1. Reconnaître les triangles emboîtés

Ex. 1 ★☆☆ **Sommet commun et côtés correspondants**

(a) Le sommet commun est P : c'est le point d'où partent les deux côtés [PQ] et [PR] qui portent les points U et V.

(b) Le petit triangle est PUV et le grand triangle est PQR.

(c) [PV] est sur la droite (PR) : il correspond au côté [PR].

(d) [UV] correspond à [QR], car ce sont les deux côtés parallèles.

(e) Ali se trompe : [UQ] n'est un côté ni du triangle PUV ni du triangle PQR, donc UQ ne va jamais dans un rapport. Le bon rapport est $\frac{PU}{PQ}$, avec $PQ = PU + UQ = 2 + 3 = 5$ cm.
Donc $\frac{PU}{PQ} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Ex. 2 ★☆☆ **Les rapports dans toutes les positions**

(a) Le sommet commun est H, le petit triangle est HDE et le grand triangle est HJL. D'après le théorème de Thalès : $\frac{HD}{HJ} = \frac{HE}{HL} = \frac{DE}{JL}$.

(b) Le sommet commun est Y : $\frac{YS}{YX} = \frac{YT}{YW} = \frac{ST}{XW}$.

(c) Lina a mis le grand triangle en haut dans le dernier rapport. Le petit triangle reste en haut dans les trois rapports : $\frac{GA}{GI} = \frac{GZ}{GO} = \frac{AZ}{IO}$.

(d) Le sommet commun est C, d'où partent [CN] et [CR] : ce n'est pas la première lettre du nom du triangle. Les points C, V, N sont alignés, ainsi que C, W, R, et (VW) // (NR). D'après le théorème de Thalès : $\frac{CV}{CN} = \frac{CW}{CR} = \frac{VW}{NR}$. Or $\frac{CV}{CN} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$: les trois rapports valent 0,75.

Ex. 3 ★★☆ **Configuration de Thalès ou pas ?**

(a) Non. Le parallélisme de (EG) et (FB) n'est pas donné dans l'énoncé. Une impression sur le dessin ne suffit pas : on ne peut pas appliquer le théorème de Thalès.

(b) Non, pas en 4e. S et V ne sont pas sur les côtés [OR] et [OU] : ils sont de l'autre côté du sommet O. Ce ne sont pas des triangles emboîtés, c'est une configuration « papillon », qui n'est pas au programme de 4e.

(c) Non. Les droites (XY) et (KL) se coupent, donc elles ne sont pas parallèles. Ce n'est pas une configuration de Thalès.

Ex. 3 (suite)

(d) Oui. Le sommet commun est A (et non H) : les deux côtés [AH] et [AB] partent de A. Les points A, C, H sont alignés, ainsi que A, D, B, et l'énoncé dit que (CD) // (HB). D'après le théorème de Thalès : $\frac{AC}{AH} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{HB}$. Le petit triangle est ACD, le grand est AHB. Le rapport de réduction est $k = \frac{AC}{AH} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$.

Ex. 4 ★★☆ **Corriger les rapports, puis réduire et agrandir**

(a) GP et HQ ne sont des côtés d'aucun des deux triangles. On doit diviser par TP et TQ, les côtés du grand triangle qui partent du sommet commun T.

(b) Malo a associé [GH] à [TQ]. Or [GH] est parallèle à [PQ] : le côté parallèle va avec le côté parallèle, donc le dernier rapport est $\frac{GH}{PQ}$.

(c) Les points T, G, P sont alignés, ainsi que T, H, Q, et (GH) // (PQ). D'après le théorème de Thalès : $\frac{TG}{TP} = \frac{TH}{TQ} = \frac{GH}{PQ}$. Le rapport de réduction vaut $\frac{TG}{TP} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

(d) C'est le rapport d'agrandissement : $\frac{TP}{TG} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$. On multiplie les côtés du petit triangle par $\frac{5}{3}$.

Ex. 5 ★★★ **Trois triangles emboîtés, sommet en bas**

(a) Les côtés [SR] et [ST] partent tous les deux de S et portent les points : S est le sommet commun. On voit trois triangles emboîtés : SUV (le petit), SWX (le moyen) et SRT
(le grand).

(b) Les points S, U, R sont alignés, ainsi que S, V, T, et (UV) // (RT). D'après le théorème de Thalès : $\frac{SU}{SR} = \frac{SV}{ST} = \frac{UV}{RT}$.

(c) Avec l'égalité précédente : $\frac{3}{10} = \frac{2{,}1}{RT}$, donc $RT = \frac{2{,}1 \times 10}{3} = 7$ cm.

(d) Les points S, W, R sont alignés, ainsi que S, X, T, et (WX) // (RT). D'après le théorème de Thalès : $\frac{SW}{SR} = \frac{SX}{ST} = \frac{WX}{RT}$, soit $\frac{7{,}5}{10} = \frac{WX}{7}$, donc $WX = \frac{7{,}5 \times 7}{10} = 5{,}25$ cm.

(e) $UW = SW - SU = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ cm. D'une part, $\frac{SU}{UW} = \frac{3}{4{,}5} \approx 0{,}67$. D'autre part, $\frac{UV}{WX} = \frac{2{,}1}{5{,}25} = 0{,}4$. Les deux rapports sont différents, donc Elio a tort : [UW] n'est un côté d'aucun des deux triangles. Avec les triangles SUV et SWX, il faut écrire $\frac{SU}{SW} = \frac{UV}{WX}$: en effet, $\frac{3}{7{,}5} = 0{,}4$.

Ex. 6 ★★★ **La traverse d'une charpente**

(a) D'une part, $\frac{FP}{FG} = \frac{1{,}8}{4{,}5} = 0{,}4$. D'autre part, $\frac{FQ}{FH} = \frac{2{,}1}{5{,}2} \approx 0{,}4038$. Produits en croix : $1{,}8 \times 5{,}2 = 9{,}36$ et $4{,}5 \times 2{,}1 = 9{,}45$. Ils sont différents, donc $\frac{FP}{FG} \neq \frac{FQ}{FH}$. Si (PQ) et (GH) étaient parallèles, ces rapports seraient égaux d'après le théorème de Thalès.
Donc les droites (PQ) et (GH) ne sont pas parallèles et Lou a tort. Elle a arrondi avant de comparer, et un schéma ne prouve pas que des droites sont parallèles.

(b) Il faut $\frac{FQ}{FH} = \frac{FP}{FG} = 0{,}4$, donc $FQ = 0{,}4 \times 5{,}2 = 2{,}08$ m. Vérification : $\frac{FQ}{FH} = \frac{2{,}08}{5{,}2} = 0{,}4 = \frac{FP}{FG}$. Les points F, P, G et F, Q, H sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (PQ) // (GH). Il faut donc fixer Q à 2,08 m de F.

(c) Les points F, P, G sont alignés, ainsi que F, Q, H, et (PQ) // (GH). D'après le théorème de Thalès : $\frac{FP}{FG} = \frac{FQ}{FH} = \frac{PQ}{GH}$, soit $\frac{1{,}8}{4{,}5} = \frac{PQ}{6}$, donc $PQ = \frac{1{,}8 \times 6}{4{,}5} = 2{,}4$ m.

(d) Périmètre de FPQ : $1{,}8 + 2{,}08 + 2{,}4 = 6{,}28$ m. Le rapport de réduction est $k = 0{,}4$. Périmètre de FGH : $4{,}5 + 5{,}2 + 6 = 15{,}7$ m, et $0{,}4 \times 15{,}7 = 6{,}28$ m. On retrouve le même résultat.

Ex. 7 ★★★ **Sommet commun à droite, parallèles verticales**

(a) Les côtés [ZY] et [ZW] partent de Z et portent C et E : le sommet commun est Z. Le petit triangle est ZCE et le grand est ZYW. Côtés correspondants : [ZC] avec [ZY], [ZE] avec [ZW] (sur les mêmes droites), [CE] avec [YW] (les côtés parallèles).

(b) Les points Z, C, Y sont alignés, ainsi que Z, E, W, et (CE) // (YW). D'après le théorème de Thalès : $\frac{ZC}{ZY} = \frac{ZE}{ZW} = \frac{CE}{YW}$, soit $\frac{6}{7{,}5} = \frac{CE}{5}$, donc $CE = \frac{6 \times 5}{7{,}5} = 4$ cm.

