1. Rappels de 4^e : triangles emboîtés

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : écrire les bons rapports**

(a) Le petit triangle est PEF, le grand triangle est PKL, et leur sommet commun est P.

(b) $[EF]$ correspond à $[KL]$ (les côtés parallèles) et $[PF]$ correspond à $[PL]$
(ils sont sur la même droite).

(c) Les droites (EK) et (FL) sont sécantes en P et $(EF) \parallel (KL)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{PE}{PK} = \frac{PF}{PL} = \frac{EF}{KL}$.

(d) Non. $[EK]$ et $[FL]$ ne sont les côtés d'aucun des deux triangles : les longueurs des rapports partent toutes du sommet commun P. On calcule d'abord $PK = PE + EK = 3 + 4{,}5 = 7{,}5$ cm. Le bon rapport est $\frac{PE}{PK} = \frac{3}{7{,}5} = 0{,}4$.

(e) Non. Le théorème de Thalès ne s'applique que si les droites (EF) et (KL) sont parallèles. Sans droites parallèles, pas de théorème de Thalès.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : le produit en croix dans le bon sens**

(a) $AN = \dfrac{3 \times 12}{8} = 4{,}5$ cm.

(b) Non. Les produits en croix donnent $5 \times AC = 4 \times 9$, donc $AC = \frac{4\times 9}{5} = 7{,}2$ cm.

(c) Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A, et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{4{,}5}{6} = \frac{MN}{5}$.
Donc $MN = \frac{4{,}5\times 5}{6} = 3{,}75$ cm.

(d) $AM = \dfrac{6 \times 7}{11} = \dfrac{42}{11} \approx 3{,}8$ cm.

Ex. 3 ★★☆ **Un triangle couché, une longueur à déduire**

(a) $SR = SU + UR = 4 + 2{,}6 = 6{,}6$ cm. Les droites (UR) et (VT) sont sécantes en S, et $(UV) \parallel (RT)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SU}{SR} = \frac{SV}{ST} = \frac{UV}{RT}$, soit $\frac{4}{6{,}6} = \frac{SV}{7{,}7}$.
Donc $SV = \frac{4\times 7{,}7}{6{,}6} = \frac{14}{3} \approx 4{,}7$ cm.

(b) $\dfrac{4}{6{,}6} = \dfrac{UV}{5}$, donc $UV = \dfrac{4 \times 5}{6{,}6} = \dfrac{100}{33} \approx 3{,}0$ cm.

(c) $VT = ST - SV = 7{,}7 - \frac{14}{3} = \frac{91}{30} \approx 3{,}0$ cm
(on calcule avec la valeur exacte de SV).

(d) Jade a arrondi trop tôt : $\frac{4}{6{,}6} \approx 0{,}606$, pas $0{,}6$ exactement. En calculant d'abord $\frac{4\times 7{,}7}{6{,}6} = \frac{14}{3}$, puis en arrondissant à la fin, on trouve $SV \approx 4{,}7$ cm.

Ex. 4 ★★☆ **La baguette de plomb du vitrail**

(a) GE n'entre jamais dans les rapports : il faut partir du sommet commun D. On calcule d'abord $DG = DE - GE = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ cm. Les droites (GE) et (HF) sont sécantes en D, et $(GH) \parallel (EF)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF}$, soit $\frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{GH}{6{,}5}$.
Donc $GH = \frac{4{,}5\times 6{,}5}{7{,}5} = 3{,}9$ cm.

(b) $k = \frac{DG}{DE} = \frac{4{,}5}{7{,}5} = 0{,}6$. Le périmètre de DEF vaut $7{,}5 + 8 + 6{,}5 = 22$ cm, donc celui de DGH vaut $0{,}6 \times 22 = 13{,}2$ cm
(vérification : $DH = 0{,}6 \times 8 = 4{,}8$ cm et $4{,}5 + 4{,}8 + 3{,}9 = 13{,}2$).

(c) Dans le triangle DGH, I est le milieu de $[DG]$ et $(IJ) \parallel (GH)$: le rapport vaut $\frac{1}{2}$, donc J est le milieu de $[DH]$ et $IJ = \frac{GH}{2} = \frac{3{,}9}{2} = 1{,}95$ cm.

Ex. 5 ★★★ **La latte de la voile**

(a) Les droites (UV) et (ST) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (RS). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(UV) \parallel (ST)$.

(b) $U \in [RS]$, donc $RS = RU + US = 4{,}8 + 2{,}4 = 7{,}2$ m. Les points R, U, S sont alignés, ainsi que R, V, T, et $(UV) \parallel (ST)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{ST}$, soit $\frac{4{,}8}{7{,}2} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{3}$.
Donc $UV = \frac{4{,}8\times 3}{7{,}2} = 2$ m. Attention : le rapport est $\frac{RU}{RS}$, pas $\frac{RU}{US}$.

(c) Le triangle RST est rectangle en S. D'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2 = 7{,}2^2 + 3^2 = 51{,}84 + 9 = 60{,}84$, donc $RT = \sqrt{60{,}84} = 7{,}8$ m. Avec les rapports de Thalès : $\frac{4{,}8}{7{,}2} = \frac{RV}{7{,}8}$, donc $RV = \frac{4{,}8\times 7{,}8}{7{,}2} = 5{,}2$ m. Enfin $VT = RT - RV = 7{,}8 - 5{,}2 = 2{,}6$ m.

(d) Le triangle RST est rectangle en S : son aire vaut $\frac{RS\times ST}{2} = \frac{7{,}2\times 3}{2} = 10{,}8$ m². Le triangle RUV est rectangle en U : son aire vaut $\frac{RU\times UV}{2} = \frac{4{,}8\times 2}{2} = 4{,}8$ m².
Donc l'aire de $USTV$ vaut $10{,}8 - 4{,}8 = 6$ m².

Ex. 6 ★★★ **Deux parallèles dans le même triangle**

(a) $Z \in [QP]$, donc $QP = QZ + ZP = 2{,}2 + 4{,}4 = 6{,}6$ cm. X est le milieu de $[QP]$ et $(XY) \parallel (PR)$. Le rapport de Thalès vaut donc $\frac{1}{2}$: Y est le milieu de $[QR]$.
Donc $QY = 7 \div 2 = 3{,}5$ cm et $XY = \frac{PR}{2} = 9{,}4 \div 2 = 4{,}7$ cm.

(b) Les points Q, Z, P sont alignés, ainsi que Q, T, R, et $(ZT) \parallel (PR)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{QZ}{QP} = \frac{QT}{QR} = \frac{ZT}{PR}$, soit $\frac{2{,}2}{6{,}6} = \frac{QT}{7} = \frac{ZT}{9{,}4}$. Le troisième rapport ne sert pas ici.
Donc $QT = \frac{2{,}2 \times 7}{6{,}6} = \frac{7}{3}$ cm, soit $QT \approx 2{,}3$ cm.

(c) On utilise le premier et le troisième rapport : $\frac{2{,}2}{6{,}6} = \frac{ZT}{9{,}4}$, donc $ZT = \frac{2{,}2 \times 9{,}4}{6{,}6} = \frac{9{,}4}{3}$ cm, soit $ZT \approx 3{,}1$ cm.

(d) Malo a additionné des valeurs déjà arrondies. Les erreurs d'arrondi s'ajoutent, alors il faut calculer avec les valeurs exactes et arrondir seulement à la fin. Le périmètre vaut $2{,}2 + \frac{7}{3} + \frac{9{,}4}{3} = \frac{23}{3}$ cm, soit environ 7,7 cm. On peut le vérifier avec le rapport $k = \frac{2{,}2}{6{,}6} = \frac{1}{3}$: le périmètre du triangle QPR vaut $6{,}6 + 7 + 9{,}4 = 23$ cm, et $\frac{1}{3} \times 23 = \frac{23}{3}$ cm.

Ex. 7 ★★★ **La traverse du toit de la cabane**

(a) $L \in [HE]$, donc $HE = HL + LE = x + 0{,}9$. Les points H, L, E sont alignés, ainsi que H, F, G, et $(LF) \parallel (EG)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{HL}{HE} = \frac{HF}{HG} = \frac{LF}{EG}$, donc $\frac{x}{x+0{,}9} = \frac{1{,}8}{3}$. Le côté $[LF]$ correspond au côté $[EG]$: ce sont les côtés parallèles.

(b) Par produits en croix : $3x = 1{,}8(x + 0{,}9)$, soit $3x = 1{,}8x + 1{,}62$.
Donc $1{,}2x = 1{,}62$ et $x = 1{,}62 \div 1{,}2 = 1{,}35$. Ainsi $HL = 1{,}35$ m et $HE = 1{,}35 + 0{,}9 = 2{,}25$ m.
Vérification : $\frac{1{,}35}{2{,}25} = 0{,}6 = \frac{1{,}8}{3}$.

