1. Rappels : symétries et translation

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : demi-tour dans un repère**

(a) O est le milieu de [PP′] : on change le signe des deux coordonnées.
Donc $P'(-4\,;\,1)$.

(b) On change le signe des deux coordonnées : $R'(3\,;\,2)$.

(c) Inès n'a changé le signe que d'une seule coordonnée : son point est le symétrique de T par rapport à l'axe des ordonnées. Il faut changer les deux signes : $T'(-5\,;\,-2)$.

(d) O est le milieu de [UU′], donc on change aussi les deux signes pour revenir au départ : $U(0\,;\,4)$.

(e) Seul le centre O est invariant : c'est le seul point qui est sa propre image.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : translation dans un repère**

(a) Pour aller de D à H, on se déplace de 3 vers la droite et de 2 vers le haut. On fait le même déplacement à partir de K : $K'(3\,;\,0)$.

(b) N est le point de départ : on fait le déplacement inverse, 3 vers la gauche et 2 vers le bas, à partir de N′.
Donc $N(1\,;\,-1)$.

(c) Cette translation fait le déplacement inverse : 3 vers la gauche et 2 vers le bas. L'image de K est donc le point $(-3\,;\,-4)$, et non K′.

(d) La translation qui transforme D en H transforme K en K′, donc DHK′K est un parallélogramme (dans cet ordre : D, H, puis l'image K′, puis K).

(e) Aucun : chaque point glisse de 3 vers la droite et de 2 vers le haut, donc aucun point ne reste à sa place.

Ex. 3 ★★☆ **Symétrie axiale avec un axe oblique**

(a) C'est F. Pour aller de A à F, on va de 2 carreaux vers la droite et de 2 vers le bas : on suit la diagonale perpendiculaire à (d). Le milieu de [AF], 1 carreau à droite et 1 en bas de A, est sur (d).
Donc (d) est la médiatrice de [AF].

(b) Le segment [AE] est horizontal, il n'est donc pas perpendiculaire à (d), qui est oblique. (d) n'est pas la médiatrice de [AE] : E n'est pas le symétrique de A.

Ex. 3 (suite)

(c) On suit la diagonale perpendiculaire à (d) : B′ est à 3 carreaux vers la gauche et 3 carreaux vers le haut de B. Le milieu de [BB′] est bien sur (d).

(d) Ce sont tous les points de l'axe (d), et seulement eux.

Ex. 4 ★★☆ **Reconnaître la transformation**

(a) A→B→C et D→E→F tournent tous les deux dans le sens inverse des aiguilles d'une montre : DEF n'est pas retourné, ce n'est pas une symétrie axiale. Mais C est au-dessus de A alors que F est en dessous de D : DEF a la tête en bas. C'est un demi-tour (une symétrie centrale). Son centre est le milieu de [AD] : $\left(\frac{1+(-3)}{2}\,;\,\frac{1+(-1)}{2}\right) = (-1\,;\,0)$. On vérifie que c'est aussi le milieu de [BE] : $\left(\frac{4+(-6)}{2}\,;\,\frac{1+(-1)}{2}\right) = (-1\,;\,0)$.

(b) On sait que [DE] est l'image de [AB] par le demi-tour. Or un demi-tour conserve les longueurs.
Donc DE = AB = 3 cm.

(c) La droite (DE) est l'image de la droite (AB) par un demi-tour. Or, par un demi-tour, l'image d'une droite est une droite parallèle.
Donc (DE) est parallèle à (AB).

(d) Non. La translation qui transforme A en D fait aller de 4 vers la gauche et de 2 vers le bas : elle enverrait B en $(0\,;\,-1)$, et non en $E(-6\,;\,-1)$. D'ailleurs, C est au-dessus de A, alors que F est en dessous de D : la figure a la tête en bas, ce n'est pas une translation.

Ex. 5 ★★★ **Translation : image, antécédent et sens du déplacement**

(a) Pour aller de $A(-3\,;\,2)$ à $B(1\,;\,1)$, on se déplace de 4 carreaux vers la droite et de 1 carreau vers le bas.
Chaque point glisse de la même façon.
Donc C′ a pour coordonnées $(-1+4\,;\,-2-1)$, c'est-à-dire $C'(3\,;\,-3)$.

(b) Non. Maël a calculé l'image de N, pas son antécédent. L'antécédent est le point de départ : on fait le déplacement inverse, donc 4 carreaux vers la gauche et 1 carreau vers le haut : $(2-4\,;\,4+1) = (-2\,;\,5)$.
Vérification : $(-2+4\,;\,5-1) = (2\,;\,4)$, on retrouve bien N.

Ex. 5 **(suite)**

(c) C′ est l'image de C par la translation qui transforme A en B, donc ABC′C est un parallélogramme (dans cet ordre, et non ABCC′). Or les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.
Donc CC′ = AB. De A à B : 4 carreaux à l'horizontale et 1 à la verticale. Dans le triangle rectangle ainsi formé, d'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = 4^2 + 1^2 = 17$, donc $AB = \sqrt{17} \approx 4{,}1$ cm.
Donc $CC' \approx 4{,}1$ cm.

(d) B est l'image de A, donc A est l'antécédent de B, pas son image. Tom a fait le déplacement inverse, celui de la translation qui transforme B en A, qui est une autre translation. Pour l'image de B, on refait le même déplacement, 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas : $B'(1+4\,;\,1-1) = (5\,;\,0)$.

(e) Une translation fait glisser tous les points du même déplacement, sans tourner ni retourner la figure : l'image a la même orientation que ACN. Or une translation conserve les aires.
Donc l'image de ACN a la même aire que ACN.

Ex. 6 ★★★ **Symétrie axiale : corriger une image mal placée**

(a) A est à 3 carreaux à gauche de (d). Son symétrique est sur la même horizontale, à 3 carreaux à droite de (d) : $A'(7\,;\,1)$. B est à 1 carreau à gauche de (d), donc $B'(5\,;\,1)$.

(b) L'axe (d) doit être la médiatrice de [CC1], c'est-à-dire qu'il doit couper [CC1] perpendiculairement et en son milieu. Ici, C et C1 n'ont pas la même ordonnée (5 et 3) : [CC1] n'est pas horizontal, donc il n'est pas perpendiculaire à (d). Être à la même distance de (d) ne suffit pas. C′ est sur l'horizontale de C, à 3 carreaux à droite de (d) : $C'(7\,;\,5)$. Vérification : le milieu de [CC′] est $(4\,;\,5)$, il est bien sur (d).

(c) M est le point de départ. M′ est à 2 carreaux à droite de (d). (d) est la médiatrice de [MM′], donc M est sur la même horizontale, à 2 carreaux à gauche de (d) : $M(2\,;\,3)$. Vérification : le milieu de [MM′] est $(4\,;\,3)$, il est bien sur (d).

Ex. 6 **(suite)**

(d) ABC est rectangle en A, donc son aire vaut $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$ cm². A′B′C′ est l'image de ABC par la symétrie d'axe (d). Or une symétrie axiale conserve les longueurs et les aires.
Donc A′C′ = AC = 4 cm et l'aire de A′B′C′ vaut 4 cm².

(e) Non : A′B′C′ est retourné, comme dans un miroir. B est à droite de A, alors que B′ est à gauche de A′. Une figure retournée est le signe d'une symétrie axiale (un pliage le long de l'axe).

Ex. 7 ★★★ **Demi-tour : centre à l'origine ou non**

(a) Lucas n'a changé que le signe de l'ordonnée : son point est G, le symétrique de E par rapport à l'axe des abscisses. Par le demi-tour de centre O, O doit être le milieu de [EE′] : on change le signe des deux coordonnées.
Donc $E'(-3\,;\,2)$. Vérification : le milieu de [EE′] est $(0\,;\,0)$.

(b) F est le point de départ. Le demi-tour de centre O change le signe des deux coordonnées, donc $F(4\,;\,1)$. Le milieu de [FF′] est $\left(\frac{4+(-4)}{2}\,;\,\frac{1+(-1)}{2}\right) = (0\,;\,0)$: c'est bien O.

(c) K doit être le milieu de [GG1]. De G à K, on se déplace de 2 carreaux vers la gauche et de 1 carreau vers le bas. On refait ce déplacement à partir de K : $G1(1-2\,;\,1-1) = (-1\,;\,0)$. Vérification : le milieu de [GG1] est $\left(\frac{3+(-1)}{2}\,;\,\frac{2+0}{2}\right) = (1\,;\,1)$, c'est bien K.

(d) Un demi-tour conserve les longueurs, donc l'image de [EG] mesure aussi 4 cm. De plus, par un demi-tour, l'image d'une droite est une droite parallèle. Comme (EG) est verticale, son image est aussi verticale. Vérification : E′(−3 ; 2) et G′(−3 ; −2) (question suivante) ont la même abscisse −3.