(c) Rapport de réduction : $k = \frac{ZC}{ZY} = \frac{6}{7{,}5} = 0{,}8$. Rapport d'agrandissement : $\frac{ZY}{ZC} = \frac{7{,}5}{6} = 1{,}25$.

(d) D'après le théorème de Thalès : $\frac{ZC}{ZY} = \frac{ZE}{ZW}$, soit $\frac{6}{7{,}5} = \frac{6{,}8}{ZW}$, donc $ZW = \frac{7{,}5 \times 6{,}8}{6} = 8{,}5$ cm. Ensuite, $EW = ZW - ZE = 8{,}5 - 6{,}8 = 1{,}7$ cm.

(e) Non. G n'est pas sur le côté [ZY] : Z est entre Y et G, et de même entre W et H. Le triangle ZGH n'est donc pas emboîté dans ZYW : les points sont de part et d'autre du sommet. C'est une autre configuration, qui n'est pas au programme de 4e. On ne peut pas l'utiliser ici.

2. *Écrire l'égalité des trois rapports*

Ex. 8 ★☆☆ **Repérer le sommet commun et les côtés correspondants**

(a) Le sommet commun est K. Le petit triangle est KRS et le grand triangle est KDF.

(b) [KR] va avec [KD] et [KS] va avec [KF] (ils sont sur la même droite). [RS] va avec [DF] : ce sont les côtés parallèles.

(c) Les points K, R, D sont alignés, ainsi que K, S, F ; les droites (RS) et (DF) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{KR}{KD} = \frac{KS}{KF} = \frac{RS}{DF}$.

(d) Non. [RD] n'est un côté ni du triangle KRS ni du triangle KDF : la longueur RD n'apparaît jamais dans les rapports.

(e) $\frac{KR}{KD} = \frac{5{,}6}{8} = 0{,}7$. D'après l'égalité des trois rapports, on a aussi $\frac{KS}{KF} = 0{,}7$ et $\frac{RS}{DF} = 0{,}7$.

Ex. 9 ★☆☆ **Vrai ou faux : l'égalité est-elle bien écrite ?**

(a) Faux. Le côté parallèle va avec le côté parallèle : [EB] correspond à [GH], pas à [TH]. Il faut écrire $\frac{EB}{GH}$.

(b) Faux. Les petit et grand triangles sont mélangés : TG (grand) est en haut dans le premier rapport, mais TB (petit) est en haut dans le second. Il faut écrire $\frac{TE}{TG} = \frac{TB}{TH}$.

(c) Vrai. On part du sommet commun T : le petit triangle TEB est en haut, le grand triangle TGH est en bas, et [EB] va avec le côté parallèle [GH].

(d) Faux. [EG] n'est un côté d'aucun des deux triangles. Le côté correspondant à [TE] est [TG] : $\frac{TE}{TG} = \frac{EB}{GH}$.

(e) Vrai. D'après le théorème de Thalès, $\frac{TB}{TH} = \frac{TE}{TG} = \frac{5{,}4}{9} = 0{,}6$.

Ex. 10 ★★☆ **Écrire les trois rapports avant de choisir**

(a) Les points P, L, U sont alignés, ainsi que P, W, V ; les droites (LW) et (UV) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{PL}{PU} = \frac{PW}{PV} = \frac{LW}{UV}$.

(b) $\frac{3}{7{,}5} = \frac{PW}{6} = \frac{LW}{5}$. Le rapport entièrement connu est $\frac{PL}{PU} = \frac{3}{7{,}5} = 0{,}4$.

(c) $\frac{3}{7{,}5} = \frac{PW}{6}$, donc $PW = \frac{3 \times 6}{7{,}5} = 2{,}4$ cm.

(d) $\frac{3}{7{,}5} = \frac{LW}{5}$, donc $LW = \frac{3 \times 5}{7{,}5} = 2$ cm.

Ex. 11 ★★☆ **Corriger l'erreur de Nora**

(a) N est un point du segment [YD], donc YD est plus grand que YN = 3,2 cm. On ne peut pas avoir YD = 1,6 cm.

(b) Elle a écrit $\frac{YH}{HC}$: [HC] n'est un côté d'aucun des deux triangles. Le côté correspondant à [YH] est [YC], donc il faut écrire $\frac{YH}{YC}$.

(c) Les points Y, H, C sont alignés dans cet ordre, donc $YC = YH + HC = 4 + 2 = 6$ cm. Les points Y, H, C sont alignés, ainsi que Y, N, D ; les droites (HN) et (CD) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{YH}{YC} = \frac{YN}{YD} = \frac{HN}{CD}$, soit $\frac{4}{6} = \frac{3{,}2}{YD}$, donc $YD = \frac{3{,}2 \times 6}{4} = 4{,}8$ cm.

Ex. 12 ★★★ **Deux parallèles dans le même triangle**

(a) Les trois triangles de sommet commun G sont GEL, GPV et GTZ. Les points G, E, T sont alignés, ainsi que G, L, Z ; les droites (EL) et (TZ) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{GE}{GT} = \frac{GL}{GZ} = \frac{EL}{TZ}$ (petit triangle GEL en haut, grand triangle GTZ en bas).

(b) $GT = GE + EP + PT = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 = 6$ cm. Avec l'égalité de la question précédente : $\frac{3}{6} = \frac{GL}{9}$, donc $GL = \frac{3 \times 9}{6} = 4{,}5$ cm.

(c) $\frac{GE}{GT} = \frac{EL}{TZ}$, soit $\frac{3}{6} = \frac{EL}{6{,}6}$, donc $EL = \frac{3 \times 6{,}6}{6} = 3{,}3$ cm.

(d) Première erreur : [EP] et [LV] ne sont des côtés d'aucun des deux triangles ; il faut partir du sommet commun G, donc utiliser GP et GV. Seconde erreur : (EL) est parallèle à (PV), donc le côté [EL] va avec [PV], pas avec [GV]. Ici, c'est GPV le grand triangle. Les points G, E, P sont alignés, ainsi que G, L, V ; (EL) // (PV). D'après le théorème de Thalès : $\frac{GE}{GP} = \frac{GL}{GV} = \frac{EL}{PV}$.

(e) $GP = GE + EP = 3 + 1{,}5 = 4{,}5$ cm. $\frac{GE}{GP} = \frac{EL}{PV}$, soit $\frac{3}{4{,}5} = \frac{3{,}3}{PV}$, donc $PV = \frac{4{,}5 \times 3{,}3}{3} = 4{,}95$ cm.

Ex. 13 ★★★ **Le montant du toboggan**

(a) (QJ) est parallèle à (WB) : le côté [QJ] va donc avec [WB], pas avec [UB]. Les points U, Q, W sont alignés, ainsi que U, J, B ; (QJ) // (WB). D'après le théorème de Thalès : $\frac{UQ}{UW} = \frac{UJ}{UB} = \frac{QJ}{WB}$.

(b) $UW = UQ + QW = 1{,}2 + 2 = 3{,}2$ m. $\frac{UQ}{UW} = \frac{QJ}{WB}$, soit $\frac{1{,}2}{3{,}2} = \frac{0{,}9}{WB}$, donc $WB = \frac{3{,}2 \times 0{,}9}{1{,}2} = 2{,}4$ m.

(c) $\frac{UQ}{UW} = \frac{UJ}{UB}$, soit $\frac{1{,}2}{3{,}2} = \frac{UJ}{4}$, donc $UJ = \frac{1{,}2 \times 4}{3{,}2} = 1{,}5$ m. Puis $JB = UB - UJ = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$ m.

Ex. 13 (suite)

(d) $k = 1{,}2 \div 3{,}2 = 0{,}375$. Périmètre de UWB : $3{,}2 + 4 + 2{,}4 = 9{,}6$ m. Périmètre de UQJ : $0{,}375 \times 9{,}6 = 3{,}6$ m. Vérification : $UQ + UJ + QJ = 1{,}2 + 1{,}5 + 0{,}9 = 3{,}6$ m.

Ex. 14 ★★★ **Le verre conique vu en coupe**

(a) Les points F, E, X sont alignés, ainsi que F, A, N ; les droites (EA) et (XN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{FE}{FX} = \frac{FA}{FN} = \frac{EA}{XN}$.

