètre : $4 + 3 + 5 = 12$ cm.

(d) Une translation conserve les aires. Le triangle EFG est rectangle en E : aire $= 4 \times 3 \div 2 = 6$ cm², donc l'aire de E′F′G′ est aussi 6 cm².

(e) Non. Pour aller de E à E′, on se déplace de 6 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas : le point a bougé. Une translation n'a aucun point invariant. « Conserver » veut dire que les mesures restent les mêmes, pas que la figure reste à sa place.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Faux. La droite (AB) a la direction de la translation. L'image de A est B, et l'image de B se trouve elle aussi sur (AB). L'image de (AB) est donc la droite (AB) elle-même.

(b) Faux. Le rayon est bien conservé (2 cm), mais le centre devient O′, l'image de O. O′ est à 3 cm vers la droite et 1 cm vers le haut de O, donc O′ ≠ O.

(c) Vrai. OM = 2 cm et une translation conserve les longueurs, donc O′M′ = OM = 2 cm.

(d) Vrai. L'image de O est O′ et l'image de A est B. Une translation conserve les milieux, donc I′ est le milieu de [O′B].

(e) Vrai. L'image est un carré de même côté, 2,5 cm. Son aire vaut $2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25$ cm² : une translation conserve les aires.

Ex. 38 ★★☆ **Le tapis qui glisse**

(a) On sait que R′S′T′U′ est l'image du rectangle RSTU par une translation. Or une translation conserve les mesures d'angles.
Donc les quatre angles de R′S′T′U′ sont droits : R′S′T′U′ est un rectangle.

(b) On sait que R′S′T′U′ est l'image de RSTU par une translation. Or une translation conserve les longueurs et les aires.
Donc R′S′ = 5 cm et S′T′ = 3 cm. Périmètre : $2 \times (5 + 3) = 16$ cm. Aire : $5 \times 3 = 15$ cm².

Ex. 38 (suite)

(c) On sait que K est le milieu de [ST] et que K′, S′, T′ sont les images de K, S, T. Or une translation conserve les milieux.
Donc K′ est le milieu de [S′T′], et $S'K' = 3 \div 2 = 1{,}5$ cm.

(d) On sait que (U′T′) est l'image de (UT) par une translation. Or une translation transforme une droite en une droite parallèle.
Donc (U′T′) // (UT). De plus, (UT) // (RS) car RSTU est un rectangle. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles, donc (U′T′) // (RS).

Ex. 39 ★★☆ **Le fanion de la bannière**

(a) Non. On sait que [A′B′] est l'image de [AB] par une translation. Or une translation conserve les longueurs. Donc A′B′ = AB = 4 cm. Une translation fait glisser la figure sans la déformer : elle n'est ni agrandie ni réduite.

(b) On sait que le triangle B′C′D′ est l'image du triangle BCD par une translation. Or une translation conserve les aires. Aire de BCD : $2 \times 3 \div 2 = 3$ cm².
Donc l'aire de B′C′D′ est aussi 3 cm².

(c) Oui. On sait que A, D et B sont alignés (D est sur [AB]) et que A′, D′, B′ sont leurs images par une translation. Or une translation conserve l'alignement.
Donc A′, D′ et B′ sont alignés.

(d) On sait que (A′B′) est l'image de (AB) par une translation. Or une translation transforme une droite en une droite parallèle.
Donc (A′B′) // (AB). Ce sont deux droites distinctes : de A à A′, on se déplace de 5 carreaux vers la gauche et de 1 vers le haut, ce qui n'est pas la direction de (AB).

Ex. 40 ★★★ **La télécabine de Chamonix**

(a) On sait que la translation transforme A en B, et A et B sont deux points de (d) : (d) a donc la direction de la translation. Or l'image d'une droite qui a la direction de la translation est cette droite elle-même.
Donc l'image de (d) est (d) : la cabine reste sur le câble.