(e) On change le signe des deux coordonnées de G(3 ; 2) : $G'(-3\,;\,-2)$. Or $G1(-1\,;\,0)$: G′ et G1 ne sont pas confondus. Les deux demi-tours n'ont pas le même centre, donc ils n'envoient pas G au même endroit.

2. *Rotation : centre, angle et sens*

Ex. 8 ★☆☆ **La pale d'une éolienne**

(a) On sait que M′ est l'image de M par la rotation de centre O. Or une rotation de centre O vérifie $OM' = OM$.
Donc $OM' = 3{,}6$ cm.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Le centre d'une rotation ne bouge pas : l'image de O est O lui-même (point invariant).

(c) Comme $OM' = OM$, le triangle OMM′ est isocèle en O.

(d) Le triangle OMM′ est isocèle en O, donc ses angles en M et en M′ sont égaux : $\widehat{OMM'} = (180° - 45°) \div 2 = 67{,}5°$. L'angle de la rotation, 45°, se lit au centre O, pas en M.

(e) On a $MM' = OM$ seulement quand le triangle OMM′ est équilatéral, c'est-à-dire pour une rotation de 60°. Ici ses angles mesurent 45°, 67,5° et 67,5° : il n'est pas équilatéral, donc $MM' \neq OM$. Seule l'égalité $OM' = OM$ est toujours vraie.

Ex. 9 ★☆☆ **Fractions de tour et grande aiguille**

(a) Un tour complet fait 360°, donc un seizième de tour fait $360 \div 16 = 22{,}5°$.

(b) Le sens horaire est celui des aiguilles d'une montre : de 12 h, on va vers 3 h.
Donc la pointe arrive en Q. Dans le sens anti-horaire, elle serait arrivée en N : le sens compte.

(c) La grande aiguille tourne de $360 \div 60 = 6°$ par minute. En 25 min : $25 \times 6 = 150°$, dans le sens horaire.

(d) $210 \div 6 = 35$: il faut 35 min.

(e) $360 - 110 = 250$: c'est une rotation de 250° dans le sens anti-horaire. On arrive au même point.

(f) Une rotation de 360° est un tour complet : chaque point revient à sa place. L'image de H est H.

Ex. 10 ★★☆ **Quarts de tour dans un repère**

(a) Quart de tour anti-horaire autour de O : $(x\,;\,y)$ devient $(-y\,;\,x)$, donc $A_1(-1\,;\,4)$. Quart de tour horaire : $(x\,;\,y)$ devient $(y\,;\,-x)$, donc $A_2(1\,;\,-4)$. Les deux images sont différentes : le sens compte.

(b) Le demi-tour de centre O donne $(-x\,;\,-y)$, donc l'image est $(-4\,;\,-1)$ dans les deux sens. Pour 180°, le sens ne compte pas.

(c) Pour revenir de B à C, on tourne de 90° dans l'autre sens, le sens horaire : $(x\,;\,y)$ devient $(y\,;\,-x)$, donc $C(2\,;\,3)$. Vérification : le quart de tour anti-horaire transforme $C(2\,;\,3)$ en $(-3\,;\,2)$, c'est bien B.

(d) Une rotation se donne par trois éléments. Nina a oublié le centre (O) et le sens (anti-horaire) : « la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens anti-horaire ».

Ex. 11 ★★☆ **La nacelle du manège**

(a) On trace [OP]. On centre le rapporteur en O, on marque 120° à partir de [OP] dans le sens des aiguilles d'une montre et on trace la demi-droite d'origine O. Au compas, pointe en O et écartement $OP = 4{,}5$ cm, on reporte la longueur sur cette demi-droite : c'est P′, avec $OP' = 4{,}5$ cm.

(b) L'angle de la rotation se mesure au centre : c'est $\widehat{POP'}$, de sommet O. Il fallait centrer le rapporteur en O, pas en P.

(c) Comme $OP' = OP$, le triangle OPP′ est isocèle en O, donc $\widehat{OPP'} = \widehat{OP'P} = (180° - 120°) \div 2 = 30°$.

(d) Oui. Tourner de 120° dans le sens horaire ou de $360 - 120 = 240°$ dans le sens anti-horaire mène au même point. Dans les deux cas, l'angle $\widehat{POP'}$ tracé mesure 120°, car un angle tracé ne dépasse pas 180°.

Ex. 12 ★★★ **L'horloge de la gare**

(a) La grande aiguille fait un tour complet, soit 360°, en 60 min : $360 \div 60 = 6$, soit 6° par minute. La petite aiguille fait un tour complet en 12 h, soit $12 \times 60 = 720$ min : $360 \div 720 = 0{,}5$, soit 0,5° par minute.

(b) De 12 h à 3 h, on parcourt 3 heures sur 12, soit un quart de tour : $360 \div 4 = 90°$, dans le sens des aiguilles. C'est donc la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens horaire. Attention : avec le sens anti-horaire, D irait sur 9 h, pas sur T.

(c) En 20 min, la grande aiguille tourne de $20 \times 6 = 120°$. La petite aiguille ne reste pas sur 3 h : elle tourne de $20 \times 0{,}5 = 10°$.

(d) On repère les positions à partir de [OD], dans le sens horaire. La grande aiguille est à 120°. La petite aiguille est à $90° + 10° = 100°$. L'angle formé par les deux aiguilles mesure donc $120° - 100° = 20°$ (et pas 30°, car la petite aiguille a avancé).

(e) De 3 h 20 à 4 h 05, il s'écoule 45 min. La grande aiguille tourne donc de $45 \times 6 = 270°$ dans le sens horaire. Or tourner de 270° dans le sens horaire revient à tourner de $360° - 270° = 90°$ dans le sens anti-horaire : on arrive au même point. Noé a donc raison, même si l'aiguille a réellement tourné dans le sens horaire. L'angle tracé entre ses deux positions mesure 90°, car un angle tracé ne dépasse pas 180°.

Ex. 13 ★★★ **Le logo d'Inès**

(a) On sait que B est l'image de A par la rotation de centre O, d'angle 60°. Or une rotation vérifie $OB = OA$ et $\widehat{AOB}$ = angle de la rotation.
Donc $OB = OA = 4$ cm et $\widehat{AOB} = 60°$. Le triangle OAB est isocèle en O, donc ses deux autres angles mesurent chacun $(180° - 60°) \div 2 = 60°$. Ses trois angles mesurent 60° : OAB est équilatéral, donc $AB = OA = 4$ cm.

(b) L'égalité $AC = OA$ n'est vraie que pour un angle de 60°. Ici l'angle mesure 90° : on sait seulement que $OC = OA = 4$ cm et que $\widehat{AOC} = 90°$. Le triangle AOC est donc rectangle isocèle en O. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = OA^2 + OC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, donc $AC = \sqrt{32} \approx 5{,}7$ cm.

(c) B est tourné de 60° d'un côté de [OA] et C de 90° de l'autre côté, donc $\widehat{BOC} = \widehat{BOA} + \widehat{AOC} = 60° + 90° = 150°$. Pour aller de B à C en passant par A, on tourne dans le sens horaire. C est l'image de B par la rotation de centre O, d'angle 150°, dans le sens horaire.

(d) L'angle de la rotation qui transforme B en C se mesure au centre O : c'est $\widehat{BOC} = 150°$, et pas l'angle de sommet B. On sait que $OB = OA$ et $OC = OA$, donc $OB = OC = 4$ cm : le triangle OBC est isocèle en O, et ses angles à la base sont égaux.
Donc $\widehat{OBC} = (180° - 150°) \div 2 = 15°$.

Ex. 14 ★★★ **Le moulin du carrelage**

(a) A est le centre de la rotation : il est invariant, donc $A_1 = A$. B est à 3 carreaux à droite de A. Par le quart de tour anti-horaire, B_1 est à 3 carreaux au-dessus de A. C est à 2 carreaux au-dessus de A, donc C_1 est à 2 carreaux à gauche de A. On trace le triangle AB_1C_1, rectangle en A
(une rotation conserve les angles).

(b) Non. D'abord, sa rotation est incomplète : il manque le sens. Ensuite, un quart de tour de centre A envoie B, situé à 3 carreaux à droite de A, à 3 carreaux au-dessus ou au-dessous de A. Aucun sommet de ACD n'y est : D est à 3 carreaux à gauche de A, avec $\widehat{BAD} = 180°$. De plus, ACD est retourné. C'est l'image de ABC par la symétrie axiale d'axe (AC) : B a pour image D, et C est invariant.