(c) $EI = 3 \div 2 = 1{,}5$ m. Le triangle HIE est rectangle en I, d'hypoténuse $[HE]$. D'après le théorème de Pythagore : $HE^2 = HI^2 + EI^2$, donc $HI^2 = 2{,}25^2 - 1{,}5^2 = 5{,}0625 - 2{,}25 = 2{,}8125$.
Donc $HI = \sqrt{2{,}8125} \approx 1{,}68$ m.

(d) Dans le triangle HIE rectangle en I, $[EI]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{HEI}$ et $[HE]$ est l'hypoténuse.
Donc $\cos \widehat{HEG} = \frac{EI}{HE} = \frac{1{,}5}{2{,}25}$, d'où $\widehat{HEG} \approx 48°$ (touche $\cos^{-1}$).

Ex. 7 (suite)

(e) Oui. $HG = HE = 2{,}25$ m, car le triangle est isocèle en H. D'après le théorème de Thalès, $\frac{HL}{HE} = \frac{HF}{HG}$, soit $\frac{1{,}35}{2{,}25} = \frac{HF}{2{,}25}$.
Donc $HF = \frac{1{,}35 \times 2{,}25}{2{,}25} = 1{,}35$ m, c'est-à-dire $HF = HL$. Puis $FG = HG - HF = 2{,}25 - 1{,}35 = 0{,}9$ m, c'est-à-dire $FG = LE$.

2. *La configuration papillon : reconnaître et calculer*

Ex. 8 ★★★ **Automatismes : reconnaître le papillon**

(a) E est entre R et U et entre S et T : c'est une configuration papillon, de sommet E. D'après le théorème de Thalès : $\frac{ER}{EU} = \frac{ES}{ET} = \frac{RS}{UT}$.

(b) E est au bout des deux côtés : ce sont des triangles emboîtés. L'égalité s'écrit de la même façon, avec des longueurs qui partent de E : $\frac{ER}{EU} = \frac{ES}{ET} = \frac{RS}{UT}$.

(c) Non. A est bien entre M et B, mais A n'est pas entre N et C : c'est N qui est entre A et C. Ce n'est ni une configuration papillon ni des triangles emboîtés.

(d) G et K sont sur la même droite issue de F : [FG] va avec [FK], et pas avec [FP]. D'après le théorème de Thalès : $\frac{FG}{FK} = \frac{FH}{FP} = \frac{GH}{KP}$.

(e) Les points R, E, U sont alignés, ainsi que S, E, T : les angles $\widehat{RES}$ et $\widehat{UET}$ sont opposés par le sommet E, donc ils sont égaux. Ainsi $\widehat{UET} = 52°$.

Ex. 9 ★★★ **Automatismes : calculer une longueur en papillon**

(a) Les droites (DF) et (GH) sont sécantes en O, et les droites (DG) et (FH) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OD}{OF} = \frac{OG}{OH} = \frac{DG}{FH}$, soit $\frac{4}{5} = \frac{OG}{4}$.
Donc $OG = \frac{4 \times 4}{5} = 3{,}2$ cm.

(b) Les droites (KL) et (JN) sont sécantes en I, et les droites (KJ) et (LN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{IK}{IL} = \frac{IJ}{IN} = \frac{KJ}{LN}$, soit $\frac{7}{4} = \frac{KJ}{3{,}6}$.
Donc $KJ = \frac{7 \times 3{,}6}{4} = 6{,}3$ cm. Contrôle : $\frac{IK}{IL} = 1{,}75$ est plus grand que 1, donc KJ doit être plus long que LN : $6{,}3 > 3{,}6$, c'est cohérent.

(c) Les droites (UZ) et (YW) sont sécantes en P, et les droites (UY) et (ZW) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{PU}{PZ} = \frac{PY}{PW} = \frac{UY}{ZW}$, soit $\frac{7}{3} = \frac{UY}{5}$.
Donc $UY = \frac{7 \times 5}{3} = \frac{35}{3}$ cm, soit $UY \approx 11{,}7$ cm.

Ex. 10 ★★☆ **Longueurs à déduire avant et après Thalès**

(a) O est entre G et K, donc $GK = GO + OK$. Ainsi $OK = GK - OG = 12{,}6 - 4{,}2 = 8{,}4$ cm.

(b) Les droites (GK) et (FJ) sont sécantes en O, et les droites (GF) et (KJ) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OG}{OK} = \frac{OF}{OJ} = \frac{GF}{KJ}$, soit $\frac{4{,}2}{8{,}4} = \frac{3{,}5}{OJ}$.
Donc $OJ = \frac{8{,}4 \times 3{,}5}{4{,}2} = 7$ cm.

(c) Non : en papillon, O est entre F et J, donc les longueurs s'ajoutent : $FJ = FO + OJ = 3{,}5 + 7 = 10{,}5$ cm.

Ex. 11 ★★☆ **Le vitrail en nœud papillon**

(a) Les points P, I, L sont alignés, ainsi que Q, I, N : les angles $\widehat{PIQ}$ et $\widehat{LIN}$ sont opposés par le sommet I, donc ils sont égaux.

(b) $\frac{IL}{IP} = \frac{18}{12} = 1{,}5$. Les droites (PL) et (QN) sont sécantes en I et $(PQ) \parallel (LN)$: d'après le théorème de Thalès, les côtés de ILN sont ceux de IPQ multipliés par 1,5. Le rapport est plus grand que 1 : ILN est un agrandissement de IPQ, de rapport 1,5.

(c) D'après le théorème de Thalès : $\frac{IL}{IP} = \frac{IN}{IQ} = \frac{LN}{PQ}$, soit $\frac{18}{12} = \frac{LN}{10}$.
Donc $LN = \frac{18 \times 10}{12} = 15$ cm.

(d) Dans un agrandissement, le périmètre est multiplié par le même rapport : périmètre de ILN $= 32 \times 1{,}5 = 48$ cm.

Ex. 12 ★★★ **Le plan de la passerelle**

(a) Le triangle KHL est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $KL^2 = KH^2 + HL^2 = 4{,}8^2 + 3{,}6^2 = 23{,}04 + 12{,}96 = 36$.
Donc $KL = \sqrt{36} = 6$ cm.

(b) Les points H, K, Y sont alignés dans cet ordre, donc K est entre H et Y : $HY = HK + KY$.
Donc $KY = HY - HK = 16{,}8 - 4{,}8 = 12$ cm.

(c) Les droites (HY) et (LZ) sont sécantes en K, et les droites (HL) et (YZ) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{KH}{KY} = \frac{KL}{KZ} = \frac{HL}{YZ}$, soit $\frac{4{,}8}{12} = \frac{6}{KZ} = \frac{3{,}6}{YZ}$.
Donc $KZ = \frac{12 \times 6}{4{,}8} = 15$ cm et $YZ = \frac{12 \times 3{,}6}{4{,}8} = 9$ cm.

Ex. 12 **(suite)**

(d) $\frac{KY}{KH} = \frac{12}{4{,}8} = 2{,}5$. Ce rapport est plus grand que 1, ce qui confirme que KYZ est le plus grand des deux triangles. Le périmètre de KHL vaut $4{,}8 + 3{,}6 + 6 = 14{,}4$ cm. Dans un agrandissement, le périmètre est multiplié par le même rapport, donc le périmètre de KYZ vaut $14{,}4 \times 2{,}5 = 36$ cm. Vérification : $12 + 9 + 15 = 36$ cm.

(e) Les points L, K, Z sont alignés dans cet ordre, donc K est entre L et Z : $LZ = LK + KZ = 6 + 15 = 21$ cm. Attention, ce n'est pas $KZ - KL$.

Ex. 13 ★★★ **Le tréteau de Maëlle**

(a) Non. Lina compare des valeurs arrondies, ce qui ne prouve rien. Je compare les rapports de façon exacte avec les produits en croix. D'une part, $28 \times 55 = 1\,540$; d'autre part, $42 \times 36 = 1\,512$. Comme $1\,540 \neq 1\,512$, on a $\frac{JD}{JS} \neq \frac{JX}{JB}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (DX) et (SB) ne sont pas parallèles.

(b) Pour que les droites soient parallèles, il faut $\frac{JD}{JS} = \frac{JX}{JB}$, soit $\frac{28}{42} = \frac{36}{JB}$.
Donc $JB = \frac{36 \times 42}{28} = 54$ cm. Vérification : $\frac{JX}{JB} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$ et $\frac{JD}{JS} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$. Les rapports sont égaux, et les points D, J, S et X, J, B sont dans le même ordre.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(DX) \parallel (SB)$.