(b) Le troisième rapport est mal écrit : Tom a mis le grand triangle en haut (XN) et le petit en bas (EA), alors que les deux premiers rapports ont le petit triangle en haut. Il faut $\frac{EA}{XN}$. Son résultat est impossible : la surface [EA] est plus basse que le bord [XN] ; [EA] est un côté du petit triangle, donc EA doit être plus petit que XN = 8 cm.

(c) $\frac{FE}{FX} = \frac{EA}{XN}$, soit $\frac{9}{12} = \frac{EA}{8}$, donc $EA = \frac{9 \times 8}{12} = 6$ cm.

(d) Les points F, H, X sont alignés, ainsi que F, U, N ; (HU) // (XN). D'après le théorème de Thalès : $\frac{FH}{FX} = \frac{FU}{FN} = \frac{HU}{XN}$. On connaît FX, HU et XN : on choisit $\frac{FH}{FX} = \frac{HU}{XN}$, soit $\frac{FH}{12} = \frac{5}{8}$, donc $FH = \frac{12 \times 5}{8} = 7{,}5$ cm.

(e) Rapport d'agrandissement : $\frac{XN}{HU} = \frac{8}{5} = 1{,}6$. On retrouve bien $FX = 1{,}6 \times FH = 1{,}6 \times 7{,}5 = 12$ cm.

3. Calculer une longueur

Ex. 15 ★☆☆ **Produit en croix dans une égalité de Thalès**

(a) $x = \frac{3 \times 6{,}4}{8} = 2{,}4$ cm.

(b) $x = \frac{12 \times 4{,}5}{10} = 5{,}4$ cm.

(c) $x = \frac{3 \times 4{,}9}{2{,}1} = 7$ cm.

(d) $x = \frac{6 \times 4}{1{,}5} = 16$ cm.

(e) Non. On multiplie les deux nombres placés en diagonale, 5 et 7, puis on divise par le troisième : $x = \frac{5 \times 7}{2} = 17{,}5$ cm. Contrôle : $\frac{2}{7}$ est plus petit que 1, donc x doit être plus grand que 5, et $2{,}8 < 5$ ne convient pas.

Ex. 16 ★☆☆ **Choisir les deux bons rapports**

(a) Les points D, G, U sont alignés, ainsi que D, H, V, et (GH) // (UV). D'après le théorème de Thalès : $\frac{DG}{DU} = \frac{DH}{DV} = \frac{GH}{UV}$, soit $\frac{4{,}2}{6} = \frac{DH}{5} = \frac{GH}{4}$.

(b) On garde $\frac{DG}{DU} = \frac{DH}{DV}$, soit $\frac{4{,}2}{6} = \frac{DH}{5}$, donc $DH = \frac{4{,}2 \times 5}{6} = 3{,}5$ cm.

Ex. 16 **(suite)**

(c) On garde $\frac{DG}{DU} = \frac{GH}{UV}$ (le troisième rapport, celui des côtés parallèles), soit $\frac{4{,}2}{6} = \frac{GH}{4}$, donc $GH = \frac{4{,}2 \times 4}{6} = 2{,}8$ cm.

(d) $3{,}5 < 5$ et $2{,}8 < 4$: les côtés du petit triangle sont bien plus courts que les côtés correspondants du grand. Les résultats sont cohérents.

Ex. 17 ★★☆ **Millimètres, centimètres et arrondi**

(a) $WR = 45$ mm $= 4{,}5$ cm : toutes les longueurs sont alors en cm.

(b) Les points W, R, X sont alignés, ainsi que W, S, Y, et (RS) // (XY). D'après le théorème de Thalès : $\frac{WR}{WX} = \frac{WS}{WY} = \frac{RS}{XY}$, soit $\frac{4{,}5}{7} = \frac{WS}{6} = \frac{RS}{5}$.
Donc $WS = \frac{4{,}5 \times 6}{7} = \frac{27}{7}$ cm (valeur exacte) $\approx 3{,}9$ cm.

(c) $RS = \frac{4{,}5 \times 5}{7} = \frac{45}{14}$ cm (valeur exacte) $\approx 3{,}2$ cm.
Contrôle : $3{,}2 < 5$.

(d) Non. Il arrondit trop tôt : $0{,}6 \times 5 = 3$ cm, alors que $RS = \frac{45}{14} \approx 3{,}2$ cm. On garde la valeur exacte pendant le calcul et on arrondit seulement à la fin.

Ex. 18 ★★☆ **Chercher un côté du grand triangle**

(a) $k = \frac{IJ}{PQ} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

(b) Les points O, I, P sont alignés, ainsi que O, J, Q, et (IJ) // (PQ). D'après le théorème de Thalès : $\frac{OI}{OP} = \frac{OJ}{OQ} = \frac{IJ}{PQ}$. On garde $\frac{2{,}4}{OP} = \frac{3}{5}$, donc $OP = \frac{2{,}4 \times 5}{3} = 4$ cm.
Contrôle : $2{,}4 < 4$, le côté du grand triangle est bien plus long.

(c) I est sur [OP], donc $IP = OP - OI = 4 - 2{,}4 = 1{,}6$ cm.

(d) $\frac{OJ}{4{,}5} = \frac{3}{5}$, donc $OJ = \frac{3 \times 4{,}5}{5} = 2{,}7$ cm. J est sur [OQ], donc $JQ = 4{,}5 - 2{,}7 = 1{,}8$ cm.

Ex. 19 ★★★ **Corriger le calcul de Léna**

(a) [EF] est un côté du petit triangle KEF : il doit être plus court que son côté correspondant [LP] du grand triangle KLP, qui mesure 5,5 cm. Or $22 > 5{,}5$: c'est impossible.

(b) Léna a écrit $\frac{KE}{EL}$: elle a pris EL au lieu de KL. Un rapport doit comparer un côté du petit triangle au côté correspondant du grand, donc $\frac{KE}{KL}$. Les points K, E, L sont alignés dans cet ordre, donc $KL = KE + EL = 4 + 1 = 5$ cm.

Ex. 19 **(suite)**

(c) Les points K, E, L sont alignés, ainsi que K, F, P ; les droites (EF) et (LP) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{KE}{KL} = \frac{KF}{KP} = \frac{EF}{LP}$, soit $\frac{4}{5} = \frac{5{,}2}{KP} = \frac{EF}{5{,}5}$. Je garde $\frac{4}{5} = \frac{EF}{5{,}5}$, donc $EF = \frac{4 \times 5{,}5}{5} = 4{,}4$ cm. Contrôle : $4{,}4 < 5{,}5$.

(d) Je garde $\frac{4}{5} = \frac{5{,}2}{KP}$, donc $KP = \frac{5 \times 5{,}2}{4} = 6{,}5$ cm (contrôle : $6{,}5 > 5{,}2$). Les points K, F, P sont alignés dans cet ordre, donc $FP = KP - KF = 6{,}5 - 5{,}2 = 1{,}3$ cm.

Ex. 20 ★★★ **Le verre conique de Nour**

(a) Le sommet commun est S : les points S, M, A sont alignés, ainsi que S, N, B, et (MN) // (AB). Côtés correspondants : [SM] et [SA], [SN] et [SB], [MN] et [AB].

(b) $MN = 45$ mm $= 4{,}5$ cm (même unité que AB). $k = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$.

(c) Les points S, M, A sont alignés, ainsi que S, N, B ; les droites (MN) et (AB) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{MN}{AB}$, soit $\frac{7}{SA} = \frac{4{,}5}{6}$.
Donc $SA = \frac{7 \times 6}{4{,}5} = \frac{28}{3}$ cm (valeur exacte) $\approx 9{,}3$ cm. On retrouve $SA = SM \div k = 7 \div 0{,}75$. Contrôle : $9{,}3 > 7$.
En se trompant de sens, $\frac{7 \times 4{,}5}{6} = 5{,}25$ cm serait plus court que SM : c'est impossible.

(d) SAB est isocèle en S, donc son périmètre vaut $SA + SB + AB = \frac{28}{3} + \frac{28}{3} + 6 = \frac{74}{3}$ cm $\approx 24{,}7$ cm. Avec $SA \approx 9{,}3$, on trouverait $2 \times 9{,}3 + 6 = 24{,}6$ cm : l'erreur d'arrondi est comptée deux fois et le dixième est faux. On arrondit à la fin seulement.