Ex. 14 (suite)

(c) La droite (B_1C_1) est l'image de la droite (BC) par le quart de tour de centre A. Or un quart de tour transforme une droite en une droite perpendiculaire. Donc $(B_1C_1) \perp (BC)$. Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, donc $BC = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm. Or une rotation conserve les longueurs, donc $B_1C_1 = BC \approx 3{,}6$ cm.

(d) On applique deux quarts de tour de même centre A, dans le même sens : les angles s'additionnent, $90° + 90° = 180°$. C'est la rotation de centre A, d'angle 180°, c'est-à-dire le demi-tour de centre A (symétrie centrale de centre A). Pour 180°, le sens ne compte pas.

(e) Une rotation conserve les angles : chaque triangle a un angle de 90° en A. Les quatre triangles occupent chacun un quart de tour autour de A, et $4 \times 90° = 360°$: ils font exactement le tour de A, sans se chevaucher ni laisser de trou. Un quatrième quart de tour ramènerait ABC à sa place. Une rotation conserve aussi les aires : chaque triangle a une aire de $3 \times 2 \div 2 = 3$ cm², donc le motif a une aire de $4 \times 3 = 12$ cm².

3. *Image d'un point par une rotation*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes — quart de tour et demi-tour sur quadrillage**

(a) De O à A : 2 carreaux à droite et 4 en haut. Avec un quart de tour dans le sens anti-horaire, les deux nombres s'échangent. De O à A′ : 4 carreaux à gauche et 2 en haut. Attention : « 2 à gauche et 4 en haut » serait une symétrie, pas un quart de tour.

(b) De O à B : 3 carreaux à droite et 1 en bas. Dans le sens horaire, « à droite » devient « en bas » et « en bas » devient « à gauche ». De O à B′ : 1 carreau à gauche et 3 en bas.

(c) De O à C : 2 carreaux à gauche et 1 en haut. Par le demi-tour, O est le milieu de [CC′]. De O à C′ : 2 carreaux à droite et 1 en bas.

(d) Le centre ne bouge pas : l'image de O est O lui-même. O est un point invariant.

Ex. 15 **(suite)**

(e) De O à D : 3 carreaux à gauche et 2 en bas. Pour trouver l'antécédent, on tourne dans l'autre sens : rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens horaire. De O à E : 2 carreaux à gauche et 3 en haut. Vérification : en tournant E d'un quart de tour dans le sens anti-horaire, on obtient « 3 à gauche et 2 en bas », c'est-à-dire D.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes — dans un repère**

(a) Le centre est l'origine et le sens est anti-horaire, donc $(x\,;\,y)$ devient $(-y\,;\,x)$.
Donc $R'(-1\,;\,4)$.

(b) Le centre est l'origine et le sens est horaire, donc $(x\,;\,y)$ devient $(y\,;\,-x)$.
Donc $S'(5\,;\,3)$.

(c) Par le demi-tour de centre O, $(x\,;\,y)$ devient $(-x\,;\,-y)$.
Donc $T'(4\,;\,2)$.

(d) Pour trouver l'antécédent, on tourne dans l'autre sens : on prend l'image de U′ par le quart de tour de centre O dans le sens horaire, soit $(y\,;\,-x)$.
Donc $U(6\,;\,-2)$. Vérification : le quart de tour anti-horaire donne $(-(-2)\,;\,6) = (2\,;\,6)$.

(e) Non. La règle $(-y\,;\,x)$ ne marche que si le centre est l'origine, or ici le centre est K. On compte depuis K : de K à V, 4 à droite et 3 en haut. Après le quart de tour anti-horaire : 3 à gauche et 4 en haut.
Donc l'image est $(1-3\,;\,1+4)$, soit $(-2\,;\,5)$.

Ex. 17 ★★☆ **L'essuie-glace : construire au rapporteur et au compas**

(a) ① Je trace [OM] de longueur 4 cm. ② Je centre le rapporteur sur O, avec le zéro sur [OM), et je compte 65° dans le sens des aiguilles d'une montre (vers le bas si M est à droite de O). Je trace la demi-droite. ③ Je plante la pointe du compas sur O, avec un écartement OM = 4 cm, et je reporte cette longueur sur la demi-droite : c'est M′. Contrôle : OM′ = 4 cm.

(b) Première erreur : l'angle de 65° se mesure en O (c'est $\widehat{MOM'}$). Le rapporteur doit donc être centré sur O, avec le zéro sur [OM), et non sur M. Deuxième erreur : M′ doit être à la même distance du centre que M. La pointe du compas se plante sur O, avec un écartement OM, et non sur M
(on ne reporte pas MM′).

Ex. 17 **(suite)**

(c) On sait que M′ est l'image de M par la rotation de centre O.
Donc OM′ = OM et le triangle OMM′ est isocèle en O, avec $\widehat{MOM'} = 65^\circ$. Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux et la somme des angles vaut 180°.
Donc $\widehat{OMM'} = (180^\circ - 65^\circ) \div 2 = 57{,}5^\circ$.

Ex. 18 ★★☆ **Le logo du club : quart de tour autour d'un sommet**

(a) Non. De A à B : 3 carreaux à droite et 2 en haut. De A à E : 3 carreaux à droite et 2 en bas. Les deux nombres n'ont pas été échangés : E est le symétrique de B par rapport à la droite horizontale passant par A. Ce n'est pas l'image de B par un quart de tour
(l'angle $\widehat{BAE}$ n'est pas droit).

(b) A est le centre, donc A′ = A. Dans le sens horaire, « a à droite et b en haut » devient « b à droite et a en bas ». De A à B (3 à droite, 2 en haut), on obtient B′ : 2 carreaux à droite et 3 en bas. De A à C (1 à droite, 4 en haut), on obtient C′ : 4 carreaux à droite et 1 en bas. On relie A, B′ et C′. Contrôles : AB′ = AB au compas et $\widehat{BAB'} = 90^\circ$ à l'équerre.

(c) Avec les carreaux, le triangle formé par A, B et le nœud placé 3 carreaux à droite de A est rectangle, de côtés 3 cm et 2 cm. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, donc $AB = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm. Or une rotation conserve les longueurs, donc AB′ = AB, et $\widehat{BAB'} = 90^\circ$. Le triangle ABB′ est donc rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BB'^2 = 13 + 13 = 26$, donc $BB' = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ cm.

Ex. 19 ★★★ **La grande roue : le triangle OMM′ et la construction**

(a) On sait que N est l'image de M par la rotation de centre O, d'angle 60°. Or une rotation conserve la distance au centre.
Donc ON = OM = 15 m et $\widehat{MON} = 60^\circ$. Le triangle OMN est donc isocèle en O. Ses angles à la base mesurent $(180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$. Ses trois angles mesurent 60° : OMN est équilatéral.
Donc MN = OM = 15 m.

(b) On sait que P est l'image de M par le quart de tour de centre O.
Donc OP = OM = 15 m et $\widehat{MOP} = 90^\circ$: le triangle OMP est rectangle isocèle en O. D'après le théorème de Pythagore : $MP^2 = 15^2 + 15^2 = 450$.
Donc $MP = \sqrt{450} \approx 21{,}2$ m.

Ex. 19 **(suite)**

(c) Erreur 1 : le rapporteur se centre sur O (le centre de la rotation), pas sur M. Erreur 2 : la rotation est dans le sens anti-horaire, Léo a tourné dans le sens horaire. Erreur 3 : on reporte OM au compas, pointe sur O, et pas à partir de M. La bonne construction : je trace [OM]. Je centre le rapporteur sur O, le zéro sur [OM). Je compte 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et je trace la demi-droite. Pointe du compas sur O, écartement OM, je reporte P sur cette demi-droite. Contrôle : OP = OM et $\widehat{MOP} = 90^\circ$.

(d) OQ = OM et $\widehat{MOQ} = 40^\circ$, donc le triangle OMQ est isocèle en O. Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{OMQ} = (180^\circ - 40^\circ) \div 2 = 70^\circ$. Tourner de 40° dans le sens horaire revient à tourner de $360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$ dans le sens anti-horaire. Il s'agit de la rotation de centre O, d'angle 320°, dans le sens anti-horaire.

Ex. 20 ★★★ **Le carrelage de Jade : quart de tour autour d'un point extérieur**

(a) Non. Noé a gardé les deux mêmes nombres en changeant seulement de côté : c'est une symétrie axiale, pas un quart de tour. Pour un quart de tour dans le sens anti-horaire, « a à droite et b en haut » devient « b à gauche et a en haut » : les deux nombres s'échangent. De O à A′ : 2 carreaux à gauche et 1 en haut.

(b) Je compte depuis le centre O, pas depuis le coin du quadrillage. De O à B : 4 à droite et 3 en haut. Donc de O à B′ : 3 à gauche et 4 en haut. De O à C : 2 à droite et 4 en haut. Donc de O à C′ : 4 à gauche et 2 en haut. Je relie A′, B′ et C′ dans cet ordre.