Ex. 40 **(suite)**

(b) On sait que (C′D′) est l'image de (CD) par une translation. Or une translation transforme une droite en une droite parallèle.
Donc (C′D′) // (CD). Mais (CD) est horizontale et n'a pas la direction de la translation (celle du câble, qui est oblique) : (C′D′) est donc une autre droite, 2 cm plus haut que (CD)
$(8 - 6 = 2)$.

(c) Deux fois le déplacement de A à B : $4 + 4 = 8$ cm vers la droite et $2 + 2 = 4$ cm vers le haut. Une seule translation (8 cm vers la droite et 4 cm vers le haut) amène CDEF en C″D″E″F″. Aire de CDEF : $2 \times 3 = 6$ cm². On sait que C″D″E″F″ est l'image de CDEF par une translation. Or une translation conserve les aires.
Donc l'aire de C″D″E″F″ est 6 cm².

(d) On sait que la translation qui transforme A en B transforme C en C′. Or si la translation qui transforme A en B transforme M en M′, alors ABM′M est un parallélogramme.
Donc ABC′C est un parallélogramme. Ses côtés opposés [AB] et [C′C] sont parallèles, donc (CC′) // (AB), c'est-à-dire (CC′) //
(d).

Ex. 41 ★★★ **La pièce qui glisse dans le jeu vidéo**

(a) Déplacement horizontal : $0{,}5 - (-3) = 3{,}5$; vertical : $-2 - 1 = -3$. S′$(2 + 3{,}5\,;\ 1 - 3)$, soit $S'(5{,}5\,;\ -2)$. T′$(-1 + 3{,}5\,;\ 4 - 3)$, soit $T'(2{,}5\,;\ 1)$.

(b) [RS] est horizontal et RS $= 2 - (-3) = 5$ cm : M est à $5 \div 2 = 2{,}5$ cm de R, soit $M(-3 + 2{,}5\,;\ 1)$, c'est-à-dire $M(-0{,}5\,;\ 1)$. M′$(-0{,}5 + 3{,}5\,;\ 1 - 3)$, soit $M'(3\,;\ -2)$. [R′S′] est horizontal, de 0,5 à 5,5 : son milieu a pour abscisse $0{,}5 + 2{,}5 = 3$, c'est le point $(3\,;\ -2)$, donc M′. On sait que M est le milieu de [RS]. Or une translation conserve les milieux.
Donc M′ est le milieu de [R′S′].

(c) Pour l'antécédent, je soustrais le déplacement : N$(1{,}5 - 3{,}5\,;\ -0{,}5 + 3)$, soit $N(-2\,;\ 2{,}5)$. On sait que R, N et T sont alignés (N est sur [RT]) et que R′, N′, T′ sont leurs images par une translation. Or une translation conserve l'alignement.
Donc R′, N′ et T′ sont alignés.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Non. R″S″ $= 6 - (-4) = 10$ cm, alors que RS $= 5$ cm. Or une translation conserve les longueurs : l'image de [RS] mesurerait 5 cm.
Donc R″S″T″ n'est pas l'image de RST par une translation : c'est un agrandissement. Avoir des côtés parallèles ne suffit pas.

Ex. 42 ★★★ **Le plan du nouveau quartier**

(a) A est sur (AB) et son image est E : l'image de (AB) passe donc par E. On sait que (d′) est l'image de (AB) par une translation. Or une translation transforme une droite en une droite parallèle.
Donc (d′) //
(AB).

(b) On sait que (d′) // (AB) et que (AB) $\perp$ (CD). Or si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Donc (d′) $\perp$
(CD).

(c) Non. Une translation transforme une droite en une droite parallèle : l'image de (CD) serait parallèle à (CD), pas perpendiculaire. Comme (CD) n'a pas la direction de la translation, ce serait une autre droite, 2 cm plus à gauche $(4 - 2 = 2)$. L'angle conservé, c'est l'angle droit entre (AB) et (CD) : l'image de (CD) serait perpendiculaire à
(d′).