Ex. 21 ★★★ **La hauteur de l'arbre d'Inès**

(a) Le bâton et l'arbre sont verticaux, donc les droites (BH) et (PT) sont toutes les deux perpendiculaires au sol (OP). Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc (BH) // (PT).

(b) Les points O, B, P sont alignés dans cet ordre, donc $OP = OB + BP = 1{,}6 + 10{,}4 = 12$ m.

(c) Le coefficient d'agrandissement vaut $\frac{OP}{OB} = \frac{12}{1{,}6} = 7{,}5$.

(d) Les points O, B, P sont alignés, ainsi que O, H, T ; les droites (BH) et (PT) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OB}{OP} = \frac{OH}{OT} = \frac{BH}{PT}$, soit $\frac{1{,}6}{12} = \frac{2}{OT} = \frac{1{,}2}{PT}$. Je garde le premier rapport, dont je connais les deux longueurs, et le troisième, qui contient PT : $\frac{1{,}6}{12} = \frac{1{,}2}{PT}$, donc $PT = \frac{12 \times 1{,}2}{1{,}6} = 9$ m. On retrouve $1{,}2 \times 7{,}5 = 9$. Contrôle : $9 > 1{,}2$. L'arbre mesure 9 m.

Ex. 21 **(suite)**

(e) Je garde $\frac{1,6}{12} = \frac{2}{OT}$, donc $OT = \frac{12 \times 2}{1,6} = 15$ m. Les points O, H, T sont alignés dans cet ordre, donc $HT = OT - OH = 15 - 2 = 13$ m.

4. *Rapport de réduction et longueurs à déduire*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : utiliser le rapport de réduction**

(a) Les points R, E, S sont alignés, ainsi que R, F, T, et $(EF) \parallel (ST)$. D'après le théorème de Thalès, $\frac{RE}{RS} = \frac{RF}{RT} = \frac{EF}{ST}$.
Donc $k = \frac{RE}{RS} = \frac{3,2}{8} = 0,4$
(petit ÷ grand, et $k < 1$).

(b) On va du grand triangle au petit, donc on multiplie par k : $EF = 0,4 \times 6,5 = 2,6$ cm.

(c) On va du petit triangle au grand, donc on divise par k : $RT = 2,4 \div 0,4 = 6$ cm. Attention, il ne fallait pas multiplier par 0,4.

(d) Le rapport d'agrandissement vaut $\frac{RS}{RE} = \frac{8}{3,2} = 2,5$. Il est plus grand que 1.

(e) F est sur [RT], donc $FT = RT - RF = 6 - 2,4 = 3,6$ cm.

(f) Les angles sont conservés. Comme $(EF) \parallel (ST)$, les angles correspondants $\widehat{REF}$ et $\widehat{RST}$ sont égaux : $\widehat{REF} = 47°$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Faux. Le rapport de Thalès est $\frac{KU}{KL}$, pas $\frac{KU}{UL}$. On calcule $KL = 2,5 + 1,5 = 4$ cm, donc $k = \frac{2,5}{4} = 0,625$.

(b) Vrai. D'après le théorème de Thalès, $KV = k \times KP = 0,625 \times 4,8 = 3$ cm.

(c) Vrai. Le périmètre est lui aussi multiplié par k : $0,625 \times 12,8 = 8$ cm.

(d) Faux. Dans une réduction, les angles sont conservés. Comme $(UV) \parallel (LP)$, les angles correspondants $\widehat{KUV}$ et $\widehat{KLP}$ sont égaux.

(e) Faux. Le rapport k s'applique aux longueurs (côtés et périmètre), pas aux aires : on ne multiplie jamais une aire par k.

(f) Vrai. Si U est le milieu de [KL], alors $k = \frac{1}{2}$, donc $KV = \frac{KP}{2}$: V est le milieu de [KP].

Ex. 24 ★★☆ **Le rapport de Noé**

(a) Noé divise par ZH, mais le rapport de Thalès compare DZ au côté entier DH. Z est sur [DH], donc $DH = 4,2 + 2,8 = 7$ cm, et $k = \frac{DZ}{DH} = \frac{4,2}{7} = 0,6$. Un rapport de réduction est d'ailleurs plus petit que 1, alors que Noé trouve 1,5.

(b) Les points D, W, G sont alignés, ainsi que D, Z, H, et $(WZ) \parallel (GH)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{DW}{DG} = \frac{DZ}{DH} = \frac{WZ}{GH}$, soit $\frac{4,2}{7} = \frac{WZ}{9}$, donc $WZ = \frac{4,2 \times 9}{7} = 5,4$ cm.

(c) $DW = k \times DG = 0,6 \times 8,5 = 5,1$ cm. W est sur [DG], donc $WG = DG - DW = 8,5 - 5,1 = 3,4$ cm.

Ex. 25 ★★☆ **La ferme de charpente d'Inès**

(a) Les points F, I, O sont alignés, ainsi que F, J, Q, et $(IJ) \parallel (OQ)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{FI}{FO} = \frac{FJ}{FQ} = \frac{IJ}{OQ}$.
Donc $k = \frac{FI}{FO} = \frac{2}{3}$
(petit ÷ grand, et $k < 1$).

(b) Léo multiplie par k : $\frac{2}{3} \times 3 = 2$ m, c'est plus petit que IJ. C'est impossible pour un côté du grand triangle. Pour aller du petit triangle au grand, on divise par k. Avec un produit en croix : $\frac{2}{3} = \frac{3}{OQ}$, donc $OQ = \frac{3 \times 3}{2} = 4,5$ m.

(c) I est sur [FO], donc $IO = FO - FI = 3 - 2 = 1$ m.

(d) Le périmètre du triangle FOQ vaut $3 + 3 + 4,5 = 10,5$ m. Le périmètre du triangle FIJ vaut donc $\frac{2}{3} \times 10,5 = 7$ m. Vérification : $FJ = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ m, et $2 + 2 + 3 = 7$ m.

Ex. 26 ★★★ **La voile de Maëlle**

(a) Les points T, R, B sont alignés dans cet ordre, donc $TB = TR + RB = 4,2 + 1,8 = 6$ m. Le rapport de réduction est $k = \frac{TR}{TB} = \frac{4,2}{6} = 0,7$
(et non $\frac{TR}{RB} = \frac{4,2}{1,8}$, qui est plus grand que 1 et n'est pas un rapport de Thalès).

(b) Les points T, R, B sont alignés, ainsi que T, S, G ; les droites (RS) et (BG) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{TR}{TB} = \frac{TS}{TG} = \frac{RS}{BG}$, soit $\frac{4,2}{6} = \frac{TS}{7,5} = \frac{RS}{4,5}$.
Donc $TS = \frac{4,2 \times 7,5}{6} = 5,25$ m et $RS = \frac{4,2 \times 4,5}{6} = 3,15$ m.

(c) S est sur le segment [TG], donc $SG = TG - TS = 7,5 - 5,25 = 2,25$ m.

Ex. 26 **(suite)**

(d) Première façon : $TR + TS + RS = 4{,}2 + 5{,}25 + 3{,}15 = 12{,}6$ m. Deuxième façon : le périmètre de TBG vaut $6 + 7{,}5 + 4{,}5 = 18$ m, et le périmètre est multiplié par k : $0{,}7 \times 18 = 12{,}6$ m.

(e) Les droites (RS) et (BG) sont parallèles, donc les angles correspondants $\widehat{TRS}$ et $\widehat{TBG}$ sont égaux : $\widehat{TRS} = 90°$ (les angles sont conservés). TRS est donc rectangle en R. On vérifie l'aire de TBG : $\frac{6 \times 4{,}5}{2} = 13{,}5$ m². Maëlle trouverait $0{,}7 \times 13{,}5 = 9{,}45$ m². Mais l'aire de TRS vaut $\frac{TR \times RS}{2} = \frac{4{,}2 \times 3{,}15}{2} = 6{,}615$ m². Maëlle a tort : on multiplie les longueurs par k, pas l'aire.

Ex. 27 ★★★ **Le verre conique de Yanis**

(a) E est sur [OP], donc $EP = OP - OE = 8 - 5{,}2 = 2{,}8$ cm. Le rapport de réduction est $k = \frac{OE}{OP} = \frac{5{,}2}{8} = 0{,}65$ (petit ÷ grand, et $k < 1$).