(c) De O à B : 4 carreaux à droite et 3 en haut. D'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, donc OB = 5 cm. B′ est l'image de B par le quart de tour de centre O. Or une rotation conserve la distance au centre, donc OB′ = OB = 5 cm. L'angle de la rotation est 90°, donc $\widehat{BOB'} = 90^\circ$. Le triangle OBB′ est rectangle en O : $BB'^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc $BB' = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm.

(d) Le triangle ABC tient dans un rectangle de 3 carreaux sur 2, d'aire 6 cm². J'enlève trois triangles rectangles d'aires $3 \times 1 \div 2 = 1{,}5$ cm², $2 \times 1 \div 2 = 1$ cm² et $1 \times 2 \div 2 = 1$ cm². Aire de ABC : $6 - 3{,}5 = 2{,}5$ cm². A′B′C′ est l'image de ABC par une rotation. Or une rotation conserve les aires.
Donc l'aire de A′B′C′ est 2,5 cm².

Ex. 20 **(suite)**

(e) Non. Le centre O est à 0 carreau de lui-même : en tournant autour de O, il ne bouge pas. Son image est O lui-même : O est un point invariant de la rotation.

Ex. 21 ★★★ **Le vaisseau de Maëlys : quart de tour dans un repère et antécédent**

(a) Le centre est l'origine O. Par le quart de tour horaire, $(x\,;\,y)$ devient $(y\,;\,-x)$.
Donc $E_1(1\,;\,-2)$, $F_1(1\,;\,-5)$ et $G_1(3\,;\,-5)$.

(b) Yanis a tourné encore dans le sens anti-horaire. Pour retrouver l'antécédent, il faut tourner dans l'autre sens : le quart de tour horaire, $(x\,;\,y)$ devient $(y\,;\,-x)$. Donc $H(4\,;\,3)$. Contrôle : par le quart de tour anti-horaire, (4 ; 3) devient (−3 ; 4), c'est bien H′.

(c) La formule $(-y\,;\,x)$ ne marche que si le centre est l'origine du repère. Ici, le centre est F : je compte les carreaux depuis F. De F à E : 3 carreaux à gauche. Après un quart de tour anti-horaire : 3 carreaux en bas. L'image de E est donc le point $(5\,;\,-2)$.

(d) G1 est l'image de G par le quart de tour de centre O. Donc OG1 = OG et $\widehat{GOG_1} = 90^\circ$. Or $OG^2 = 5^2 + 3^2 = 34$. Le triangle OGG1 est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $GG_1^2 = 34 + 34 = 68$.
Donc $GG_1 = \sqrt{68} \approx 8{,}2$ cm.

(e) E1F1G1 est l'image de EFG par une rotation. Or une rotation conserve les angles et les longueurs. EF est horizontal et FG est vertical, donc $\widehat{EFG} = 90^\circ$, d'où $\widehat{E_1F_1G_1} = 90^\circ$. De plus FG = 3 − 1 = 2 cm, donc F1G1 = FG = 2 cm.

4. *Image d'une figure par une rotation*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : quarts de tour et demi-tour dans un repère**

(a) Par le quart de tour anti-horaire de centre O, $(x\,;\,y)$ devient $(-y\,;\,x)$.
Donc $A'(1\,;\,4)$: « 4 à droite et 1 en bas » devient « 1 à droite et 4 en haut ».

(b) Par le quart de tour horaire de centre O, $(x\,;\,y)$ devient $(y\,;\,-x)$.
Donc $B'(4\,;\,2)$.

(c) Par le demi-tour de centre O, $(x\,;\,y)$ devient $(-x\,;\,-y)$.
Donc $C'(3\,;\,4)$.

Ex. 22 **(suite)**

(d) On cherche $D(x\,;\,y)$ tel que $(-y\,;\,x) = (2\,;\,5)$.
Donc $x = 5$ et $y = -2$: $D(5\,;\,-2)$. Vérification : l'image de $(5\,;\,-2)$ est bien $(2\,;\,5)$.

(e) Non. Le point $(-6\,;\,2)$ est le symétrique de E par rapport à l'axe des ordonnées : Lina a fait une symétrie axiale. Par le quart de tour, les deux nombres s'échangent : « 6 à droite et 2 en haut » devient « 2 à gauche et 6 en haut », donc $E'(-2\,;\,6)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : ce que conserve la rotation d'un logo**

(a) A est le centre de la rotation. Or le centre d'une rotation est un point invariant.
Donc l'image de A est A lui-même.

(b) Le segment [A′C′] est l'image du segment [AC]. Or une rotation conserve les longueurs.
Donc A′C′ = AC = 3 cm
(et comme A′ = A, c'est aussi la longueur AC′).

(c) Le triangle A′B′C′ est l'image du triangle ABC. Or une rotation conserve les longueurs, donc aussi les périmètres.
Donc le périmètre de A′B′C′ vaut AB + BC + AC = 4 + 5 + 3 = 12 cm.

(d) L'angle $\widehat{B'A'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{BAC}$. Or une rotation conserve les angles.
Donc $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC} = 90°$.

(e) Le triangle ABC est rectangle en A, donc son aire vaut (AB × AC) ÷ 2 = (4 × 3) ÷ 2 = 6 cm². Or une rotation conserve les aires.
Donc l'aire du triangle A′B′C′ est 6 cm².

Ex. 24 ★★☆ **La pale d'une éolienne**

(a) ① Je trace le segment [OM]. ② Je place le centre du rapporteur sur O et son zéro sur [OM], je compte 120° dans le sens des aiguilles d'une montre (vers le bas) et je trace la demi-droite. ③ Pointe du compas sur O, écartement OM = 3 cm, je reporte M′ sur cette demi-droite. Contrôle : OM′ = OM = 3 cm et $\widehat{MOM'} = 120°$.

(b) Mêmes étapes avec N : [ON], 120° dans le sens horaire au rapporteur centré sur O, compas d'écartement ON. Puis je relie M′ et N′. [M′N′] est l'image de [MN] par la rotation. Or une rotation conserve les longueurs.
Donc M′N′ = MN = 2,5 cm.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Une rotation conserve les longueurs, donc OM′ = OM : le triangle OMM′ est isocèle en O, avec $\widehat{MOM'} = 120°$. Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{OMM'} = (180° - 120°) \div 2 = 30°$.

(d) L'angle de la rotation est l'angle $\widehat{MOM'}$, son sommet est le centre O. Le rapporteur doit donc être centré sur O, pas sur M. En le centrant sur M, Léa construit un autre angle et M′ n'est pas à la bonne place.

Ex. 25 ★★☆ **Un motif de carrelage qui tourne**

(a) Non. De O à A : 1 carreau à droite et 3 en haut ; de O à D : 3 à droite et 1 en bas. De même, B (4 à droite, 1 en haut) donne E (1 à droite, 4 en bas), et C (3 à droite, 4 en haut) donne F (4 à droite, 3 en bas). Les nombres s'échangent, mais l'image part vers le bas, dans le sens des aiguilles d'une montre. DEF est l'image de ABC par le quart de tour de centre O dans le sens horaire.
Noé s'est trompé de sens.

(b) Sens anti-horaire : « a à droite et b en haut » devient « b à gauche et a en haut ». A′ : 3 à gauche et 1 en haut ; B′ : 1 à gauche et 4 en haut ; C′ : 4 à gauche et 3 en haut. Je relie A′, B′ et C′ dans cet ordre. Contrôle : de A à B, on compte 3 à droite et 2 en bas ; de A′ à B′, on compte 2 à droite et 3 en haut
(les nombres s'échangent).

(c) Non. Une rotation fait tourner la figure, elle ne la retourne pas : seule une symétrie axiale retourne une figure. Le triangle A′B′C′ a la même orientation que ABC (on tourne de A vers B puis C dans le même sens), et il est superposable à ABC sans le retourner.

Ex. 26 ★★★ **La pièce de puzzle qui a tourné**

(a) Dans ABC : AB = 3 carreaux, AC = 2 carreaux, et l'angle en A est droit. Dans RST : TR = 3 carreaux, TS = 2 carreaux, et l'angle en T est droit. Or une rotation conserve les longueurs et les angles.
Donc l'image de A est T (le sommet de l'angle droit, commun aux côtés de 3 et de 2 carreaux), l'image de B est R (au bout du côté de 3 carreaux) et l'image de C est S
(au bout du côté de 2 carreaux).