(c) Les points X, J, B sont alignés dans cet ordre, donc J est entre X et B : $XB = XJ + JB = 36 + 54 = 90$ cm.

(d) Les droites (DS) et (XB) sont sécantes en J, et les droites (DX) et (SB) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{JD}{JS} = \frac{JX}{JB} = \frac{DX}{SB}$, soit $\frac{28}{42} = \frac{36}{54} = \frac{30}{SB}$.
Donc $SB = \frac{42 \times 30}{28} = 45$ cm.

Ex. 14 ★★★ **Les deux saules de l'étang**

(a) Noé associe [CP] à [CS], alors que ces deux segments ne sont pas sur la même droite. Les points P et R sont sur la même droite issue de C : [CP] va avec [CR], [CQ] avec [CS] et [PQ] avec [RS]. Les droites (PR) et (QS) sont sécantes en C, et $(PQ) \parallel (RS)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{CP}{CR} = \frac{CQ}{CS} = \frac{PQ}{RS}$.

(b) D'après le théorème de Thalès : $\frac{CP}{CR} = \frac{PQ}{RS}$, soit $\frac{32}{12} = \frac{PQ}{9}$.
Donc $PQ = \frac{32 \times 9}{12} = 24$ m. Le rapport $\frac{32}{12}$ est plus grand que 1 : il est normal que PQ soit plus long que RS.

Ex. 14 **(suite)**

(c) Il n'y a pas de droites parallèles dans le triangle CRS, mais il est rectangle en R : on utilise la trigonométrie. On connaît le côté opposé [RS] et le côté adjacent [CR] à l'angle $\widehat{RCS}$, donc on utilise la tangente : $\tan\widehat{RCS} = \frac{RS}{CR} = \frac{9}{12} = 0{,}75$. Avec la touche $\tan^{-1}$, on obtient $\widehat{RCS} \approx 37°$.

(d) Les angles $\widehat{PCQ}$ et $\widehat{RCS}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux. Les droites (PQ) et (RS) sont parallèles et coupées par la sécante (PR). Les angles alternes-internes $\widehat{CPQ}$ et $\widehat{CRS}$ sont donc égaux, d'où $\widehat{CPQ} = 90°$. Le triangle CPQ est rectangle en P.

(e) Le triangle CPQ est rectangle en P. D'après le théorème de Pythagore : $CQ^2 = CP^2 + PQ^2 = 32^2 + 24^2 = 1\,024 + 576 = 1\,600$.
Donc $CQ = \sqrt{1\,600} = 40$ m.

3. *Réciproque : prouver un parallélisme*

Ex. 15 ★☆☆ **Parallèles ou pas ? Triangles emboîtés**

(a) D'une part, $\frac{AM}{AB} = \frac{2{,}4}{3{,}6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$; d'autre part, $\frac{AN}{AC} = \frac{3{,}4}{5{,}1} = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$. Les rapports sont égaux et les points A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

(b) On compare les produits en croix : $AM \times AC = 5 \times 10 = 50$ et $AB \times AN = 7 \times 7 = 49$. Ils sont différents, donc $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$: d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

(c) Non : des valeurs arrondies égales ne prouvent rien. Produits en croix : $AM \times AC = 3 \times 10 = 30$ et $AB \times AN = 7 \times 4{,}3 = 30{,}1$. Ils sont différents, donc $\frac{3}{7} \neq \frac{4{,}3}{10}$: d'après la contraposée du théorème de Thalès, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

(d) On calcule d'abord les longueurs à partir de A : $AB = AM + MB = 2{,}5 + 1{,}5 = 4$ cm et $AC = AN + NC = 3 + 1{,}8 = 4{,}8$ cm. D'une part, $\frac{AM}{AB} = \frac{2{,}5}{4} = \frac{5}{8}$; d'autre part, $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4{,}8} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$. Les rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Ex. 16 ★★☆ **Bien lire la configuration avant de conclure**

(a) E est entre R et U, et aussi entre S et T : c'est une configuration papillon. Les points R, E, U et S, E, T sont donc dans le même ordre.

(b) On compare $\frac{ER}{EU}$ et $\frac{ES}{ET}$: ce sont les deux rapports de longueurs qui partent de E, et on les calcule séparément.

(c) D'une part, $\frac{ER}{EU} = \frac{1{,}8}{4{,}5} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$; d'autre part, $\frac{ES}{ET} = \frac{2}{5}$. Les rapports sont égaux, mais $R \in [EU]$ alors que E est entre S et T : les points E, R, U et S, E, T ne sont pas dans le même ordre. La réciproque du théorème de Thalès ne s'applique pas : la parallèle à (UT) passant par R coupe (ST) sur $[ET]$, et non en S.
Donc (RS) et (UT) ne sont pas parallèles.

(d) Le rapport $\frac{RS}{UT}$ n'est égal aux autres que si on sait déjà que $(RS) \parallel (UT)$, et c'est justement ce qu'on veut démontrer. La réciproque n'utilise que deux rapports : $\frac{ER}{EU}$ et $\frac{ES}{ET}$.

Ex. 17 ★★☆ **Le vitrail : la bonne longueur pour des droites parallèles**

(a) Les points sont dans le même ordre (papillon). Pour que $(KP) \parallel (FG)$, il faut $\frac{OK}{OF} = \frac{OP}{OG}$, soit $\frac{3}{4{,}5} = \frac{2{,}4}{OG}$. Par produit en croix, $OG = \frac{2{,}4 \times 4{,}5}{3} = 3{,}6$ cm. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites sont alors parallèles.

(b) D'une part, $\frac{OK}{OF} = \frac{3}{4{,}5}$; d'autre part, $\frac{OP}{OG} = \frac{2{,}4}{3{,}7}$.
Produits en croix : $3 \times 3{,}7 = 11{,}1$ et $4{,}5 \times 2{,}4 = 10{,}8$.
Ils sont différents, donc les rapports ne sont pas égaux : d'après la contraposée du théorème de Thalès, (KP) et (FG) ne sont pas parallèles.

(c) Avec $OG = 3{,}6$ cm, on a $(KP) \parallel (FG)$ et le triangle OFG est un agrandissement du triangle OKP, de rapport $\frac{OF}{OK} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$
(on a aussi $\frac{3{,}6}{2{,}4} = 1{,}5$).

Ex. 18 ★★☆ **La traverse de l'abri de jardin**

(a) $T \in [SR]$, donc $SR = ST + TR = 1{,}2 + 0{,}8 = 2$ m.
$U \in [SV]$, donc $SV = SU + UV = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$ m.

(b) D'une part, $\frac{ST}{SR} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$; d'autre part, $\frac{SU}{SV} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$. Les rapports sont égaux et les points S, T, R et S, U, V sont dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(TU) \parallel (RV)$.

Ex. 18 (suite)

(c) Les droites (TR) et (UV) sont sécantes en S, et $(TU) \parallel (RV)$ (question b)). D'après le théorème de Thalès : $\frac{ST}{SR} = \frac{SU}{SV} = \frac{TU}{RV}$, soit $0{,}6 = \frac{TU}{3}$.
Donc $TU = 0{,}6 \times 3 = 1{,}8$ m.

(d) Les droites (TU) et (RV) sont parallèles et coupées par la sécante (SR) : les angles $\widehat{STU}$ et $\widehat{SRV}$ sont des angles correspondants, donc ils sont égaux. $\widehat{STU} = 56°$.

Ex. 19 ★★★ La passerelle de Bordeaux

(a) D'une part, $\frac{IL}{ID} = \frac{1{,}6}{2{,}4} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$; d'autre part, $\frac{IJ}{IH} = \frac{2}{3}$. Les rapports sont égaux et les points L, I, D et J, I, H sont dans le même ordre (configuration papillon), donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(LJ) \parallel (DH)$.

(b) Les droites (LJ) et (DH) sont parallèles et coupées par la sécante (LD). Les angles $\widehat{ILJ}$ et $\widehat{IDH}$ sont alternes-internes, donc ils sont égaux : $\widehat{IDH} = 90°$. Le triangle IDH est donc rectangle en D.

(c) Le triangle ILJ est rectangle en L. D'après le théorème de Pythagore, $IJ^2 = IL^2 + LJ^2$, soit $LJ^2 = 2^2 - 1{,}6^2 = 4 - 2{,}56 = 1{,}44$, donc $LJ = 1{,}2$ m. Les droites (LD) et (JH) sont sécantes en I, et $(LJ) \parallel (DH)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{IL}{ID} = \frac{IJ}{IH} = \frac{LJ}{DH}$, soit $\frac{2}{3} = \frac{1{,}2}{DH}$.
Donc $DH = \frac{1{,}2 \times 3}{2} = 1{,}8$ m.