(b) Yanis ajoute la même longueur : il trouverait $3{,}9 + 2{,}8 = 6{,}7$ cm. Mais avec le théorème de Thalès, les longueurs sont proportionnelles : on multiplie ou on divise par k, on n'ajoute pas. Les points O, E, P sont alignés, ainsi que O, F, Q, et (EF) // (PQ). D'après le théorème de Thalès : $\frac{OE}{OP} = \frac{OF}{OQ} = \frac{EF}{PQ}$, soit $\frac{5{,}2}{8} = \frac{3{,}9}{PQ}$, donc $PQ = \frac{8 \times 3{,}9}{5{,}2} = 6$ cm. C'est bien $3{,}9 \div 0{,}65 = 6$.

(c) Le rapport d'agrandissement est $\frac{OP}{OE} = \frac{8}{5{,}2} = \frac{20}{13} \approx 1{,}54$, plus grand que 1. On retrouve $PQ = 3{,}9 \times \frac{20}{13} = 6$ cm. Avec la valeur approchée, on trouverait $3{,}9 \times 1{,}54 \approx 6{,}01$: il vaut mieux utiliser la valeur exacte.

(d) Les points O, G, P sont alignés, ainsi que O, H, Q, et (GH) // (PQ). D'après le théorème de Thalès : $\frac{OG}{OP} = \frac{OH}{OQ} = \frac{GH}{PQ}$, soit $\frac{OG}{8} = \frac{5{,}1}{6}$, donc $OG = \frac{8 \times 5{,}1}{6} = 6{,}8$ cm. G est sur [OP], donc $GP = OP - OG = 8 - 6{,}8 = 1{,}2$ cm.

Ex. 28 ★★★ **Trois triangles emboîtés**

(a) Les points L, U, K sont alignés, ainsi que L, V, W, et (UV) // (KW). D'après le théorème de Thalès : $\frac{LU}{LK} = \frac{LV}{LW} = \frac{UV}{KW}$. Comme U est le milieu de [LK], ce rapport vaut $\frac{1}{2}$.
Donc $LV = \frac{6{,}3}{2} = 3{,}15$ cm, soit la moitié de LW : V est le milieu de [LW]. Et $UV = \frac{5{,}4}{2} = 2{,}7$ cm.

(b) Les points L, K, P sont alignés dans cet ordre, donc $LP = LK + KP = 7{,}2 + 0{,}8 = 8$ cm. Les points L, K, P sont alignés, ainsi que L, W, R, et (KW) // (PR). D'après le théorème de Thalès : $\frac{LK}{LP} = \frac{LW}{LR} = \frac{KW}{PR}$. Le rapport de réduction est $k = \frac{LK}{LP} = \frac{7{,}2}{8} = 0{,}9$ (et non $\frac{LK}{KP} = 9$).

Ex. 28 **(suite)**

(c) On va du petit triangle au grand, donc on divise par k : $PR = 5{,}4 \div 0{,}9 = 6$ cm et $LR = 6{,}3 \div 0{,}9 = 7$ cm. W est sur [LR], donc $WR = LR - LW = 7 - 6{,}3 = 0{,}7$ cm.

(d) Faux. $LU = 7{,}2 \div 2 = 3{,}6$ cm, donc $\frac{LP}{LU} = \frac{8}{3{,}6}$, qui est plus grand que 1 : c'est le rapport d'agrandissement qui fait passer de LUV à LPR. Les points L, U, P sont alignés, ainsi que L, V, R, et (UV) // (PR). Le rapport de réduction est petit ÷ grand : $\frac{LU}{LP} = \frac{3{,}6}{8} = 0{,}45$.

(e) Le périmètre de LPR vaut $LP + LR + PR = 8 + 7 + 6 = 21$ cm. Le périmètre est multiplié par le rapport de réduction : périmètre de LUV $= 0{,}45 \times 21 = 9{,}45$ cm (on vérifie : $3{,}6 + 3{,}15 + 2{,}7 = 9{,}45$ cm).

5. *Réciproque : les droites sont-elles parallèles ?*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : comparer les deux bons rapports**

(a) D'une part, $\frac{IE}{IJ} = 3 \div 5 = 0{,}6$; d'autre part, $\frac{IF}{IK} = 4{,}2 \div 7 = 0{,}6$. Les rapports sont égaux et les points I, E, J et I, F, K sont dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, (EF) // (JK).

(b) On compare $IE \times IK = 5 \times 11 = 55$ et $IJ \times IF = 9 \times 6 = 54$. Comme $55 \neq 54$, on a $\frac{IE}{IJ} \neq \frac{IF}{IK}$: d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (EF) et (JK) ne sont pas parallèles.

(c) Il faut $\frac{IE}{IJ} = \frac{IF}{IK}$, soit $\frac{6}{8} = \frac{IF}{10}$. Produit en croix : $IF = \frac{6 \times 10}{8} = 7{,}5$ cm. Avec IF = 7,5 cm, la réciproque du théorème de Thalès donne (EF) // (JK).

(d) L'égalité $\frac{IE}{IJ} = \frac{EF}{JK}$ découle du théorème de Thalès, et ce théorème ne s'applique que si l'on sait déjà que (EF) // (JK). Pour la réciproque, on compare seulement $\frac{IE}{IJ}$ et $\frac{IF}{IK}$: ce sont des rapports de longueurs prises sur les côtés [IJ] et [IK].

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : réciproque ou contraposée ?**

(a) $\frac{2}{5} = 0{,}4$ et $0{,}4 \neq 0{,}45$, donc $\frac{UX}{UV} \neq \frac{UY}{UW}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (XY) et (VW) ne sont pas parallèles.

Ex. 30 **(suite)**

(b) $\frac{3}{4} = 0{,}75$, donc $\frac{UX}{UV} = \frac{UY}{UW}$. Les points U, X, V et U, Y, W sont alignés dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, (XY) // (VW).

(c) Non. Le rapport $\frac{YW}{UW}$ ne part pas du sommet commun U, donc les points ne sont pas pris dans le même ordre. Comme UY = UW − YW, on a $\frac{UY}{UW} = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Or $0{,}6 \neq 0{,}4$: d'après la contraposée du théorème de Thalès, (XY) et (VW) ne sont pas parallèles.

Ex. 31 ★★☆ **Calculer les longueurs des grands côtés avant de comparer**

(a) H ∈ [DG], donc DG = DH + HG = 3 + 2 = 5 cm. L ∈ [DK], donc DK = DL + LK = 3,6 + 2,4 = 6 cm.

(b) D'une part, $\frac{DH}{DG} = \frac{3}{5} = 0{,}6$; d'autre part, $\frac{DL}{DK} = \frac{3{,}6}{6} = 0{,}6$. Les rapports sont égaux et les points D, H, G et D, L, K sont alignés dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, (HL) // (GK).

(c) Les points D, H, G sont alignés, ainsi que D, L, K, et (HL) // (GK) d'après la question précédente. D'après le théorème de Thalès : $\frac{DH}{DG} = \frac{DL}{DK} = \frac{HL}{GK}$, soit $\frac{3}{5} = \frac{HL}{4{,}5}$, donc $HL = \frac{3 \times 4{,}5}{5} = 2{,}7$ cm.

Ex. 32 ★★☆ **Une figure qui a l'air juste**

(a) Non : on n'arrondit jamais avant de comparer. On compare les produits en croix : $RS \times RV = 6 \times 13 = 78$ et $RT \times RU = 11 \times 7 = 77$. Comme $78 \neq 77$, on a $\frac{RS}{RT} \neq \frac{RU}{RV}$: d'après la contraposée du théorème de Thalès, (SU) et (TV) ne sont pas parallèles.

(b) $\frac{RS}{RT} = \frac{6}{11} = \frac{6 \times 13}{11 \times 13} = \frac{78}{143}$ et $\frac{RU}{RV} = \frac{7}{13} = \frac{7 \times 11}{13 \times 11} = \frac{77}{143}$. Comme $78 > 77$, on a $\frac{RS}{RT} > \frac{RU}{RV}$: les rapports sont différents, ce qui confirme que (SU) et (TV) ne sont pas parallèles (contraposée du théorème de Thalès).