Ex. 26 **(suite)**

(b) Avec K : de K à A, on compte 3 carreaux à gauche et 1 en haut ; de K à T, on compte 3 carreaux à droite et 1 en bas. Les nombres de carreaux ne s'échangent pas : c'est le demi-tour de centre K, pas un quart de tour. De plus, KB = 1 carreau, alors que de K à R il y a 3 carreaux à droite et 2 en haut, donc KR ≠ KB. K n'est pas le centre. Avec L : de L à A, 4 carreaux à gauche et 2 en bas, et de L à T, 2 à droite et 4 en bas ; de L à B, 1 à gauche et 2 en bas, et de L à R, 2 à droite et 1 en bas ; de L à C, 4 à gauche, et de L à S, 4 en bas. Les deux nombres s'échangent à chaque fois. Le centre est donc L. C est à gauche de L et son image S est en dessous de L : on passe de « à gauche » à « en dessous », dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. C'est la rotation de centre L, d'angle 90°, dans le sens anti-horaire.

(c) On sait que T est l'image de A par le quart de tour de centre L.
Donc LT = LA et le triangle ALT est rectangle en L.
$LA^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ et $LT^2 = 2^2 + 4^2 = 20$. D'après le théorème de Pythagore, $AT^2 = LA^2 + LT^2 = 20 + 20 = 40$.
Donc $AT = \sqrt{40} \approx 6{,}3$ cm.

(d) Les deux rotations ont le même centre L et le même sens, donc on additionne les angles : $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. On passe directement de ABC à la nouvelle position par la rotation de centre L, d'angle 180° (le demi-tour de centre L). De L à A, on compte 4 carreaux à gauche et 2 en bas.
Donc l'image finale de A est à 4 carreaux à droite et 2 en haut de L
(L est le milieu du segment qui relie A à ce point).

Ex. 27 ★★★ **Le blason du club de judo**

(a) A est le centre de la rotation, donc A est invariant : A′ = A. Pour B′ : ① je trace [AB] ; ② je centre le rapporteur sur A, je mets le zéro sur [AB) et je compte 60° dans le sens anti-horaire, puis je trace la demi-droite ; ③ au compas (pointe sur A, écartement AB = 5 cm), je reporte B′ sur cette demi-droite. Pour C′, je fais la même chose à partir de [AC) : 60° dans le sens anti-horaire, puis AC′ = 5 cm. Enfin, je relie A, B′ et C′ dans le même ordre que A, B et C.

Ex. 27 **(suite)**

(b) On sait que B′ est l'image de B par la rotation de centre A, d'angle 60°.
Donc AB′ = AB et $\widehat{BAB'} = 60^\circ$. Le triangle ABB′ est isocèle en A, et ses deux angles à la base mesurent $(180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$. Ses trois angles mesurent 60° : ABB′ est équilatéral.
Donc BB′ = AB = 5 cm.

(c) La rotation tourne dans le sens anti-horaire, du même côté que C par rapport à [AB).
Donc $\widehat{BAC'} = \widehat{BAC} + \widehat{CAC'} = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$. Dans le triangle ABC isocèle en A : $\widehat{ABC} = (180^\circ - 40^\circ) \div 2 = 70^\circ$. Or une rotation conserve les angles.
Donc $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC} = 70^\circ$.

(d) Il suffit de construire l'image du centre : par cette rotation, l'image de B est B′. Or une rotation conserve les longueurs, donc le rayon ne change pas. L'image de $\mathcal{C}$ est le cercle de centre B′ et de rayon 1,5 cm.

Ex. 28 ★★★ **La nacelle du manège**

(a) Par le quart de tour de centre O dans le sens horaire, le point (x ; y) a pour image (y ; −x).
Donc $A'(3\,;\,-2)$, $B'(1\,;\,-6)$, $C'(5\,;\,-6)$ et $D'(5\,;\,-3)$.
On place les quatre images, puis on les relie dans le même ordre : A′, B′, C′, D′.

(b) Non. Son point E est le point A lui-même : Maëlle a laissé A fixe, comme si A était le centre. De A à B, on compte 4 à droite et 2 en bas ; de E à F, 2 à gauche et 4 en bas : c'est bien un quart de tour horaire, mais de centre A. Elle s'est trompée de centre. Or seul le centre d'une rotation est invariant ; ici le centre est O, et l'image de A est $A'(3\,;\,-2)$, pas $E(2\,;\,3)$.

(c) L′ est l'image de L par le quart de tour horaire de centre O. Pour revenir en arrière, je fais tourner L′ d'un quart de tour dans le sens anti-horaire : (x ; y) devient (−y ; x).
Donc $L(-1\,;\,-4)$. Vérification : par le quart de tour horaire, (−1 ; −4) devient (−4 ; 1). C'est bien L′.

(d) Les trois rotations ont le même centre O et le même sens, donc on additionne les angles : $3 \times 90^\circ = 270^\circ$ dans le sens horaire. Or $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, donc c'est la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens anti-horaire. Par ce quart de tour, (x ; y) devient (−y ; x) : l'image de A(2 ; 3) est le point (−3 ; 2). Vérification pas à pas : (2 ; 3) → (3 ; −2) → (−2 ; −3) → (−3 ; 2).

5. Propriétés conservées

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : lire une mesure sur l'image d'un logo**

(a) On sait que E′F′G′ est l'image de EFG par la rotation de centre K, d'angle 72°, dans le sens horaire. Or une rotation conserve les longueurs.
Donc E′G′ = EG = 3 cm
(attention : E′G′ correspond à EG, pas à EF).

(b) Une rotation conserve les mesures d'angles, donc $\widehat{F'E'G'} = \widehat{FEG} = 50°$.

(c) Une rotation conserve les longueurs, donc aussi les périmètres : E′F′ + E′G′ + F′G′ = 4 + 3 + 3,1 = 10,1 cm.

(d) Une rotation conserve les aires, donc l'aire de E′F′G′ vaut environ 4,6 cm², comme celle de EFG.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : le triangle OMM′ de la grande roue**

(a) OM′ = OM, donc le triangle OMM′ est isocèle en O et $\widehat{MOM'} = 50°$. Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{OMM'} = (180° - 50°) \div 2 = 65°$.

(b) Le triangle OMM′ est isocèle en O avec un angle de 60° au sommet : il est équilatéral.
Donc MM′ = OM = 4,5 cm.

(c) Le triangle OMM′ est rectangle isocèle en O (et MM′ ≠ OM : l'égalité ne vaut que pour 60°). Par le théorème de Pythagore, $MM'^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, donc $MM' = \sqrt{32} \approx 5{,}7$ cm.

(d) OM′ = OM, donc le triangle OMM′ est isocèle en O : ses angles à la base sont égaux, $\widehat{OM'M} = \widehat{OMM'} = 35°$.
Donc $\widehat{MOM'} = 180° - 2 \times 35° = 110°$: la rotation a un angle de 110°.

Ex. 31 ★★☆ **Quart de tour et demi-tour dans un repère**

(a) Quart de tour anti-horaire autour de l'origine : $(x\,;\,y) \to (-y\,;\,x)$.
Donc $A'(-2\,;\,1)$ et $B'(-2\,;\,4)$.

(b) On sait que la rotation transforme A en A′ et B en B′. Or une rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon, et l'image du centre est le centre de l'image.
Donc l'image est le cercle de centre $A'(-2\,;\,1)$ passant par $B'(-2\,;\,4)$, de rayon A′B′ = AB = 4 − 1 = 3 unités.

Ex. 31 (suite)

(c) Un quart de tour transforme une droite en une droite perpendiculaire.
Donc (A′B′) ⊥ (AB). On le vérifie : (AB) est horizontale (ordonnée 2) et (A′B′) est verticale (abscisse −2).

(d) Un demi-tour fait tourner toutes les directions de 180° : il transforme une droite en une droite parallèle.
Donc (A″B″) // (AB). Vérification : $A''(-1\,;\,-2)$ et $B''(-4\,;\,-2)$ ont la même ordonnée.

Ex. 32 ★★☆ **Un motif de carrelage qui tourne**

(a) Non. « Conserver » ne veut pas dire « ne pas bouger » : AD′ = AD, mais D′ a tourné de 110° autour de A. Seul le centre A est un point invariant.

(b) On sait que ABCD est un parallélogramme, donc (AB) // (DC). Par la rotation de centre A, d'angle 110°, dans le sens anti-horaire, la droite (AB) a pour image (AB′) et (DC) a pour image (D′C′). Or une rotation conserve le parallélisme.
Donc (AB′) //
(D′C′).

(c) On sait que I est le milieu de [AB]. Or une rotation conserve les milieux.
Donc I′ est le milieu de [AB′], l'image de [AB]. Comme AB′ = AB = 4 cm, on obtient AI′ = 4 ÷ 2 = 2 cm.

Ex. 33 ★★★ **Le vaisseau qui tourne sur l'écran**

(a) Non. On sait que A′B′C′ est l'image de ABC par la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens horaire. Or une rotation conserve les longueurs : la figure tourne, mais elle ne s'agrandit pas.
Donc A′B′ = AB = 3 cm, et pas 6 cm.