(d) Le triangle ILJ est rectangle en L, et $[IL]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{LIJ}$: $\cos\widehat{LIJ} = \frac{IL}{IJ} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$. À la calculatrice (touche $\cos^{-1}$), $\widehat{LIJ} \approx 37°$.

(e) Le périmètre de ILJ vaut $1{,}6 + 1{,}2 + 2 = 4{,}8$ m. Le triangle IDH est un agrandissement de ILJ de rapport $\frac{ID}{IL} = \frac{3}{2} = 1{,}5$, donc son périmètre est $4{,}8 \times 1{,}5 = 7{,}2$ m. Vérification : $2{,}4 + 1{,}8 + 3 = 7{,}2$ m.

Ex. 20 ★★★ La latte de la voile

(a) $K \in [GD]$, donc $GD = GK + KD = 1{,}5 + 2{,}6 = 4{,}1$ m. $N \in [GF]$, donc $GF = GN + NF = 1{,}8 + 3{,}1 = 4{,}9$ m.

(b) L'égalité $\frac{GK}{GD} = \frac{KN}{DF}$ vient du théorème de Thalès, qui suppose que les droites sont déjà parallèles. Pour prouver le parallélisme, la réciproque n'utilise que les deux rapports $\frac{GK}{GD}$ et $\frac{GN}{GF}$.

(c) Première erreur : elle compare des valeurs arrondies, et des arrondis égaux ne prouvent pas que les rapports sont égaux. Deuxième erreur : pour prouver un parallélisme, on cite la réciproque du théorème de Thalès, et non le théorème lui-même.

Ex. 20 (suite)

(d) On compare $GK \times GF = 1{,}5 \times 4{,}9 = 7{,}35$ et $GD \times GN = 4{,}1 \times 1{,}8 = 7{,}38$. Les produits en croix sont différents, donc $\frac{GK}{GD} \neq \frac{GN}{GF}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (KN) et (DF) ne sont pas parallèles.

(e) K reste sur $[GD]$ et N sur $[GF]$, donc les points sont dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, il suffit que $\frac{GK}{GD} = \frac{GN}{GF}$, soit $\frac{GK}{4{,}1} = \frac{1{,}8}{4{,}9}$.
Donc $GK = \frac{4{,}1 \times 1{,}8}{4{,}9} = \frac{7{,}38}{4{,}9} \approx 1{,}51$ m.

Ex. 21 ★★★ Même rapport, mauvais ordre

(a) D'une part, $\frac{OP}{OQ} = \frac{2{,}4}{4{,}2} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$; d'autre part, $\frac{OR}{OS} = \frac{4}{7}$. Les rapports sont égaux, mais $P \in [OQ]$ alors que O est entre R et S : les points ne sont pas dans le même ordre. La réciproque du théorème de Thalès ne s'applique pas, donc Noé a tort. D'ailleurs la parallèle à (QS) passant par P coupe (RS) en un seul point, situé sur $[OS]$, et ce point n'est pas R.

(b) D'une part, $\frac{OP}{OQ} = \frac{4}{7}$; d'autre part, $\frac{OT}{OS} = \frac{4}{7}$. Les rapports sont égaux, et $P \in [OQ]$, $T \in [OS]$: les points O, P, Q et O, T, S sont dans le même ordre (triangles emboîtés). D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(PT) \parallel (QS)$.

(c) Le plus long côté est $[OS]$. D'une part, $OS^2 = 7^2 = 49$; d'autre part, $OQ^2 + QS^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 49$. On a $OS^2 = OQ^2 + QS^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OQS est rectangle en Q.

(d) Les droites (PQ) et (TS) sont sécantes en O, et $(PT) \parallel (QS)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OP}{OQ} = \frac{OT}{OS} = \frac{PT}{QS}$, soit $\frac{4}{7} = \frac{PT}{5{,}6}$.
Donc $PT = \frac{4 \times 5{,}6}{7} = 3{,}2$ cm.

(e) Le triangle OQS est rectangle en Q. Par rapport à l'angle $\widehat{QOS}$, $[QS]$ est le côté opposé et $[OQ]$ le côté adjacent : $\tan\widehat{QOS} = \frac{QS}{OQ} = \frac{5{,}6}{4{,}2} = \frac{4}{3}$. À la calculatrice (touche $\tan^{-1}$), $\widehat{QOS} \approx 53{,}1°$.

4. *Contraposée : prouver un non-parallélisme*

Ex. 22 ★☆☆ Automatismes : comparer deux rapports sans arrondir

(a) $\frac{3}{8} = 0{,}375$ et $\frac{4{,}5}{12} = 0{,}375$. Les deux rapports sont égaux.

(b) $7 \times 100 = 700$ et $9 \times 78 = 702$. Comme $700 \neq 702$, on a $\frac{7}{9} \neq \frac{78}{100}$: deux arrondis égaux ne prouvent pas que les rapports sont égaux.

Ex. 22 **(suite)**

(c) $\frac{13{,}5}{21} = \frac{27}{42} = \frac{9}{14}$ (on multiplie par 2, puis on divise par 3). Les deux rapports sont égaux.

(d) $6 \times 15 = 90$ et $13 \times 7 = 91$. Comme $90 \neq 91$, on a $\frac{6}{13} \neq \frac{7}{15}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : réciproque ou contraposée ?**

(a) D'une part, $\frac{ER}{EU} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25$; d'autre part, $\frac{ES}{ET} = \frac{3}{12} = 0{,}25$. Les rapports sont égaux et les points R, E, U et S, E, T sont dans le même ordre (configuration papillon). Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(RS) \parallel (UT)$.

(b) D'une part, $\frac{ER}{EU} = \frac{5}{8} = 0{,}625$; d'autre part, $\frac{ES}{ET} = \frac{6}{10} = 0{,}6$. Les rapports sont différents, donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (RS) et (UT) ne sont pas parallèles.

(c) $\frac{ER}{EU} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ et $\frac{ES}{ET} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$: les rapports sont égaux, donc la contraposée ne s'applique pas. Mais E est entre R et U alors que S appartient à [ET] : les points ne sont pas dans le même ordre, donc la réciproque ne s'applique pas non plus. Ces propriétés ne permettent pas de conclure que $(RS) \parallel (UT)$.

(d) Produits en croix : $ER \times ET = 5 \times 14 = 70$ et $EU \times ES = 12 \times 6 = 72$. Comme $70 \neq 72$, $\frac{ER}{EU} \neq \frac{ES}{ET}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (RS) et (UT) ne sont pas parallèles.

Ex. 24 ★★☆ **Le vitrail de Tom**

(a) Tom compare une valeur arrondie ($\frac{5}{7} \approx 0{,}71$) avec 0,71. Deux nombres qui ont le même arrondi ne sont pas forcément égaux, et « presque égaux » ne veut pas dire « égaux ». Il faut comparer les rapports en valeurs exactes.

(b) $JF \times JK = 5 \times 10 = 50$ et $JL \times JG = 7 \times 7{,}1 = 49{,}7$. Comme $50 \neq 49{,}7$, on a $\frac{JF}{JL} \neq \frac{JG}{JK}$.

(c) F appartient à [JL] et G appartient à [JK]. Les rapports $\frac{JF}{JL}$ et $\frac{JG}{JK}$ sont différents. Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès (et non d'après la réciproque), les droites (FG) et (LK) ne sont pas parallèles, même si elles en ont l'air.

Ex. 25 ★★☆ **L'étagère de Sacha**

(a) L'égalité $\frac{OD}{OY} = \frac{DB}{YX}$ n'est vraie que si l'on sait déjà que les droites sont parallèles (théorème de Thalès). Pour le prouver, on ne peut donc pas s'en servir : ce serait un raisonnement circulaire. Il faut comparer $\frac{OD}{OY}$ et $\frac{OB}{OX}$.

Ex. 25 **(suite)**

(b) Produits en croix : $OD \times OX = 3{,}6 \times 7 = 25{,}2$ et $OY \times OB = 6 \times 4 = 24$. Comme $25{,}2 \neq 24$, on a $\frac{OD}{OY} \neq \frac{OB}{OX}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (DB) et (YX) ne sont pas parallèles.

(c) Les points D, O, Y et B, O, X restent dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, il suffit que $\frac{OB}{OX} = \frac{OD}{OY} = \frac{3{,}6}{6} = 0{,}6$. Il faut donc $OX = \frac{4}{0{,}6} = \frac{20}{3}$ cm, soit OX ≈ 6,67 cm.