(c) Il faut $\frac{RS}{RT} = \frac{RU}{RV}$, soit $\frac{6}{11} = \frac{RU}{13}$. Produit en croix : $RU = \frac{6 \times 13}{11} = \frac{78}{11}$ cm (valeur exacte), soit RU ≈ 7,1 cm. On voit que 7 cm n'est pas loin de cette valeur, d'où l'impression trompeuse du dessin.

Ex. 33 ★★★ **Une ferme de charpente**

(a) E ∈ [SP], donc $SP = SE + EP = 1{,}8 + 2{,}7 = 4{,}5$ m. F ∈ [SQ], donc $SQ = SF + FQ = 2{,}2 + 3{,}3 = 5{,}5$ m.

Ex. 33 **(suite)**

(b) D'une part, $\frac{SE}{SP} = \frac{1{,}8}{4{,}5} = 0{,}4$; d'autre part, $\frac{SF}{SQ} = \frac{2{,}2}{5{,}5} = 0{,}4$. Les rapports sont égaux. De plus, les points S, E, P et S, F, Q sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (EF) // (PQ) : la poutre est bien parallèle au sol.

(c) Les points S, E, P sont alignés, ainsi que S, F, Q, et (EF) // (PQ) (question précédente). D'après le théorème de Thalès : $\frac{SE}{SP} = \frac{SF}{SQ} = \frac{EF}{PQ}$, soit $\frac{1{,}8}{4{,}5} = \frac{EF}{8}$, donc $EF = \frac{1{,}8 \times 8}{4{,}5} = 3{,}2$ m.

(d) Le rapport de réduction est $k = \frac{SE}{SP} = 0{,}4$. Le périmètre de SPQ vaut 4,5 + 5,5 + 8 = 18 m, donc celui de SEF vaut 0,4 × 18 = 7,2 m. Vérification : 1,8 + 2,2 + 3,2 = 7,2 m.

Ex. 34 ★★★ **Deux segments, un seul parallèle**

(a) D'une part, $\frac{OU}{OB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; d'autre part, $\frac{OW}{OC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Les rapports sont égaux et les points O, U, B et O, W, C sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (UW) // (BC).

(b) On compare $\frac{OV}{OB}$ et $\frac{OZ}{OC}$ par les produits en croix : $OV \times OC = 8{,}4 \times 9 = 75{,}6$ et $OB \times OZ = 12 \times 6{,}4 = 76{,}8$. Les produits sont différents, donc $\frac{OV}{OB} \neq \frac{OZ}{OC}$ (0,7 contre 0,711… : arrondis au dixième, ils donneraient tous les deux 0,7, d'où le piège). D'après la contraposée du théorème de Thalès, (VZ) et (BC) ne sont pas parallèles.

(c) On compare $\frac{OU}{OV} = \frac{4}{8{,}4}$ et $\frac{OW}{OZ} = \frac{3}{6{,}4}$ par les produits en croix : $OU \times OZ = 4 \times 6{,}4 = 25{,}6$ et $OV \times OW = 8{,}4 \times 3 = 25{,}2$. Les produits sont différents, donc les rapports aussi. D'après la contraposée du théorème de Thalès, (UW) et (VZ) ne sont pas parallèles (c'est cohérent : (UW) // (BC), alors que (VZ) n'est pas parallèle à (BC)).

(d) Il faut $\frac{OZ}{OC} = \frac{OV}{OB}$, soit $\frac{OZ}{9} = \frac{8{,}4}{12}$, donc $OZ = \frac{8{,}4 \times 9}{12} = 6{,}3$ cm. On doit rapprocher Z de O de 0,1 cm.

Ex. 35 ★★★ **Deux copies à corriger**

(a) Jade utilise $\frac{PR}{HT}$: l'égalité $\frac{GP}{GH} = \frac{GR}{GT} = \frac{PR}{HT}$ n'est vraie que si l'on sait déjà que (PR) // (HT). Pour la réciproque, on ne compare que les longueurs portées par (GH) et (GT) : $\frac{GP}{GH}$ et $\frac{GR}{GT}$.

(b) GP est mesuré à partir de G, mais RT à partir de T : les points ne sont pas pris dans le même ordre, et P ne correspond pas à R de cette façon. Il faut comparer $\frac{GP}{GH}$ avec $\frac{GR}{GT}$.

Ex. 35 **(suite)**

(c) P $\in$ [GH], donc $GH = 6 + 4 = 10$ cm ; R $\in$ [GT], donc $GT = 6{,}5 + 6{,}5 = 13$ cm. D'une part, $\frac{GP}{GH} = \frac{6}{10} = 0{,}6$; d'autre part, $\frac{GR}{GT} = \frac{6{,}5}{13} = 0{,}5$. Les rapports sont différents. D'après la contraposée du théorème de Thalès, (PR) et (HT) ne sont pas parallèles : la conclusion de Jade est fausse.

(d) $GS = 10 \div 2 = 5$ cm. D'une part, $\frac{GS}{GH} = \frac{5}{10} = 0{,}5$; d'autre part, $\frac{GR}{GT} = 0{,}5$. Les rapports sont égaux, avec G, S, H et G, R, T dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, (SR) // (HT). Ensuite, d'après le théorème de Thalès, $\frac{SR}{HT} = 0{,}5$, donc $SR = 0{,}5 \times 7 = 3{,}5$ cm. On a SR = PR, alors que seule (SR) est parallèle à (HT) : une longueur égale ne prouve pas le parallélisme. C'est ce qui a trompé Jade.

6. *Thalès dans les situations : ombre, hauteur, largeur*

Ex. 36 ★☆☆ **Repérer la configuration dans une ombre**

(a) Le sommet commun est O. Les triangles emboîtés sont ORT (le petit) et ODE (le grand).

(b) Le bâton [RT] et le mât [DE] sont verticaux, donc les droites (RT) et (DE) sont toutes les deux perpendiculaires au sol, la droite (OD). Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc (RT) // (DE).

(c) [OT] correspond à [OE] et [RT] correspond à [DE].

(d) $\frac{OR}{OD} = \frac{OT}{OE} = \frac{RT}{DE}$

(e) Léo a pris RD, c'est-à-dire seulement un morceau de l'ombre du mât. Or les longueurs se mesurent depuis le sommet commun O : il faut prendre l'ombre totale OD. L'égalité correcte est $\frac{OR}{OD} = \frac{RT}{DE}$.

Ex. 37 ★☆☆ **Le verre conique vu en coupe**

(a) Les points S, H, O sont alignés, ainsi que S, E, B ; les droites (HE) et (OB) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SH}{SO} = \frac{SE}{SB} = \frac{HE}{OB}$, soit $\frac{9}{12} = \frac{HE}{4}$, donc $HE = \frac{9 \times 4}{12} = 3$ cm. Le rayon de la surface du liquide mesure 3 cm.

(b) D'après le théorème de Thalès : $\frac{SH}{SO} = \frac{HE}{OB}$, soit $\frac{SH}{12} = \frac{2{,}4}{4}$, donc $SH = \frac{12 \times 2{,}4}{4} = 7{,}2$ cm. Le liquide monte jusqu'à 7,2 cm.

Ex. 37 **(suite)**

(c) Je convertis d'abord : 0,03 m = 3 cm, dans la même unité que SO et OB. D'après le théorème de Thalès : $\frac{3}{12} = \frac{HE}{4}$, donc $HE = \frac{3 \times 4}{12} = 1$ cm. Le rayon de la surface mesure 1 cm.

(d) H est sur [SO], donc SH est plus petit que SO, et le rapport $\frac{HE}{OB} = \frac{SH}{SO}$ est inférieur à 1.
Donc HE est plus petit que OB = 4 cm. Un rayon de 5 cm n'est pas plausible : la surface du liquide ne peut pas être plus large que l'ouverture du verre.

Ex. 38 ★★☆ **La hauteur d'un immeuble grâce à son ombre**

(a) Les points O, P, I sont alignés dans cet ordre, donc OI = OP + PI = 1,25 + 23,75 = 25 m. L'ombre de l'immeuble mesure 25 m.