(b) On sait que A′B′C′ est l'image de ABC par une rotation. Or une rotation conserve les longueurs, les angles et les aires.
Donc A′B′ = 3 cm, A′C′ = 2 cm et B′C′ ≈ 3,6 cm. Le périmètre vaut environ 3 + 2 + 3,6 = 8,6 cm. Le triangle A′B′C′ est rectangle en A′, comme ABC est rectangle en A. Son aire vaut donc 3 × 2 ÷ 2 = 3 cm², la même que celle de ABC.

(c) Par définition de la rotation, OA′ = OA = 5 cm, donc le triangle OAA′ est isocèle en O. De plus, $\widehat{AOA'} = 90°$, l'angle du quart de tour.
Donc OAA′ est rectangle isocèle en O. Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{OAA'} = (180° - 90°) \div 2 = 45°$.

Ex. 33 **(suite)**

(d) D'après la question précédente, le triangle OAA′ est rectangle en O, avec OA = OA′ = 5 cm. D'après le théorème de Pythagore, $AA'^2 = OA^2 + OA'^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc $AA' = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm. Attention : AA′ ≠ OA, car l'égalité MM′ = OM n'est vraie que pour une rotation de 60°.

(e) Le triangle OAA′ est rectangle en O, donc son aire vaut OA × OA′ ÷ 2 = 5 × 5 ÷ 2 = 12,5 cm².

Ex. 34 ★★★ **Quart de tour, aire et antécédent sur quadrillage**

(a) Depuis C, A est à 4 carreaux à gauche et 2 carreaux en haut. Au quart de tour anti-horaire, les nombres de carreaux s'échangent : A′ est à 2 carreaux à gauche et 4 carreaux en bas de C. B est à 2 carreaux à gauche et 2 en bas de C, donc B′ est à 2 carreaux à droite et 2 en bas de C. C est le centre de la rotation : c'est un point invariant, son image est C lui-même. On trace ensuite le triangle A′B′C.

(b) I est à 3 carreaux à gauche de C, donc I′ est à 3 carreaux sous C. On sait que I est le milieu de [AB] et que A′, B′, I′ sont les images de A, B, I par une rotation. Or une rotation conserve l'alignement et les milieux : l'image du milieu est le milieu de l'image.
Donc I′ est le milieu de [A′B′].

(c) ABC est dans un rectangle de 4 carreaux sur 4, soit 16 carreaux. On enlève trois triangles rectangles : 2 × 4 ÷ 2 = 4, 2 × 2 ÷ 2 = 2 et 4 × 2 ÷ 2 = 4. L'aire de ABC vaut donc 16 − 10 = 6 carreaux. Or une rotation conserve les aires.
Donc l'aire de A′B′C vaut aussi 6 carreaux.

(d) De A à B, on avance de 2 carreaux à droite et de 4 carreaux vers le bas. Dans le triangle rectangle ainsi formé, le théorème de Pythagore donne $AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$, donc $AB = \sqrt{20} \approx 4{,}5$ côtés de carreau. Or une rotation conserve les longueurs.
Donc $A'B' = AB \approx 4{,}5$ côtés de carreau.

(e) N est l'antécédent de P : c'est N qui tourne pour arriver en P. Il faut donc faire le chemin inverse, c'est-à-dire tourner P d'un quart de tour dans le sens HORAIRE autour de C. En tournant dans le sens anti-horaire, Inès obtient le point situé 3 carreaux à gauche et 1 carreau en haut de C : ce point est faux. P est à 1 carreau à droite et 3 carreaux en haut de C, donc N est à 3 carreaux à droite et 1 carreau en bas de C.

Ex. 35 ★★★ **Le balai de l'essuie-glace**

(a) A est sur [OB], donc OB = OA + AB = 2 + 4 = 6 cm. Par définition de la rotation, l'image d'un point reste à la même distance du centre : OB′ = OB = 6 cm.

(b) On sait que OB′ = OB, donc le triangle OBB′ est isocèle en O. Son angle en O est l'angle de la rotation : $\widehat{BOB'} = 120°$. Les angles à la base sont égaux, donc $\widehat{OBB'} = \widehat{OB'B} = (180° - 120°) \div 2 = 30°$.

(c) Non. Si BB′ = OB = OB′, le triangle OBB′ serait équilatéral, et tous ses angles mesureraient 60°. Or $\widehat{BOB'} = 120°$.
Donc BB′ ≠ OB : l'égalité MM′ = OM n'est vraie que pour une rotation de 60°.

(d) On sait que O, A et B sont alignés, et que O, A′ et B′ sont leurs images par une rotation. Or une rotation conserve l'alignement et les longueurs.
Donc A′ est sur le segment [OB′], à 2 cm de O (OA′ = OA = 2 cm). De plus, A′B′ = AB = 4 cm : le balai tourne, mais il garde sa longueur.

(e) On sait que OB1 = OB = 6 cm, donc le triangle OBB1 est isocèle en O, et $\widehat{BOB_1} = 60°$. Ses angles à la base mesurent $(180° - 60°) \div 2 = 60°$, donc ses trois angles mesurent 60° : le triangle OBB1 est équilatéral.
Donc BB1 = OB = 6 cm.

6. *Rosaces, frises, pavages : quelle transformation ?*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : rosaces et frises**

(a) Les 8 motifs se partagent le tour complet : 360° ÷ 8 = 45°. Deux motifs voisins sont séparés de 45°.

(b) Angle entre deux pétales voisins : 360° ÷ 10 = 36°. Du pétale ① au pétale ⑦, il y a 7 − 1 = 6 rotations, pas 7 : 6 × 36° = 216°. C'est la rotation de centre O, d'angle 216°, dans le sens anti-horaire.

(c) Angle entre deux bras voisins : 360° ÷ 9 = 40°. Or 280° ÷ 40° = 7 : le bras ① avance de 7 places dans le sens de la numérotation. Il arrive à la place du bras ⑧ (1 + 7 = 8), et non du bras ⑦.

(d) L'angle total doit être un multiple de 360°. Or 360 ÷ 80 = 4,5 : après 4 crans (320°) ou 5 crans (400°), la molette n'a pas fait un tour juste. En revanche, 9 × 80° = 720° = 2 × 360°. La molette revient à sa place après 9 crans, soit 2 tours complets.

Ex. 36 (suite)

(e) Les deux rotations ont le même centre et le même sens, donc on additionne les angles : $130° + 140° = 270°$. C'est la rotation de centre O, d'angle 270°, dans le sens anti-horaire. Comme $360° - 270° = 90°$, c'est aussi la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens horaire (un quart de tour).

(f) Le motif ② est tête en bas, sans effet miroir : on passe de ① à ② par un demi-tour, dont le centre est le milieu du segment qui joint un point de ① au point correspondant de ②. Le motif ③ a la même orientation que ①, simplement décalé : on passe de ① à ③ par la translation qui transforme un point de ① en le point correspondant de ③.

Ex. 37 ★☆☆ Automatismes : carrelage autour d'un sommet

(a) Les angles autour de S font 360°, et le carreau carré a un angle droit en S.
Donc l'angle cherché vaut $360° - 90° - 140° = 130°$.

(b) Il reste $360° - 2 \times 120° = 120°$ à remplir, et $120° \div 60° = 2$. Il faut 2 triangles équilatéraux.

(c) $3 \times 108° = 324°$: il manque 36°, ce qui laisse un trou. $4 \times 108° = 432°$: on dépasse 360°, donc les carreaux se chevauchent. Aucun nombre de pentagones ne fait 360° : c'est impossible.

(d) Il reste $360° - 2 \times 150° = 60°$. Un polygone régulier dont les angles mesurent 60° est un triangle équilatéral.

Ex. 38 ★★☆ Tourné ou retourné ?

(a) Le triangle a été décalé sans tourner : il garde la même orientation. C'est la translation qui transforme A en A′. Pour aller de $A(1\,;\,1)$ à $A'(-4\,;\,2)$, on se déplace de 5 carreaux vers la gauche et de 1 carreau vers le haut, et c'est le même déplacement pour B et C.

(b) Le côté [AB], horizontal, devient [A′B′], vertical, sans effet miroir : le triangle a tourné. Chaque point $(x\,;\,y)$ a pour image $(-y\,;\,x)$: $A(1\,;\,1) \to A'(-1\,;\,1)$, $B(4\,;\,1) \to B'(-1\,;\,4)$, $C(1\,;\,3) \to C'(-3\,;\,1)$. C'est la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens anti-horaire
(un quart de tour).