Ex. 26 ★★★ **La latte de la voile de Lina**

(a) U appartient à [PQ], donc PQ = PU + UQ = 1,8 + 2,7 = 4,5 m.

(b) Les points P, U, Q et P, V, R sont alignés dans le même ordre (triangles emboîtés). D'une part, $\frac{PU}{PQ} = \frac{1{,}8}{4{,}5} = 0{,}4$; d'autre part, $\frac{PV}{PR} = \frac{2{,}2}{5{,}6}$, qui ne tombe pas juste. On compare les produits en croix : $PU \times PR = 1{,}8 \times 5{,}6 = 10{,}08$ et $PQ \times PV = 4{,}5 \times 2{,}2 = 9{,}9$. Ils sont différents, donc $\frac{PU}{PQ} \neq \frac{PV}{PR}$. D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (UV) et (QR) ne sont pas parallèles, même si elles en ont l'air sur la figure.

(c) Il faut citer la contraposée du théorème de Thalès. La réciproque sert à prouver que deux droites sont parallèles, quand les rapports sont égaux et les points dans le même ordre. Ici, les rapports sont différents et on prouve que les droites ne sont PAS parallèles : c'est la contraposée.

(d) Il faut $\frac{PV}{PR} = \frac{PU}{PQ} = 0{,}4$, donc PV = 0,4 × 5,6 = 2,24 m. Avec ce point V sur [PR], les rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (UV) ∥ (QR). L'écart avec la position actuelle est 2,24 − 2,2 = 0,04 m, soit 4 cm : Lina doit éloigner V de P de 4 cm.

Ex. 27 ★★★ **Les croisillons du pont de Noé**

(a) L'égalité des trois rapports vient du théorème de Thalès, qui exige que les droites (KL) et (HG) soient parallèles. Or l'énoncé ne le dit pas : Noé utilise ce qu'il faudrait d'abord démontrer. Son calcul de HG n'est donc pas justifié.

(b) Les points K, E, H et L, E, G sont alignés dans le même ordre (configuration papillon). D'une part, $\frac{EH}{EK} = \frac{6}{2{,}4} = 2{,}5 = \frac{5}{2}$; d'autre part, $\frac{EG}{EL} = \frac{7{,}2}{2{,}8} = \frac{72}{28} = \frac{18}{7}$. Produits en croix : $EH \times EL = 6 \times 2{,}8 = 16{,}8$ et $EK \times EG = 2{,}4 \times 7{,}2 = 17{,}28$, qui sont différents. Donc $\frac{EH}{EK} \neq \frac{EG}{EL}$ et, d'après la contraposée du théorème de Thalès, (KL) et (HG) ne sont pas parallèles.

Ex. 27 (suite)

(c) D'une part, $\frac{EH}{EK} = 2{,}5$; d'autre part, $\frac{EG}{EL} = \frac{7}{2{,}8} = 2{,}5$. Les rapports sont égaux et les points K, E, H et L, E, G sont dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (KL) ∥ (HG). Les droites (KH) et (LG) sont sécantes en E et (KL) ∥ (HG) : d'après le théorème de Thalès, $\frac{EH}{EK} = \frac{EG}{EL} = \frac{HG}{KL}$, soit $\frac{HG}{3} = 2{,}5$. Donc HG $= 3 \times 2{,}5 = 7{,}5$ cm.

(d) Les rapports sont égaux ($\frac{EG'}{EL} = \frac{7}{2{,}8} = 2{,}5 = \frac{EH}{EK}$), mais les points ne sont pas dans le même ordre : E est entre K et H, alors que L est entre E et G'. La réciproque ne s'applique pas. En fait, la parallèle à (KL) passant par H coupe la droite (EL) en un seul point, G, et G' est différent de G.
Donc (KL) et (HG') ne sont pas parallèles.

Ex. 28 ★★★ **La barre du toboggan de Mia**

(a) Le triangle STU est rectangle en T, d'hypoténuse [SU]. D'après le théorème de Pythagore, $SU^2 = ST^2 + TU^2 = 1{,}8^2 + 2{,}4^2 = 3{,}24 + 5{,}76 = 9$, donc $SU = \sqrt{9} = 3$ m.

(b) Non. Des valeurs approchées égales ne prouvent rien : $\frac{SR}{ST} = \frac{1{,}2}{1{,}8} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ et $\frac{SW}{SU} = \frac{2{,}01}{3} = 0{,}67$. On compare en valeurs exactes avec les produits en croix : $SR \times SU = 1{,}2 \times 3 = 3{,}6$ et $ST \times SW = 1{,}8 \times 2{,}01 = 3{,}618$. Ils sont différents, donc $\frac{SR}{ST} \neq \frac{SW}{SU}$: d'après la contraposée du théorème de Thalès, (RW) et (TU) ne sont pas parallèles.

(c) Il faut $\frac{SW}{SU} = \frac{SR}{ST} = \frac{2}{3}$, donc $SW = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ m. Avec SW $= 2$ m, les rapports sont égaux et les points S, R, T et S, W, U sont dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (RW) ∥ (TU). Il faut fixer W à 2 m de S.

(d) Les droites (RT) et (WU) sont sécantes en S et (RW) ∥ (TU). D'après le théorème de Thalès, $\frac{SR}{ST} = \frac{SW}{SU} = \frac{RW}{TU}$, soit $\frac{RW}{2{,}4} = \frac{2}{3}$.
Donc $RW = \frac{2}{3} \times 2{,}4 = 1{,}6$ m.

(e) Le triangle STU est rectangle en T. Pour l'angle $\widehat{SUT}$, [ST] est le côté opposé et [TU] le côté adjacent : $\tan \widehat{SUT} = \frac{ST}{TU} = \frac{1{,}8}{2{,}4} = 0{,}75$. Avec la touche $\tan^{-1}$ de la calculatrice, $\widehat{SUT} \approx 37°$.

5. *Longueurs inaccessibles*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : le bâton et le chêne**

(a) Les rayons du soleil sont parallèles. Le rayon qui passe par Q et celui qui passe par B arrivent au même point S : ils sont donc confondus, et S, Q, B sont alignés. Le bâton $[PQ]$ et le chêne $[AB]$ sont verticaux : les droites (PQ) et (AB) sont perpendiculaires à la même droite (SA), le sol. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(PQ) \parallel (AB)$.

(b) P appartient à $[SA]$, donc $SA = SP + PA = 1{,}8 + 4{,}5 = 6{,}3$ m.

(c) Les droites (PA) et (QB) sont sécantes en S, et $(PQ) \parallel (AB)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SP}{SA} = \frac{SQ}{SB} = \frac{PQ}{AB}$.

(d) $\frac{1{,}8}{6{,}3} = \frac{1{,}2}{AB}$, donc $AB = \frac{6{,}3 \times 1{,}2}{1{,}8} = 4{,}2$ m. Le chêne mesure 4,2 m de haut.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : repérer la situation**

(a) O, A, P sont alignés dans cet ordre sur le sol, ainsi que O, T, L sur le rayon de lumière. La plante et le mur sont perpendiculaires au sol, donc $(AT) \parallel (PL)$. Le point commun est O : ce sont deux triangles emboîtés, OAT et OPL.

(b) E est entre R et U, et entre S et V : c'est une configuration papillon de point commun E. D'après le théorème de Thalès : $\frac{ER}{EU} = \frac{ES}{EV} = \frac{RS}{UV}$.

(c) La figure n'a pas deux droites parallèles, donc le théorème de Thalès ne s'applique pas. Le mur est vertical : le triangle ABC est rectangle en B, on utilise le théorème de Pythagore.

(d) Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, soit $3{,}7^2 = 1{,}2^2 + BC^2$, donc $BC^2 = 13{,}69 - 1{,}44 = 12{,}25$ et $BC = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ m. L'échelle atteint 3,5 m de haut.

Ex. 31 ★★☆ **La règle de Zoé et la falaise**

(a) O, R, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que O, G, H (ligne de visée). La règle et la falaise sont perpendiculaires à la même droite (OB), donc $(RG) \parallel (BH)$.

(b) Je convertis en mètres : $OR = 0{,}45$ m et $RG = 0{,}08$ m. Les droites (RB) et (GH) sont sécantes en O, et $(RG) \parallel (BH)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OR}{OB} = \frac{OG}{OH} = \frac{RG}{BH}$, soit $\frac{0{,}45}{150} = \frac{0{,}08}{BH}$, donc $BH = \frac{150 \times 0{,}08}{0{,}45} \approx 26{,}7$ m. La falaise mesure environ 26,7 m de haut.