(b) Je convertis : PQ = 80 cm = 0,8 m. Les points O, P, I sont alignés, ainsi que O, Q, J. Le bâton et l'immeuble sont verticaux, donc tous les deux perpendiculaires au sol : (PQ) // (IJ). D'après le théorème de Thalès : $\frac{OP}{OI} = \frac{OQ}{OJ} = \frac{PQ}{IJ}$, soit $\frac{1{,}25}{25} = \frac{0{,}8}{IJ}$, donc $IJ = \frac{25 \times 0{,}8}{1{,}25} = 16$ m. L'immeuble mesure 16 m de haut, ce qui est plausible (environ 5 étages).

(c) Première erreur : Karim a pris PI = 23,75 m au lieu de l'ombre totale OI = 25 m, mesurée depuis le sommet commun O. Deuxième erreur : il a mélangé les unités, avec 80 en cm alors que 1,25 et 23,75 sont en m. Son résultat de 1 520 m n'est d'ailleurs pas plausible pour un immeuble.

Ex. 39 ★★☆ **Viser le sommet d'un arbre**

(a) R est à la hauteur de l'œil, donc KR = 1,7 m. Les points K, R, P sont alignés dans cet ordre, donc RP = KP − KR = 2,5 − 1,7 = 0,8 m.

(b) Les points Y, R, T sont alignés, ainsi que Y, P, S. La perche et l'arbre sont verticaux, donc perpendiculaires à l'horizontale (YT) : (RP) // (TS). D'après le théorème de Thalès : $\frac{YR}{YT} = \frac{YP}{YS} = \frac{RP}{TS}$, soit $\frac{1{,}8}{18} = \frac{0{,}8}{TS}$, donc $TS = \frac{18 \times 0{,}8}{1{,}8} = 8$ m.

(c) Non : TS est seulement la partie de l'arbre située au-dessus de l'œil. Il faut ajouter la hauteur de l'œil : FS = FT + TS = 1,7 + 8 = 9,7 m. L'arbre mesure 9,7 m.

Ex. 40 ★★★ **La largeur d'une rivière**

(a) Le sommet commun est K. Côtés correspondants : [KE] et [KG], [KF] et [KH], [EF] et [GH].

(b) Les points K, E, G sont alignés, ainsi que K, F, H ; les droites (EF) et (GH) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{KE}{KG} = \frac{KF}{KH} = \frac{EF}{GH}$, soit $\frac{12}{KG} = \frac{16}{40}$, donc $KG = \frac{12\times40}{16} = 30$ m.

(c) E appartient à [KG], donc $EG = KG - KE = 30 - 12 = 18$ m. Comme (KG) est perpendiculaire aux rives, la rivière mesure 18 m de large.

(d) Dans le théorème de Thalès, on compare les côtés des deux triangles qui partent du sommet commun K : il faut $\frac{KE}{KG}$, et non $\frac{KE}{EG}$. [EG] n'est un côté d'aucun des deux triangles. Son égalité donnerait $EG = \frac{12\times40}{16} = 30$ m : c'est en fait KG, la longueur totale. La largeur est $EG = 30 - 12 = 18$ m.

Ex. 41 ★★★ **L'ombre sous un lampadaire**

(a) Yanis et le lampadaire sont verticaux : les droites (TH) et (PL) sont toutes les deux perpendiculaires au sol, donc parallèles. Le sommet commun est S, le bout de l'ombre. Les triangles sont STH et SPL.

(b) T est sur [SP], donc $SP = ST + TP = 2 + 4{,}4 = 6{,}4$ m. On convertit : $TH = 150$ cm $= 1{,}5$ m. Les points S, T, P sont alignés, ainsi que S, H, L, et (TH) // (PL). D'après le théorème de Thalès : $\frac{ST}{SP} = \frac{SH}{SL} = \frac{TH}{PL}$, soit $\frac{2}{6{,}4} = \frac{1{,}5}{PL}$, donc $PL = \frac{6{,}4\times1{,}5}{2} = 4{,}8$ m. Le lampadaire mesure 4,8 m de haut.

(c) Jade calcule $PL = \frac{6{,}4\times150}{2} = 480$. Un lampadaire de 480 m n'est pas plausible. Comme elle a écrit TH en centimètres, son résultat est en centimètres : 480 cm, soit 4,8 m. Son erreur, c'est l'unité.

(d) Non. Le triangle SPL part du sol (point S) et PL se mesure à partir du pied P, qui est au sol. Les 4,8 m sont donc déjà la hauteur totale du lampadaire : il ne faut rien ajouter
(on trouverait $4{,}8 + 1{,}5 = 6{,}3$ m, ce qui est faux).

(e) Le bout de l'ombre d'Elsa est en S. On appelle E le point où elle se tient et F le haut de sa tête : S, E, P sont alignés, ainsi que S, F, L, et (EF) // (PL) (deux verticales). D'après le théorème de Thalès : $\frac{SE}{SP} = \frac{EF}{PL}$, soit $\frac{SE}{6{,}4} = \frac{1{,}32}{4{,}8}$, donc $SE = \frac{6{,}4\times1{,}32}{4{,}8} = 1{,}76$ m. Ensuite $EP = SP - SE = 6{,}4 - 1{,}76 = 4{,}64$ m. Elsa se tient à 4,64 m du pied du lampadaire.

Ex. 42 ★★★ **Les renforts d'une rampe de skate**

(a) On convertit : DG = 1,4 m et DH = 1,48 m. D'une part, $\frac{DG}{DE} = \frac{1{,}4}{3{,}5} = 0{,}4$. D'autre part, $\frac{DH}{DF} = \frac{1{,}48}{3{,}7} = 0{,}4$. Les deux rapports sont égaux, et les points D, G, E et D, H, F sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (GH) et (EF) sont parallèles : le renfort [GH] est vertical.

(b) Les points D, G, E sont alignés, ainsi que D, H, F, et (GH) // (EF). D'après le théorème de Thalès : $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF}$, soit $\frac{1{,}4}{3{,}5} = \frac{GH}{1{,}2}$, donc $GH = \frac{1{,}4\times1{,}2}{3{,}5} = 0{,}48$ m, soit 48 cm.

(c) Non : on ne doit pas arrondir avant de comparer. D'une part, $\frac{DK}{DE} = \frac{2{,}8}{3{,}5} = 0{,}8$. D'autre part, $\frac{DL}{DF} = \frac{2{,}95}{3{,}7} \approx 0{,}797$. Avec les produits en croix : $2{,}8 \times 3{,}7 = 10{,}36$ et $3{,}5 \times 2{,}95 = 10{,}325$, qui sont différents. Les rapports ne sont pas égaux, donc les droites (KL) et (EF) ne sont pas parallèles : [KL] n'est pas vertical.

(d) Il faut $\frac{DL}{DF} = \frac{DK}{DE}$, soit $\frac{DL}{3{,}7} = \frac{2{,}8}{3{,}5}$, donc $DL = \frac{2{,}8\times3{,}7}{3{,}5} = 2{,}96$ m. Les points D, K, E et D, L, F sont alors dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (KL) // (EF). Sacha doit placer L à 2,96 m de D.

7. *Rédiger la démonstration*

Ex. 43 ★☆☆ **Compléter une rédaction pas à pas**

(a) Les points R, U, S sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points R, V, T. Le sommet commun est R.

(b) On écrit : « Les droites (UV) et (ST) sont parallèles. » Sans cette donnée, on ne peut pas appliquer le théorème de Thalès : la preuve serait fausse.

(c) D'après le théorème de Thalès : $\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{ST}$.

(d) $\frac{4{,}2}{7} = \frac{RV}{6{,}5} = \frac{UV}{ST}$. On garde les deux rapports qui contiennent RV : $\frac{4{,}2}{7} = \frac{RV}{6{,}5}$.

(e) $RV = \frac{4{,}2\times6{,}5}{7} = 3{,}9$ cm. Contrôle : $3{,}9 < 6{,}5$, le côté du petit triangle est bien plus court que celui du grand.

Ex. 44 ★☆☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Vrai : $\frac{GK}{GH} = \frac{GL}{GI}$, et GL ne peut être calculée qu'avec GI, qui n'est pas donnée.

(b) Faux : le dénominateur doit être un côté du grand triangle, GH et non KH. Ici $\frac{GK}{KH} = \frac{2}{3}$ alors que $\frac{KL}{HI} = \frac{GK}{GH} = 0{,}4$.

Ex. 44 (suite)

(c) Vrai : tous les rapports sont inversés en même temps (côté du grand triangle ÷ côté du petit), donc l'égalité reste vraie.