Ex. 38 (suite)

(c) Non. Un seul point ne suffit pas pour reconnaître une transformation. Ici, $B'(-4\,;\,1)$ et $C'(-1\,;\,3)$: chaque point $(x\,;\,y)$ a pour image $(-x\,;\,y)$. [A′B′] reste horizontal mais part vers la gauche : le triangle est retourné, comme dans un miroir. C'est la symétrie axiale d'axe l'axe des ordonnées, pas un quart de tour.

(d) Non. Par la symétrie d'axe des abscisses, $A(1\,;\,1)$ aurait pour image $(1\,;\,-1)$. Or ici $A'(-1\,;\,-1)$. Chaque point $(x\,;\,y)$ a pour image $(-x\,;\,-y)$: le triangle est tête en bas, sans effet miroir. C'est le demi-tour de centre O, c'est-à-dire la rotation de centre O d'angle 180°.

Ex. 39 ★★☆ L'enjoliveur de Sacha

(a) Première erreur : de M1 à M5, il y a 4 rotations, pas 5 : $4 \times 60° = 240°$. Deuxième erreur : les points sont numérotés dans le sens horaire.
Donc M5 est l'image de M1 par la rotation de centre O, d'angle 240°, dans le sens horaire
(ou d'angle $360° - 240° = 120°$ dans le sens anti-horaire).

(b) Dans le sens horaire, de M1 à M3 il y a 2 rotations : $2 \times 60° = 120°$. Dans le sens anti-horaire, il faut tourner de $360° - 120° = 240°$. C'est la rotation de centre O, d'angle 240°, dans le sens anti-horaire.

(c) M2 est l'image de M1 par la rotation de centre O, d'angle 60°, dans le sens horaire.
Donc OM2 = OM1 et $\widehat{M_1OM_2} = 60°$. Le triangle OM1M2 est isocèle en O, et ses angles à la base mesurent $(180° - 60°) \div 2 = 60°$: il est équilatéral.
Donc M1M2 = OM1 = 3 cm.

(d) Les deux rotations ont le même centre et le même sens, donc on additionne les angles : $140° + 160° = 300°$, dans le sens horaire. Or $300° \div 60° = 5$: M1 avance de 5 positions dans le sens horaire et arrive sur la position M$(1 + 5)$, c'est-à-dire M6.

Ex. 40 ★★★ La grande roue de Lina

(a) Les 12 nacelles sont régulièrement réparties autour de O, donc $\widehat{N_1ON_2} = 360° \div 12 = 30°$.

(b) N2 est l'image de N1 par la rotation de centre O, d'angle 30°, dans le sens horaire. Or une rotation de centre O conserve la distance à O, donc $ON_2 = ON_1 = 20$ m : le triangle ON_1N_2 est isocèle en O. On a $\widehat{N_1ON_2} = 30°$ et ses deux angles à la base sont égaux : $\widehat{ON_1N_2} = \widehat{ON_2N_1} = (180° - 30°) \div 2 = 75°$.

Ex. 40 **(suite)**

(c) De N1 à N10, il y a $10 - 1 = 9$ rotations de 30°, et non 10. N10 est donc l'image de N1 par la rotation de centre O, d'angle $9 \times 30^\circ = 270^\circ$, dans le sens horaire. C'est aussi la rotation de centre O, d'angle $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, dans le sens anti-horaire : un quart de tour.

(d) De N1 à N4, il y a $4 - 1 = 3$ rotations, donc la rotation a pour centre O, pour angle $3 \times 30^\circ = 90^\circ$, et elle est dans le sens horaire : c'est un quart de tour. Le triangle ON_1N_4 est donc rectangle en O, et $ON_4 = ON_1 = 20$ m. D'après le théorème de Pythagore : $N_1N_4^2 = 20^2 + 20^2 = 800$, donc $N_1N_4 = \sqrt{800} \approx 28{,}3$ m. Attention : N_1N_4 n'est pas égal au rayon de 20 m.

(e) Les deux rotations ont le même centre et le même sens, donc on additionne les angles : $45^\circ + 75^\circ = 120^\circ$, dans le sens horaire. Or $120^\circ \div 30^\circ = 4$: N1 avance de 4 places dans le sens de la numérotation. Elle se trouve donc à la place de la nacelle N$(1 + 4)$, c'est-à-dire de N5.

Ex. 41 ★★★ **Le cheval de bois de Jade**

(a) M′ est l'image de M par la rotation de centre O, d'angle 150°, dans le sens anti-horaire. Or une rotation de centre O conserve la distance à O, donc $OM' = OM = 3$ m : le triangle OMM′ est isocèle en O. Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{OMM'} = \widehat{OM'M} = (180^\circ - 150^\circ) \div 2 = 15^\circ$.

(b) Les 4 rotations ont le même centre et le même sens, donc on additionne : $4 \times 150^\circ = 600^\circ$. Or $600^\circ - 360^\circ = 240^\circ$: un tour complet ne change rien, donc le cheval est où l'amènerait la rotation de centre O, d'angle 240°, dans le sens anti-horaire. C'est aussi la rotation de centre O, d'angle $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, dans le sens horaire.

(c) Non. Il faut que l'angle total soit un multiple de 360°. Après 1, 2, …, 11 arrêts, on obtient 150, 300, 450, 600, 750, 900, 1 050, 1 200, 1 350, 1 500 et 1 650 : aucun de ces nombres n'est un multiple de 360. Mais $12 \times 150^\circ = 1\,800^\circ = 5 \times 360^\circ$. Le cheval repasse donc par M après 12 arrêts, soit 5 tours complets.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Les deux rotations ont le même centre et le même sens, donc on additionne les angles : $95^\circ + 85^\circ = 180^\circ$. M″ est donc l'image de M par la rotation de centre O, d'angle 180° : c'est le demi-tour de centre O (la symétrie centrale de centre O).
Donc O est le milieu de [MM″] et $MM'' = 2 \times OM = 2 \times 3 = 6$ m.

Ex. 42 ★★★ **La frise de la salle de bain d'Hugo**

(a) Le triangle BEF a la même orientation que ABC, simplement décalé de 3 carreaux vers la droite : A a pour image B, B a pour image E et C a pour image F. C'est la translation qui transforme A en B.

(b) Le triangle CDA a la tête en bas, sans effet miroir : c'est un demi-tour. A a pour image C et C a pour image A, donc le centre I est le milieu de [AC]. C'est le centre du rectangle ABCD, où se coupent ses diagonales [AC] et [BD] : I est donc aussi le milieu de [BD], et B a pour image D. Sur le quadrillage, on lit $I(1{,}5\,;\,1)$, à mi-chemin entre 0 et 3 et entre 0 et 2. C'est le demi-tour de centre $I(1{,}5\,;\,1)$.

(c) Non. Dans ABC, le sommet C est au-dessus de l'angle droit B ; dans GHC, il est en dessous de l'angle droit H, et le sommet G est toujours à gauche. Le carreau n'est pas tourné, il est retourné comme dans un miroir, et une rotation ne retourne jamais une figure. A$(0\,;\,0)$ a pour image G$(0\,;\,4)$, B$(3\,;\,0)$ a pour image H$(3\,;\,4)$ et C est invariant : c'est la symétrie axiale d'axe la droite (DC), horizontale, qui passe par les points d'ordonnée 2.

(d) Le triangle ABC est rectangle en B, avec AB = 3 cm et BC = 2 cm. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, donc $AC = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm. On sait que GHC est l'image de ABC par la symétrie d'axe (DC) : G est l'image de A et C est invariant. Or une symétrie axiale conserve les longueurs.
Donc $CG = CA = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm.

(e) Les angles autour du sommet font 360° en tout, donc le troisième carreau a un angle de $360^\circ - 2 \times 108^\circ = 360^\circ - 216^\circ = 144^\circ$ en ce sommet.

7. Exercices type brevet

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : images dans un repère**

(a) Pour un quart de tour anti-horaire autour de O, $(x\,;\,y)$ devient $(-y\,;\,x)$.
Donc $A'(-5\,;\,2)$.

(b) Pour un quart de tour horaire autour de O, $(x\,;\,y)$ devient $(y\,;\,-x)$.
Donc $y = 3$ et $-x = -1$, d'où $x = 1$: l'antécédent est $B(1\,;\,3)$. Vérification : $(1\,;\,3)$ devient bien $(3\,;\,-1)$.

(c) Pour aller de E à F, on avance de 2 vers la droite et de 3 vers le bas.
Donc $G'(-2+2\,;\,4-3)$, soit $G'(0\,;\,1)$.

(d) $360° - 40° = 320°$: c'est la rotation de centre O, d'angle 320°, dans le sens anti-horaire.

(e) OM′ = OM et $\widehat{MOM'} = 60°$: le triangle OMM′ est isocèle en O avec un angle de 60°, donc il est équilatéral.
Donc $MM' = OM = 4{,}5$ cm.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : logo, rosace, horloge, pavage**

(a) Les 5 branches se partagent le tour : $360° \div 5 = 72°$. A2 est à gauche de A1 : c'est la rotation de centre O, d'angle 72°, dans le sens anti-horaire.