Ex. 31 (suite)

(c) Avec la même égalité : $\frac{OR}{150} = \frac{0{,}08}{30}$, donc $OR = \frac{150 \times 0{,}08}{30} = 0{,}4$ m. Zoé doit tenir la règle à 40 cm de son œil, ce qui est possible à bout de bras.

Ex. 32 ★★☆ **La largeur de la rivière**

(a) Les droites (AT) et (QP) sont perpendiculaires à la même droite (AQ), donc elles sont parallèles. E est entre A et Q, et entre T et P : c'est une configuration papillon de point commun E.

(b) Les droites (AQ) et (TP) sont sécantes en E, et $(AT) \parallel (QP)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{EQ}{EA} = \frac{EP}{ET} = \frac{QP}{AT}$, soit $\frac{8}{36} = \frac{5{,}5}{AT}$, donc $AT = \frac{36 \times 5{,}5}{8} = 24{,}75$ m. La rivière mesure 24,75 m de large.

(c) On appelle P' le point d'arrêt. On a encore $(AT) \parallel (Q'P')$, donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{EQ'}{EA} = \frac{Q'P'}{AT}$, soit $\frac{12}{36} = \frac{Q'P'}{24{,}75}$, donc $Q'P' = \frac{24{,}75 \times 12}{36} = 8{,}25$ m. Malo doit s'arrêter à 8,25 m de Q'.

Ex. 33 ★★★ **Le lampadaire et l'ombre de Lina**

(a) Sur le schéma, on voit le sol (OP), Lina $[TS]$ et le lampadaire $[PL]$, tous les deux verticaux, et le rayon de lumière (OL) qui passe par S. Les points O, T, P sont alignés dans cet ordre : l'ombre $[OT]$, puis Lina, puis le lampadaire. Les droites (TS) et (PL) sont toutes les deux perpendiculaires au sol (OP). Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(TS) \parallel (PL)$.

(b) Je convertis : $TS = 160$ cm $= 1{,}6$ m. Ensuite, $OP = OT + TP = 2{,}4 + 3{,}6 = 6$ m. Les droites (TP) et (SL) sont sécantes en O, et $(TS) \parallel (PL)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OT}{OP} = \frac{OS}{OL} = \frac{TS}{PL}$, soit $\frac{2{,}4}{6} = \frac{1{,}6}{PL}$, donc $PL = \frac{6 \times 1{,}6}{2{,}4} = 4$ m. Le lampadaire mesure 4 m de haut.

(c) Le lampadaire est perpendiculaire au sol, donc le triangle OPL est rectangle en P, et son hypoténuse est $[OL]$. D'après le théorème de Pythagore : $OL^2 = OP^2 + PL^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$, donc $OL = \sqrt{52} \approx 7{,}2$ m. Il y a environ 7,2 m entre le bout de l'ombre et la lampe.

(d) On appelle O' le nouveau bout de l'ombre, T' les nouveaux pieds de Lina et S' le haut de sa tête, avec $O'T' = 1$ m et $T'S' = 1{,}6$ m. Comme à la question 2, d'après le théorème de Thalès : $\frac{O'T'}{O'P} = \frac{T'S'}{PL}$, soit $\frac{1}{O'P} = \frac{1{,}6}{4}$, donc $O'P = \frac{4 \times 1}{1{,}6} = 2{,}5$ m. Attention, ce n'est pas encore la réponse : $T'P = O'P - O'T' = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$ m. Lina doit se placer à 1,5 m du pied du lampadaire.

Ex. 34 ★★★ **Le pont au-dessus du ravin**

(a) D'une part, $\frac{EU}{EC} = \frac{7{,}5}{30} = 0{,}25$; d'autre part, $\frac{ER}{ED} = \frac{9}{36} = 0{,}25$. Les rapports sont égaux, et les points C, E, U et D, E, R sont alignés dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(UR) \parallel (CD)$.

(b) Les droites (CU) et (DR) sont sécantes en E, et $(UR) \parallel (CD)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{EU}{EC} = \frac{ER}{ED} = \frac{UR}{CD}$, soit $\frac{7{,}5}{30} = \frac{6}{CD}$, donc $CD = \frac{30 \times 6}{7{,}5} = 24$ m. Le pont mesurera 24 m (c'est plausible : le grand triangle est un agrandissement de rapport 4 du petit).

(c) Non. On compare les valeurs exactes avec les produits en croix : $3{,}7 \times 9 = 33{,}3$ et $7{,}5 \times 4{,}5 = 33{,}75$. Ils sont différents, donc $\frac{EV}{EU} \neq \frac{ES}{ER}$. Si (VS) et (UR) étaient parallèles, ces rapports seraient égaux d'après le théorème de Thalès. Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, (VS) et (UR) ne sont pas parallèles. Inès a conclu à partir d'un arrondi, ce qui ne prouve rien.

(d) Il faut $\frac{EV}{EU} = \frac{ES}{ER}$, soit $\frac{EV}{7{,}5} = \frac{4{,}5}{9}$, donc $EV = \frac{7{,}5 \times 4{,}5}{9} = 3{,}75$ m. Les points E, V, U et E, S, R seraient alors dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites seraient parallèles avec $EV = 3{,}75$ m.

Ex. 35 ★★★ **Le piquet et le phare**

(a) Le piquet (PK) et le phare (FS) sont tous les deux perpendiculaires au sol. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(PK) \parallel (FS)$. Comme $H \in (PK)$ et $J \in (FS)$, on a $(HK) \parallel (JS)$. Je convertis : $PH = 150$ cm $= 1{,}5$ m, donc $HK = PK - PH = 2{,}30 - 1{,}50 = 0{,}8$ m. Ensuite, $OJ = OH + HJ = 2 + 48 = 50$ m.

(b) Les droites (HJ) et (KS) sont sécantes en O, avec $H \in [OJ]$ et $K \in [OS]$ (triangles emboîtés), et $(HK) \parallel (JS)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OH}{OJ} = \frac{OK}{OS} = \frac{HK}{JS}$, soit $\frac{2}{50} = \frac{0{,}8}{JS}$, donc $JS = \frac{50 \times 0{,}8}{2} = 20$ m. On ajoute la hauteur de l'œil : $FS = FJ + JS = 1{,}5 + 20 = 21{,}5$ m. Le phare mesure 21,5 m de haut.

Ex. 35 (suite)

(c) Lou a utilisé HJ au lieu de OJ : dans le théorème de Thalès, chaque rapport compare un côté du petit triangle OHK au côté correspondant du grand triangle OJS, les deux mesurés à partir du point commun O. Il faut donc écrire $\frac{OH}{OJ} = \frac{HK}{JS}$ avec $OJ = 50$ m. Lou a calculé $\frac{0{,}8\times 48}{2} = 19{,}2$ m, ce qui est faux. En plus, JS n'est pas la hauteur du phare : il faut encore ajouter 1,5 m.

(d) (OH) est horizontale et (HK) est verticale, donc le triangle OHK est rectangle en H. Je connais le côté opposé HK et le côté adjacent OH à l'angle $\widehat{KOH}$, donc j'utilise la tangente : $\tan\widehat{KOH} = \frac{HK}{OH} = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$. Avec la touche $\tan^{-1}$, $\widehat{KOH} \approx 21{,}8°$. Yanis vise le haut du phare avec un angle d'environ 21,8° au-dessus de l'horizontale.

6. *Choisir entre Pythagore, Thalès et la trigonométrie*

Ex. 36 ★☆☆ **Lire la figure et nommer l'outil**

(a) Le triangle RST est rectangle en S (angle droit codé) et on connaît deux côtés pour chercher le troisième : on utilise le théorème de Pythagore.

(b) Le triangle KLM est rectangle en L et un angle aigu est en jeu : on utilise la trigonométrie. Par rapport à $\widehat{LKM}$, [LM] est le côté opposé et [KL] le côté adjacent : c'est la tangente.

(c) Les droites (DG) et (EF) sont sécantes en O et $(DE) \parallel (FG)$ (configuration papillon) : on utilise le théorème de Thalès.

(d) On connaît les trois côtés et aucun angle droit n'est donné : on utilise la réciproque du théorème de Pythagore
(ou sa contraposée si l'égalité est fausse).

(e) On a des longueurs sur deux droites sécantes et on se demande si deux droites sont parallèles : on utilise la réciproque du théorème de Thalès
(ou sa contraposée si les rapports sont différents).

(f) On utilise la somme des angles d'un triangle : le troisième angle mesure $180° - 41° - 49° = 90°$, donc le triangle NIJ est rectangle.

Ex. 37 ★☆☆ **Trigonométrie : nommer les côtés et régler la calculatrice**

(a) L'hypoténuse est [EG], le côté opposé à l'angle droit. Par rapport à $\widehat{FEG}$, le côté adjacent est [EF] et le côté opposé est [FG].