(d) Faux : un seul rapport est inversé. $\frac{GK}{GH} = 0{,}4$ mais $\frac{GI}{GL} = \frac{GH}{GK} = 2{,}5$.

(e) Faux : le produit en croix est fait dans le mauvais sens. $KL = \frac{2\times 7}{5} = 2{,}8$ cm. Il fallait s'en douter : 17,5 cm est plus long que HI = 7 cm, c'est impossible.

(f) Faux : la réciproque sert à prouver que deux droites sont parallèles. Pour calculer une longueur, on utilise le théorème de Thalès.

Ex. 45 ★★☆ **La rédaction d'Inès**

(a) Elle n'écrit pas que les droites (EF) et (DJ) sont parallèles : sans cette donnée, la preuve est fausse. Elle cite la réciproque, qui sert à prouver un parallélisme : pour calculer, il faut le théorème de Thalès.

(b) Elle met ED au dénominateur, alors qu'il faut un côté du grand triangle, PD. Elle n'écrit pas non plus l'égalité des trois rapports. $PD = PE + ED = 3 + 6 = 9$ cm.

(c) Les points P, E, D sont alignés, ainsi que P, F, J ; les droites (EF) et (DJ) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{PE}{PD} = \frac{PF}{PJ} = \frac{EF}{DJ}$, soit $\frac{3}{9} = \frac{EF}{7{,}5}$, donc $EF = \frac{3\times 7{,}5}{9} = 2{,}5$ cm (et non 3,75 cm). Contrôle : $2{,}5 < 7{,}5$.

Ex. 46 ★★☆ **Deux parallèles successives**

(a) Les points O, E, F sont alignés, ainsi que O, G, H ; les droites (EG) et (FH) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OE}{OF} = \frac{OG}{OH} = \frac{EG}{FH}$, soit $\frac{2}{5} = \frac{1{,}8}{OH}$, donc $OH = \frac{1{,}8\times 5}{2} = 4{,}5$ cm. Contrôle : $1{,}8 < 4{,}5$.

(b) $OB = OF + FB = 5 + 2 = 7$ cm et $OC = OH + HC = 4{,}5 + 1{,}9 = 6{,}4$ cm.

(c) D'une part, $\frac{OF}{OB} = \frac{5}{7}$. D'autre part, $\frac{OH}{OC} = \frac{4{,}5}{6{,}4}$. Produits en croix : $5 \times 6{,}4 = 32$ et $7 \times 4{,}5 = 31{,}5$. Comme $32 \neq 31{,}5$, les deux rapports sont différents. Si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait des rapports égaux.
Donc les droites (FH) et (BC) ne sont pas parallèles.

Ex. 47 ★★★ **La charpente de Lucas**

(a) Les points S, M, B sont alignés dans cet ordre, donc $SB = SM + MB = 1{,}8 + 2{,}7 = 4{,}5$ m. Les points S, M, B sont alignés, ainsi que S, N, C ; les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{1{,}8}{4{,}5} = \frac{SN}{4{,}5} = \frac{MN}{7{,}2}$.
Donc $MN = \frac{1{,}8\times 7{,}2}{4{,}5} = 2{,}88$ m. Contrôle : $2{,}88 < 7{,}2$.

(b) $k = \frac{SM}{SB} = \frac{1{,}8}{4{,}5} = 0{,}4$ (réduction, car $k < 1$). Rapport d'agrandissement : $\frac{SB}{SM} = \frac{4{,}5}{1{,}8} = 2{,}5$.

(c) Périmètre de SBC : $4{,}5 + 4{,}5 + 7{,}2 = 16{,}2$ m. Les longueurs du triangle SMN sont celles de SBC multipliées par k, donc le périmètre de SMN vaut $0{,}4 \times 16{,}2 = 6{,}48$ m.

(d) Les points S, P, B sont alignés dans le même ordre que S, Q, C. D'une part, $\frac{SP}{SB} = \frac{3{,}6}{4{,}5} = 0{,}8$. D'autre part, $\frac{SQ}{SC} = \frac{3{,}2}{4{,}5} \approx 0{,}71$. Les deux rapports ne sont pas égaux. Si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait des rapports égaux : les droites (PQ) et (BC) ne sont donc pas parallèles.

Ex. 48 ★★★ **Le contrôle de Yanis**

(a) F est sur [HV], donc HF est un côté du petit triangle HEF : il doit être plus court que le côté correspondant HV = 6 cm. Or Yanis trouve $10 > 6$: c'est impossible.

(b) Il a inversé le second rapport : HV est au numérateur, alors que les côtés du petit triangle doivent être au numérateur dans les deux rapports. Il a aussi oublié de citer les points alignés et les droites parallèles.
Correction : les points H, E, U sont alignés, ainsi que H, F, V ; les droites (EF) et (UV) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{HE}{HU} = \frac{HF}{HV} = \frac{EF}{UV}$, soit $\frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{HF}{6}$, donc $HF = \frac{4{,}5\times 6}{7{,}5} = 3{,}6$ cm. Contrôle : $3{,}6 < 6$.

(c) Non. Les rapports de Thalès comparent un côté du petit triangle HEF au côté correspondant du grand triangle HUV : le dénominateur doit être HU, et non EU, qui n'est un côté d'aucun des deux triangles. Avec EU, il trouverait $\frac{4{,}5\times 5}{3} = 7{,}5$ cm, plus long que UV = 5 cm : c'est impossible. On garde $\frac{HE}{HU} = \frac{EF}{UV}$, soit $\frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{EF}{5}$, donc $EF = \frac{4{,}5\times 5}{7{,}5} = 3$ cm.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Non : deux valeurs arrondies égales ne prouvent pas que les rapports sont égaux. D'une part, $\frac{HG}{HU} = \frac{5}{7{,}5}$. D'autre part, $\frac{HI}{HV} = \frac{4{,}1}{6}$. Par produit en croix : $5 \times 6 = 30$ et $7{,}5 \times 4{,}1 = 30{,}75$. Comme $30 \neq 30{,}75$, les rapports ne sont pas égaux (environ 0,67 et 0,68). Si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait des rapports égaux : les droites (GI) et (UV) ne sont donc pas parallèles.

Ex. 49 ★★★ **Le verre de sirop de Mia**

(a) Le sommet commun est S. Les points S, I, H sont alignés, ainsi que S, M, A. Les droites (IM) et (HA) sont toutes les deux perpendiculaires à l'axe (SH). Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc (IM) // (HA). Sans ce parallélisme, on ne pourrait pas appliquer le théorème de Thalès.

(b) Les points S, I, H sont alignés, ainsi que S, M, A ; les droites (IM) et (HA) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SI}{SH} = \frac{SM}{SA} = \frac{IM}{HA}$, soit $\frac{9}{12} = \frac{SM}{13} = \frac{IM}{5}$.
Donc $IM = \frac{9 \times 5}{12} = 3{,}75$ cm. Comme I est le milieu de [MN] : $MN = 2 \times 3{,}75 = 7{,}5$ cm.

(c) On garde $\frac{SI}{SH} = \frac{SM}{SA}$, soit $\frac{9}{12} = \frac{SM}{13}$, donc $SM = \frac{9 \times 13}{12} = 9{,}75$ cm. Contrôle : $9{,}75 < 13$.

(d) $k = \frac{SI}{SH} = \frac{9}{12} = 0{,}75$. Périmètre de SHA : $12 + 5 + 13 = 30$ cm. Périmètre de SIM : $0{,}75 \times 30 = 22{,}5$ cm (on retrouve $9 + 3{,}75 + 9{,}75 = 22{,}5$ cm).

(e) Le diamètre vaut 6 cm, donc le rayon vaut $6 \div 2 = 3$ cm : il correspond à HA. Attention, utiliser 6 cm donnerait $\frac{12 \times 6}{5} = 14{,}4$ cm, plus que la hauteur SH du verre : c'est impossible. Soit J sur [SH] et K sur [SA] tels que JK = 3 cm et (JK) // (HA). Les points S, J, H sont alignés, ainsi que S, K, A ; les droites (JK) et (HA) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SJ}{SH} = \frac{SK}{SA} = \frac{JK}{HA}$, soit $\frac{SJ}{12} = \frac{3}{5}$, donc $SJ = \frac{12 \times 3}{5} = 7{,}2$ cm.