(d) On sait que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une translation. Or l'image d'un cercle est un cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre.
Donc $\mathcal{C}'$ a pour centre O′ (2 cm à gauche de O et 3 cm au-dessus) et pour rayon 1,5 cm. O est sur (AB), donc son image O′ est sur l'image de (AB), c'est-à-dire sur (d′). Longueur : $2 \times \pi \times 1{,}5 = 3 \times \pi \approx 3 \times 3{,}14 \approx 9{,}4$ cm, la même que celle de $\mathcal{C}$.

7. *Frises et pavages*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : la bannière de fanions**

(a) Du 1er au 8e fanion : $8 - 1 = 7$ translations
(et pas 8).

(b) Du 4e au 9e fanion : $9 - 4 = 5$ translations
(et pas 6).

(c) La translation mesure 3 cm de bord gauche à bord gauche, et un fanion fait 2 cm de large. Espace vide : $3 - 2 = 1$ cm.

Ex. 43 **(suite)**

(d) Du 1er au 6e : $6 - 1 = 5$ translations. Décalage : $5 \times 3 = 15$ cm.

(e) Du 1er au 10e : $10 - 1 = 9$ translations. Le 10e fanion commence à $1 + 9 \times 3 = 28$ cm du bord.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : le carrelage en triangles**

(a) De G à H : 2 carreaux vers la droite. Je refais ce déplacement : G $\to$ H, E $\to$ F, D $\to$ E. L'image est le triangle HFE.

(b) Non. Dans GHE, l'angle droit est en bas à droite (en H) ; dans GED, il est en haut à gauche (en D). Les deux triangles n'ont pas la même orientation : on passe de l'un à l'autre par un demi-tour autour du milieu de [GE] (symétrie centrale), pas par une translation.

(c) Ce sont les triangles qui ont l'angle droit en bas à droite : HIF (2 carreaux vers la droite), DEB (2 carreaux vers le haut) et EFC (2 carreaux vers la droite et 2 vers le haut).

(d) G $\to$ E, E $\to$ C, D $\to$ B : c'est la translation qui transforme G en E, soit 2 carreaux vers la droite et 2 carreaux vers le haut.

Ex. 45 ★★☆ **La frise de papier peint**

(a) Non : 1,3 cm, c'est l'espace vide. La translation se mesure de bord gauche à bord gauche : $4{,}5 + 1{,}3 = 5{,}8$ cm.

(b) Du 1er au 12e motif : $12 - 1 = 11$ translations. Début : $0{,}8 + 11 \times 5{,}8 = 64{,}6$ cm. Fin : $64{,}6 + 4{,}5 = 69{,}1$ cm.

(c) Non : du 3e au 12e motif, il y a $12 - 3 = 9$ translations. Décalage : $9 \times 5{,}8 = 52{,}2$ cm.

Ex. 46 ★★☆ **La frise d'une façade**

(a) La translation (1,4 m) se mesure de bord gauche à bord gauche. Espace vide : $1{,}4 - 0{,}9 = 0{,}5$ m.

(b) Ce motif commence à $6{,}8 - 0{,}9 = 5{,}9$ m (début = fin − largeur). Depuis le début du 1er motif, le décalage est de $5{,}9 - 0{,}3 = 5{,}6$ m, soit $5{,}6 \div 1{,}4 = 4$ translations. C'est donc le $4 + 1 = 5$e motif (et non le 4e).

Ex. 46 **(suite)**

(c) Le dernier motif doit se terminer avant 12 m. Il reste $12 - 0{,}3 - 0{,}9 = 10{,}8$ m pour les translations. $7 \times 1{,}4 = 9{,}8$ m tient dans 10,8 m, mais $8 \times 1{,}4 = 11{,}2$ m dépasse : on garde l'entier inférieur, 7 translations, donc $7 + 1 = 8$ motifs. Vérification : le 8e motif se termine à $0{,}3 + 7 \times 1{,}4 + 0{,}9 = 11$ m, et le 9e se terminerait à 12,4 m, ce qui dépasse 12 m.