(b) Par rapport à $\widehat{FGE}$, le côté adjacent est [FG] : [EF] devient le côté opposé. Les côtés se nomment toujours par rapport à l'angle choisi.

(c) Dans le triangle EFG rectangle en F : $\cos\widehat{FEG} = \frac{EF}{EG} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

(d) $\widehat{FEG} = \cos^{-1}(0{,}625)$, donc $\widehat{FEG} \approx 51°$.

(e) Sa calculatrice est en mode radians. Il doit la mettre en mode degrés pour obtenir environ 51°.

(f) Par rapport à $\widehat{FGE}$, [EF] est le côté opposé et [EG] l'hypoténuse : $\sin\widehat{FGE} = \frac{EF}{EG} = \frac{5}{8} = 0{,}625$. C'est la même valeur que $\cos\widehat{FEG}$: le côté adjacent à $\widehat{FEG}$ est le côté opposé à $\widehat{FGE}$.

Ex. 38 ★★☆ **L'étagère d'Inès**

(a) [TV] est le plus grand côté. D'une part $TV^2 = 54^2 = 2\,916$; d'autre part $ST^2 + SV^2 = 28^2 + 45^2 = 784 + 2\,025 = 2\,809$. Comme $TV^2 \neq ST^2 + SV^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle STV n'est pas rectangle : l'angle en S a l'air droit, mais ne l'est pas.

(b) [TV] est le plus grand côté. D'une part $TV^2 = 53^2 = 2\,809$; d'autre part $ST^2 + SV^2 = 2\,809$. Comme $TV^2 = ST^2 + SV^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle STV est rectangle en S.

(c) Dans le triangle STV rectangle en S, par rapport à $\widehat{STV}$: [SV] est le côté opposé et [ST] le côté adjacent.
$\tan\widehat{STV} = \frac{SV}{ST} = \frac{45}{28}$, donc $\widehat{STV} = \tan^{-1}\left(\frac{45}{28}\right) \approx 58°$.

Ex. 39 ★★☆ **Le raisonnement de Tom**

(a) Non : le théorème de Thalès exige que (RS) et (UT) soient parallèles, et l'énoncé ne le dit pas. Il faut d'abord le démontrer avec la réciproque.

(b) D'une part $\frac{ER}{EU} = \frac{2{,}4}{4} = 0{,}6$; d'autre part $\frac{ES}{ET} = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6$. Les rapports sont égaux et les points R, E, U et S, E, T sont dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(RS) \parallel (UT)$.

(c) Les droites (RU) et (ST) sont sécantes en E, et les droites (RS) et (UT) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{ER}{EU} = \frac{ES}{ET} = \frac{RS}{UT}$, soit $0{,}6 = \frac{RS}{3{,}5}$. Donc $RS = 0{,}6 \times 3{,}5 = 2{,}1$ cm.

Ex. 40 ★★★ **Le vitrail de la chapelle**

(a) Le triangle OKL est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore : $OL^2 = OK^2 + KL^2 = 6{,}4^2 + 4{,}8^2 = 40{,}96 + 23{,}04 = 64$.
Donc $OL = \sqrt{64} = 8$ cm.

(b) D'une part, $\frac{OP}{OK} = \frac{4}{6{,}4} = 0{,}625$; d'autre part, $\frac{OR}{OL} = \frac{5}{8} = 0{,}625$. Les rapports sont égaux et les points K, O, P et L, O, R sont alignés dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(KL) \parallel (PR)$.

(c) Les droites (KP) et (LR) sont sécantes en O, et les droites (KL) et (PR) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{OP}{OK} = \frac{OR}{OL} = \frac{PR}{KL}$, soit $\frac{4}{6{,}4} = \frac{5}{8} = \frac{PR}{4{,}8}$.
Donc $PR = \frac{4{,}8 \times 4}{6{,}4} = 3$ cm.

(d) La droite (KL) est perpendiculaire à (KP) (angle droit en K) et la droite (PR) est parallèle à (KL). Or, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Donc $(PR) \perp (KP)$ et le triangle OPR est rectangle en P. Par rapport à l'angle $\widehat{POR}$, [OP] est le côté adjacent et [OR] l'hypoténuse : $\cos\widehat{POR} = \frac{OP}{OR} = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Avec la touche $\cos^{-1}$: $\widehat{POR} \approx 37°$.

(e) Périmètre de OKL : $6{,}4 + 4{,}8 + 8 = 19{,}2$ cm. Périmètre de OPR : $4 + 3 + 5 = 12$ cm. Le triangle OPR est une réduction du triangle OKL de rapport $\frac{OP}{OK} = 0{,}625$, et $19{,}2 \times 0{,}625 = 12$ cm : on retrouve bien le périmètre de OPR.

Ex. 41 ★★★ **Le toboggan de la base de loisirs**

(a) Dans le triangle GEH, [GH] est le plus grand côté.
D'une part, $GH^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$; d'autre part, $GE^2 + EH^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 36 + 6{,}25 = 42{,}25$.
Donc $GH^2 = GE^2 + EH^2$ et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle GEH est rectangle en E.

(b) Les points G, U, E et G, S, H sont alignés, et les droites (SU) et (EH) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{GS}{GH} = \frac{GU}{GE} = \frac{SU}{EH}$, soit $\frac{2{,}6}{6{,}5} = \frac{GU}{6} = \frac{SU}{2{,}5}$.
Donc $GU = \frac{6 \times 2{,}6}{6{,}5} = 2{,}4$ m et $SU = \frac{2{,}5 \times 2{,}6}{6{,}5} = 1$ m.

(c) U est sur [GE], donc $UE = GE - GU = 6 - 2{,}4 = 3{,}6$ m. Le triangle UEH est rectangle en E (question 1). D'après le théorème de Pythagore : $UH^2 = UE^2 + EH^2 = 3{,}6^2 + 2{,}5^2 = 12{,}96 + 6{,}25 = 19{,}21$.
Donc $UH = \sqrt{19{,}21} \approx 4{,}38$ m.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Lucas a inversé les côtés. Par rapport à l'angle $\widehat{EGH}$, [EH] est le côté opposé et [GE] le côté adjacent. Son calcul donne en fait l'angle $\widehat{GHE}$. Dans le triangle GEH rectangle en E : $\tan\widehat{EGH} = \frac{EH}{GE} = \frac{2{,}5}{6}$. Avec la touche $\tan^{-1}$: $\widehat{EGH} \approx 23°$.

Ex. 42 ★★★ **La rivière de Sarah**

(a) Les droites (AB) et (MN) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (TM). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(AB) \parallel (MN)$.

(b) La figure n'est pas à l'échelle : une longueur mesurée dessus ne correspond à rien de réel. Même sur une figure à l'échelle, une mesure reste imprécise et ne prouve rien : on doit calculer TA avec un théorème.

(c) Les droites (AM) et (BN) sont sécantes en T, et les droites (AB) et (MN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{TA}{TM} = \frac{TB}{TN} = \frac{AB}{MN}$. A est sur [TM], donc $TM = TA + 6$. On obtient $\frac{TA}{TA+6} = \frac{12}{15}$. Par produits en croix : $15 \times TA = 12 \times (TA + 6)$, soit $15\,TA = 12\,TA + 72$, d'où $3\,TA = 72$.
Donc $TA = 24$ m.

(d) Le triangle TAB est rectangle en A, car $(AB) \perp (TM)$. D'après le théorème de Pythagore : $TB^2 = TA^2 + AB^2 = 24^2 + 12^2 = 576 + 144 = 720$.
Donc $TB = \sqrt{720} \approx 26{,}8$ m. Il faut au moins 26,8 m de corde.

(e) Dans le triangle TAB rectangle en A, par rapport à l'angle $\widehat{ATB}$, [AB] est le côté opposé et [TA] le côté adjacent : $\tan\widehat{ATB} = \frac{AB}{TA} = \frac{12}{24} = 0{,}5$. Avec la touche $\tan^{-1}$ (calculatrice en mode degrés) : $\widehat{ATB} \approx 27°$.

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : une étape, un outil**

(a) Le triangle KLP est rectangle en L. D'après le théorème de Pythagore : $KP^2 = KL^2 + LP^2 = 49 + 576 = 625$, donc $KP = \sqrt{625} = 25$ cm.

(b) Le plus grand côté est $[EG]$. D'une part $EG^2 = 289$; d'autre part $EF^2 + FG^2 = 64 + 196 = 260$. Comme $EG^2 \neq EF^2 + FG^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle EFG n'est pas rectangle.