(b) De A1 à A5 dans le sens anti-horaire, on passe par A2, A3, A4 puis A5 : il y a 4 rotations, pas 5. L'angle vaut $4 \times 72° = 288°$.

(c) Dans le sens horaire, on passe de A1 à A5, puis de A5 à A4 : 2 rotations, soit $2 \times 72° = 144°$.

(d) Il faut faire un tour complet : $360 \div 24 = 15$. La rosace a 15 motifs.

(e) La grande aiguille fait 360° en 60 min, soit 6° par minute : $25 \times 6° = 150°$, dans le sens horaire.

(f) Autour d'un sommet, les angles font 360°. Les 2 carrés prennent $2 \times 90° = 180°$; il reste 180°, et $180 \div 60 = 3$. Il faut 3 triangles équilatéraux.

Ex. 45 ★★☆ **L'erreur de Léa sur le quadrillage**

(a) Non. A, O et D sont alignés, donc $\widehat{AOD} = 180°$ et non 90°. De plus, DEF est retourné, comme dans un miroir : une rotation ne retourne jamais une figure.

(b) C'est la symétrie axiale d'axe la droite verticale passant par O (la médiatrice de [AD]) : la figure est retournée.

Ex. 45 (suite)

(c) Au quart de tour horaire, les nombres de carreaux s'échangent. A (3 carreaux à droite de O) donne A′ : 3 carreaux sous O. B (5 à droite) donne B′ : 5 carreaux sous O. C (3 à droite, 2 en haut) donne C′ : 2 carreaux à droite et 3 vers le bas. On relie A′, B′ et C′.

(d) OA′ = OA = 3 cm et $\widehat{AOA'} = 90°$: le triangle OAA′ est rectangle isocèle en O. D'après le théorème de Pythagore, $AA'^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, donc $AA' = \sqrt{18} \approx 4{,}2$ cm.

Ex. 46 ★★☆ **Le motif d'un enjoliveur**

(a) On sait que A′B′C′ est l'image de ABC par la rotation de centre O, d'angle 50°, dans le sens horaire. Or une rotation conserve les longueurs et les mesures d'angles.
Donc $A'B' = AB = 2{,}5$ cm et $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC} = 37°$.

(b) On sait que A′B′C′ est l'image de ABC par une rotation. Or une rotation conserve les aires et les longueurs, donc les périmètres.
Donc A′B′C′ a une aire de 1,5 cm² et un périmètre de 6 cm.

(c) OA′ = OA, donc le triangle OAA′ est isocèle en O, avec $\widehat{AOA'} = 50°$. Ses deux autres angles sont égaux : $(180° - 50°) \div 2 = 65°$.
Donc $\widehat{OAA'} = \widehat{OA'A} = 65°$.

(d) Non. OAA′ est isocèle en O, donc OA = OA′, mais AA′ n'est égal à OA que si le triangle est équilatéral, c'est-à-dire pour une rotation de 60°. Ici, ses angles mesurent 50°, 65° et 65° : il n'est pas équilatéral, donc AA′ ≠ OA.

Ex. 47 ★★★ **Le carreau de faïence**

(a) O et A ne bougent pas, et G est le symétrique de B par rapport à la droite (OA) : 2 carreaux au-dessus pour B, 2 carreaux au-dessous pour G. OAG est donc l'image de OAB par la symétrie axiale d'axe (OA). Ensuite, O est le milieu de [AE] et de [BF], donc OEF est l'image de OAB par la symétrie centrale de centre O (le demi-tour de centre O).

Ex. 47 (suite)

(b) Non. Une symétrie axiale qui laisse O fixe et transforme A en C a pour axe la diagonale du quadrillage qui passe par O. Le symétrique de B (1 carreau à droite et 2 en haut de O) serait alors le nœud situé 2 carreaux à droite et 1 en haut de O : ce n'est pas D. Les nombres de carreaux s'échangent et la figure a tourné sans être retournée : OCD est l'image de OAB par la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens anti-horaire (quart de tour). On le vérifie : A (4 à droite) a pour image C (4 en haut), et B (1 à droite, 2 en haut) a pour image D (1 en haut, 2 à gauche).

(c) C est au-dessus de O et E à sa gauche. Pour passer de [OC] à [OE], on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre : c'est le sens anti-horaire. À l'inverse, OCD est l'image de OEF par la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens horaire.

(d) Dans le triangle OAB, la base [OA] mesure 4 cm et la hauteur issue de B mesure 2 cm, donc son aire vaut $4 \times 2 \div 2 = 4$ cm². On sait que OCD est l'image de OAB par la rotation de centre O, d'angle 90°, dans le sens anti-horaire. Or une rotation conserve les aires.
Donc l'aire de OCD vaut aussi 4 cm².

(e) On sait que C est l'image de A par le quart de tour de centre O. Or une rotation conserve les longueurs, donc $OC = OA = 4$ cm. De plus $\widehat{AOC} = 90°$, donc le triangle AOC est rectangle isocèle en O. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, donc $AC = \sqrt{32} \approx 5{,}7$ cm. Attention : AC n'est pas égal à OA, car l'angle de la rotation n'est pas 60°.

Ex. 48 ★★★ Le balai de l'essuie-glace

(a) On reproduit [OM] avec $OM = 5$ cm et N au milieu. On place le rapporteur centré en O, avec le zéro sur [OM]. On mesure 110° dans le sens des aiguilles d'une montre et on trace la demi-droite d'origine O. Avec le compas pointé en O, d'écartement $OM = 5$ cm, on reporte la longueur sur cette demi-droite : on obtient M′. On fait pareil pour N avec un écartement de 2,5 cm, et on obtient N′ sur [OM′]. Comme M est à gauche de O, le point M′ se trouve au-dessus de O, un peu sur la droite.

(b) On sait que N′ est l'image de N par la rotation. Or une rotation conserve les longueurs, donc $ON' = ON = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm. Elle conserve aussi les milieux : comme N est le milieu de [OM], N′ est le milieu de [OM′].

Ex. 48 (suite)

(c) On sait que $OM' = OM$, car une rotation conserve les longueurs. Le triangle OMM′ est donc isocèle en O, et son angle en O est l'angle de la rotation : $\widehat{MOM'} = 110°$. Ses deux angles à la base sont égaux, donc $\widehat{OMM'} = \widehat{OM'M} = (180° - 110°) \div 2 = 35°$.

(d) M′ est l'image de M, donc M est l'antécédent de M′ : pour revenir de M′ à M, il faut tourner dans le sens inverse. La rotation proposée par Inès transforme M en M′ : elle éloignerait encore le balai. La bonne rotation est celle de centre O, d'angle 110°, dans le sens anti-horaire
(ou d'angle $360° - 110° = 250°$, dans le sens horaire).

(e) Deux rotations de même centre et de même sens se suivent : on additionne leurs angles, $110° + 45° = 155°$. C'est la rotation de centre O, d'angle 155°, dans le sens horaire. Dans le sens anti-horaire, c'est la même rotation avec un angle de $360° - 155° = 205°$.

Ex. 49 ★★★ La rosace du vitrail

(a) On tourne de 30° d'un motif au suivant, et la rosace complète fait un tour, soit 360°. Elle compte donc $360 \div 30 = 12$ motifs.

(b) Du motif ① au motif ⑤, on ne fait que 4 rotations de 30° (① → ② → ③ → ④ → ⑤) et non 5. On tourne donc de $4 \times 30° = 120°$, dans le sens anti-horaire.

(c) Dans le sens horaire, on recule de $60 \div 30 = 2$ motifs : ① → ⑫ → ⑪. L'image est le motif ⑪. On peut le vérifier : 60° horaire revient à $360° - 60° = 300°$ anti-horaire, soit 10 crans de 30°, et ① avance jusqu'à ⑪.
Un quart de tour fait $90 \div 30 = 3$ crans : l'antécédent de ⑨ est le motif qu'on retrouve 3 crans avant, c'est le motif ⑥.

(d) $570° = 360° + 210°$. Un tour complet de 360° ramène le motif à sa place. Il reste 210°, soit $210 \div 30 = 7$ crans : ① avance jusqu'au motif ⑧.

(e) On passe du motif ① au motif ③ par la rotation de centre O, d'angle $2 \times 30° = 60°$, dans le sens anti-horaire. Comme une rotation conserve les longueurs, $OE = OA$, et $\widehat{AOE} = 60°$. Le triangle OAE est isocèle en O avec un angle de 60° : ses angles à la base mesurent $(180° - 60°) \div 2 = 60°$, il est donc équilatéral.
Donc $AE = OA = 4$ cm.