Ex. 47 ★★★ **Problème : la frise de sapins de l'étagère**

(a) Du 3e au 7e sapin, il y a $7 - 3 = 4$ translations (pas 5). Chaque translation mesure donc $18{,}4 \div 4 = 4{,}6$ cm.

(b) La translation se mesure de bord gauche à bord gauche. L'espace vide vaut donc translation − largeur : $4{,}6 - 2{,}7 = 1{,}9$ cm.

(c) Le 15e sapin est l'image du 1er après $15 - 1 = 14$ translations, pas 15. Il commence à $0{,}8 + 14 \times 4{,}6 = 65{,}2$ cm du bord. Il se termine à $65{,}2 + 2{,}7 = 67{,}9$ cm.

(d) Le 17e sapin commence à $0{,}8 + 16 \times 4{,}6 = 74{,}4$ cm et se termine à $74{,}4 + 2{,}7 = 77{,}1$ cm : il tient, car $77{,}1 < 80$. Le 18e se terminerait à $0{,}8 + 17 \times 4{,}6 + 2{,}7 = 81{,}7$ cm : il dépasse, car $81{,}7 > 80$. Lina peut peindre 17 sapins complets.

Ex. 48 ★★★ **Problème : le pavage du hall de gare**

(a) Non. La translation qui transforme A en B fait glisser de $4 - 0 = 4$ carreaux vers la droite. Elle enverrait E à $1 + 4 = 5$ carreaux du bord gauche, ce qui n'est pas un sommet de BCGF. De plus, BCGF a sa grande base en haut : il est tête en bas. On passe de ABFE à BCGF par la symétrie centrale de centre le milieu de [BF]. Ce centre est à $(4 + 3) \div 2 = 3{,}5$ carreaux du bord gauche et à $(0 + 2) \div 2 = 1$ carreau du bas. A va en G, B en F, F en B et E en C.

(b) CDHG et FGLK ont exactement la même orientation que ABFE : la grande base est en bas. Ce sont donc des images de ABFE par une translation. BCGF est tête en bas : ce n'est pas une translation.

(c) De ABFE à CDHG (A va en C) : $6 - 0 = 6$ carreaux vers la droite, 0 vers le haut. E va en G, car $1 + 6 = 7$. De ABFE à FGLK (A va en F) : $3 - 0 = 3$ carreaux vers la droite et $2 - 0 = 2$ vers le haut. E va en K, car $1 + 3 = 4$ et $2 + 2 = 4$.

Ex. 48 **(suite)**

(d) De A à F : 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Je refais ce déplacement à partir de chaque sommet. C1 est 3 carreaux à droite et 2 au-dessus de C : C1 est confondu avec H, car $6 + 3 = 9$ et $0 + 2 = 2$. D1 est 3 à droite et 2 au-dessus de D. H1 est 3 à droite et 2 au-dessus de H. G1 est 3 à droite et 2 au-dessus de G. Le trapèze C1D1H1G1 a sa grande base en bas, comme CDHG.

Ex. 49 ★★★ **Problème : la frise verticale du rideau**

(a) De U à V : 4 carreaux vers le bas, 0 sur le côté. Je refais ce déplacement à partir de chaque sommet. P′, Q′, R′, S′ et T′ sont 4 carreaux sous P, Q, R, S et T. Par exemple, P′ est à $10 - 4 = 6$ carreaux du bas de la figure.

(b) Du 4e au 9e motif, il y a $9 - 4 = 5$ translations, pas 6. Une translation mesure $4 \times 2{,}5 = 10$ cm. Le 9e motif est donc $5 \times 10 = 50$ cm sous le 4e.

(c) Il y a $190 \div 10 = 19$ translations entre le 1er et le dernier motif. Le dernier motif est donc le $19 + 1 = 20$e (et non le 19e).

(d) Les deux glissements s’enchaînent en une seule translation : 3 carreaux vers la droite et 4 carreaux vers le bas. S arrive au point situé 3 carreaux à droite et 4 carreaux sous S. Sa colonne est à $2 + 3 = 5$ carreaux du bord gauche et sa ligne à $7 - 4 = 3$ carreaux du bas.