Ex. 43 **(suite)**

(c) Oui. Propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles. $(d) \perp (HJ)$ et $(d') \perp (HJ)$, donc $(d) \parallel (d')$.

(d) Les points R, S, V sont alignés, les points R, T, W aussi, et $(ST) \parallel (VW)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{RS}{RV} = \frac{RT}{RW} = \frac{ST}{VW}$. Je convertis : $RV = 240$ cm et $VW = 180$ cm.
Donc $\frac{60}{240} = \frac{ST}{180}$ et $ST = \frac{60 \times 180}{240} = 45$ cm.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur la rédaction**

(a) Vrai, mais il faut d'abord prouver l'angle droit. $DS^2 = 169$ et $DO^2 + OS^2 = 25 + 144 = 169$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, DOS est rectangle en O. Pour l'angle $\widehat{ODS}$, $[OS]$ est le côté opposé et $[DO]$ le côté adjacent : $\tan \widehat{ODS} = \frac{OS}{DO}$.

(b) Faux. JKL est rectangle en J. D'après le théorème de Pythagore : $KL^2 = 9 + 25 = 34$, donc $KL = \sqrt{34}$ cm (valeur exacte). Alors $K'L' = 15 \times \sqrt{34} \approx 87{,}5$ cm. Lina a arrondi trop tôt : $15 \times 5{,}8 = 87$ cm, ce qui est faux au millimètre.

(c) Faux. On ne sait pas si les droites (CB) et (YQ) sont parallèles. Sans parallèles, on ne peut pas appliquer le théorème de Thalès.

(d) Vrai. Dans une réduction de rapport 0,4, les longueurs sont multipliées par 0,4, donc le périmètre aussi : $0{,}4 \times 27{,}5 = 11$ cm.

Ex. 45 ★★☆ **Le renfort d'une étagère**

(a) Le triangle FGH est rectangle en G. D'après le théorème de Pythagore : $FH^2 = GF^2 + GH^2 = 1\,600 + 400 = 2\,000$, donc $FH = \sqrt{2\,000}$ cm (valeur exacte gardée).

(b) $(PQ) \perp (GF)$ et $(GH) \perp (GF)$, car le triangle est rectangle en G. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.
Donc $(PQ) \parallel (GH)$.

(c) $P \in [GF]$, donc $FP = GF - PG = 40 - 15 = 25$ cm. Les points F, P, G sont alignés, F, Q, H aussi, et $(PQ) \parallel (GH)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{FP}{FG} = \frac{FQ}{FH} = \frac{PQ}{GH}$, soit $\frac{25}{40} = \frac{FQ}{\sqrt{2\,000}} = \frac{PQ}{20}$.
Donc $PQ = \frac{25 \times 20}{40} = 12{,}5$ cm et $FQ = \frac{25 \times \sqrt{2\,000}}{40} \approx 27{,}95$ cm, soit environ 28,0 cm au millimètre.

Ex. 45 **(suite)**

(d) $\mathcal{P} = FP + PQ + FQ = 25 + 12{,}5 + \frac{25 \times \sqrt{2\,000}}{40} \approx 65{,}5$ cm. Attention : avec FH arrondi à 44,7 cm, on trouverait 65,4 cm, ce qui est faux.

Ex. 46 ★★☆ **La rampe de la remorque est-elle conforme ?**

(a) Je convertis tout en cm : $AB = 198$ cm, $BC = 40$ cm, $AC = 202$ cm. D'une part $AC^2 = 40\,804$; d'autre part $AB^2 + BC^2 = 39\,204 + 1\,600 = 40\,804$. Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

(b) Le triangle ABC est rectangle en B (question précédente). Pour l'angle $\widehat{BAC}$, $[BC]$ est le côté opposé et $[AB]$ le côté adjacent : $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{40}{198}$. Avec la touche $\tan^{-1}$, on trouve $\widehat{BAC} \approx 11{,}4°$.

(c) $\widehat{BAC} \approx 11{,}4°$ et $11{,}4° \leqslant 12°$. La rampe est donc conforme à la notice.

(d) Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, il suffit que $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$. Or $\frac{AM}{AB} = \frac{99}{198} = 0{,}5$ (en cm).
Donc $AN = 0{,}5 \times 202 = 101$ cm, soit 1,01 m. Alors $(MN) \parallel (BC)$: le pied est vertical.

Ex. 47 ★★★ **La guirlande au-dessus du canal**

(a) Les droites (RS) et (UT) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (RU). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles.
Donc $(RS) \parallel (UT)$.

(b) Le triangle ERS est rectangle en R, car $(RS) \perp (RU)$. D'après le théorème de Pythagore : $ES^2 = ER^2 + RS^2 = 144 + 81 = 225$, donc $ES = \sqrt{225} = 15$ m.

(c) Les droites (RU) et (ST) sont sécantes en E, et $(RS) \parallel (UT)$ (question 1). C'est une configuration papillon. D'après le théorème de Thalès : $\frac{EU}{ER} = \frac{ET}{ES} = \frac{UT}{RS}$, soit $\frac{20}{12} = \frac{ET}{15} = \frac{UT}{9}$.
Donc $ET = \frac{20 \times 15}{12} = 25$ m et $UT = \frac{20 \times 9}{12} = 15$ m. Le rapport $\frac{20}{12}$ est plus grand que 1 : le triangle EUT est un agrandissement du triangle ERS.

(d) Les points S, E, T sont alignés dans cet ordre, donc $ST = SE + ET = 15 + 25 = 40$ m. Avec les attaches : $40 + 2 \times 1{,}5 = 43$ m, soit 4 300 cm. Or $4\,250 < 4\,300$: la guirlande n'est pas assez longue. Il manque 50 cm.

Ex. 48 ★★★ **Le vitrail de la chapelle**

(a) Le point C est sur le cercle de diamètre $[AB]$, et il est distinct de A et de B. Or, si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors il est rectangle et ce diamètre est son hypoténuse.
Donc le triangle ABC est rectangle en C.

(b) Le triangle ABC est rectangle en C (question 1) et son hypoténuse est $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, donc $BC^2 = 2\,500 - 900 = 1\,600$ et $BC = \sqrt{1\,600} = 40$ cm.

(c) On déduit d'abord AN : $N \in [AB]$, donc $AN = AB - NB = 50 - 30 = 20$ cm. D'une part, $\frac{AM}{AC} = \frac{12}{30} = 0{,}4$. D'autre part, $\frac{AN}{AB} = \frac{20}{50} = 0{,}4$. Les rapports sont égaux et les points A, M, C et A, N, B sont dans le même ordre. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

(d) Les droites (MC) et (NB) sont sécantes en A, et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $0{,}4 = \frac{MN}{40}$.
Donc $MN = 0{,}4 \times 40 = 16$ cm. Comme $(MN) \parallel (BC)$, les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. Or $\widehat{ACB} = 90°$, donc le triangle AMN est rectangle en M.

(e) Aire de ABC : $\frac{AC \times BC}{2} = \frac{30 \times 40}{2} = 600$ cm². Aire de AMN : $\frac{AM \times MN}{2} = \frac{12 \times 16}{2} = 96$ cm². Aire de $MNBC$: $600 - 96 = 504$ cm². Comme 1 dm² = 100 cm², l'aire du verre bleu est 5,04 dm².

Ex. 49 ★★★ **Le pylône du téléphérique**

(a) On convertit : $AC = 1{,}2$ km $= 1\,200$ m. Le triangle ABC est rectangle en B, et $[BC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.
Donc $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{400}{1\,200} = \frac{1}{3}$ (valeur exacte).
Avec la touche $\sin^{-1}$: $\widehat{BAC} \approx 19°$.

(b) Le triangle ABC est rectangle en B, et son hypoténuse est $[AC]$. D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 1\,440\,000 - 160\,000 = 1\,280\,000$.
Donc $AB = \sqrt{1\,280\,000}$ m (valeur exacte), soit $AB \approx 1\,131{,}4$ m.

(c) Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A, et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{AN}{AC} = \frac{150}{1\,200} = \frac{1}{8}$.
Donc $MN = \frac{400}{8} = 50$ m. Avec la valeur exacte de AB : $AM = \frac{\sqrt{1\,280\,000}}{8} \approx 141{,}4$ m.

Ex. 49 **(suite)**

(d) Sa méthode est juste : le triangle AMN est rectangle en M et $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Son erreur est de réutiliser l'angle arrondi 19°. Il faut garder la valeur exacte $\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{3}$ (question 1). Alors $MN = AN \times \sin \widehat{BAC} = 150 \times \frac{1}{3} = 50$ m. C'est bien le résultat de la question 3.
L'arrondi de l'angle a fait perdre environ 1,2 m.