2nde / Tableaux de signes

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Signe de $ax + b$

À retenir : $ax + b$ s'annule en $-\frac{b}{a}$: signe de a à droite, signe contraire à gauche. $9 - 3x$: $a = -3$, s'annule en 3, positif à gauche. Diviser par un négatif change le sens. Si $a = 0$: signe de b partout.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : la valeur qui annule** — Donne la valeur de x qui annule chaque expression.

(a) $5x - 20$ (b) $-4x + 10$ (c) $7 - 2x$

(d) $\frac{x}{3} + 2$ (e) $10x + 4$ (f) $-x - 5$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : tableaux de signes à compléter** — Complète chaque tableau de signes en remplaçant les « ? ».

(a) Signe de $3x - 12$:

x	-∞	?	+∞
3x − 12	?	0	?

(b) Signe de $-6x - 18$:

x	-∞	?	+∞
−6x − 18	?	0	?

(c) Signe de $8 - 4x$:

x	-∞	?	+∞
8 − 4x	?	0	?

(d) Signe de $2x + 7$:

x	-∞	?	+∞
2x + 7	?	0	?

(e) Signe de $1 + 5x$:

x	-∞	?	+∞
1 + 5x	?	0	?

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs de Malik** — Malik étudie $-5x + 10$. Il écrit : « elle s'annule en $\frac{10}{-5} = -2$ », puis dresse ce tableau :

x	-∞	-2	+∞
−5x + 10	−	0	+

Enfin, pour résoudre $-5x + 10 > 0$, il écrit $-5x > -10$, puis divise les deux membres par -5 en gardant le sens $>$.

(a) Malik a-t-il raison sur la valeur qui annule $-5x + 10$? Justifie et explique son erreur.

Ex. 3 (suite)

(b) Ses signes sont-ils corrects ? Dresse le bon tableau de signes de $-5x + 10$.

(c) Corrige sa résolution de $-5x + 10 > 0$ et donne l'ensemble des solutions.

(d) Contrôle ton résultat avec $x = 0$ puis avec $x = 3$.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur les expressions affines** — Vrai ou faux ? Justifie par un calcul ou un contre-exemple.

(a) « Une expression $ax + b$ est positive dès que x est positif. »

(b) « La fonction $f : x \mapsto 4 - \frac{x}{2}$ est décroissante, donc $f(x) > 0$ pour $x < 8$. »

(c) « L'expression $3(x - 1) - 3x + 7$ est strictement positive pour tout réel x. »

(d) « $\frac{2}{3}x + 4$ s'annule en $x = -\frac{8}{3}$. »

Ex. 5 ★★★ **Deux tarifs de location de vélo** — Inès loue un vélo électrique pendant x heures ($x \geqslant 0$). Tarif A : 15 € de forfait plus 2{,}5 € par heure, soit $A(x) = 2{,}5x + 15$. Tarif B : 4 € par heure, sans forfait, soit $B(x) = 4x$. On pose $D(x) = A(x) - B(x)$.

(a) Écris $D(x)$ sous forme réduite, puis donne le coefficient de x dans $D(x)$.

(b) Résous $D(x) = 0$, puis dresse le tableau de signes de $D(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Inès veut que le tarif A coûte au plus 3 € de plus que le tarif B. Sofiane résout $D(x) \leqslant 3$ et trouve $x \leqslant 8$. A-t-il raison ? Justifie et corrige.

(d) Selon la durée $x \geqslant 0$, quel tarif Inès doit-elle choisir ? Justifie à l'aide du tableau de signes.

Ex. 6 ★★★ **Une fonction affine donnée par un tableau de valeurs** — Une fonction affine g est définie sur $\mathbb{R}$. On connaît quelques-unes de ses valeurs :

x	-1	2	6
g(x)	13	7	−1

(a) Calcule le coefficient de x de g, puis écris $g(x)$ sous la forme $ax + b$.

(b) Donne le sens de variation de g et la valeur de x qui annule $g(x)$.

(c) Dresse le tableau de signes de $g(x)$, contrôle-le avec $x = 0$, puis résous $g(x) \geqslant 0$.

Ex. 6 (suite)

(d) Soit h une fonction affine décroissante telle que $h(x_0) = 0$. Justifie avec le sens de variation que $h(x) < 0$ pour tout $x > x_0$.

(e) On pose $k(x) = g(x) + 2x$. Étudie le signe de $k(x)$ pour tout réel x.

Ex. 7 ★★★ **Question de DS : deux expressions à coefficients fractionnaires** — On considère les expressions $E(x) = 3 - \frac{x}{4}$ et $F(x) = \frac{2x-5}{3}$, définies pour tout réel x.

(a) Pour $E(x)$ puis pour $F(x)$, donne le coefficient de x et la valeur de x qui annule l'expression.

(b) Dresse un seul tableau de signes, avec une ligne pour $E(x)$ et une ligne pour $F(x)$.

(c) Détermine l'ensemble des réels x pour lesquels $E(x)$ et $F(x)$ sont tous deux strictement positifs.

(d) Donne une expression affine $G(x)$ à coefficients entiers qui s'annule au même point que $F(x)$, mais dont tous les signes sont contraires à ceux de $F(x)$. Justifie.

2. *Tableau de signes d'un produit*

À retenir : Une ligne par facteur, valeurs qui annulent rangées dans l'ordre croissant, un 0 sous chacune. Dernière ligne : je compte les « − » (pair : +). Un carré ajoute un 0 sans changer le signe ; $x^2 + 1 > 0$. Ex. : $-x(x-1)$: −, 0, +, 0, −.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes — Valeurs qui annulent et ligne des x** — Réponds en une ou deux lignes. Justifie avec le coefficient de x ou un calcul court.

(a) Donne la valeur qui annule $6x + 9$, puis le signe de $6x + 9$ à droite de cette valeur.

(b) Donne la valeur qui annule $7 - 2x$, puis le signe de $7 - 2x$ à droite de cette valeur.

(c) Range dans l'ordre croissant les valeurs qui annulent les facteurs de $(x + 1)(3x + 5)$.

(d) Range dans l'ordre croissant les valeurs qui annulent les facteurs de $x(2x - 3)(4x + 1)$.

(e) Quelles valeurs écris-tu sur la ligne des x pour $(x - 9)^2(x + 2)$? Dans quelles lignes mets-tu un 0 sous 9 ?

(f) Quelle valeur de x annule $x^2 + 4$? Que mets-tu dans la ligne de ce facteur ?

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes — Règle des signes** — Réponds sans dresser de tableau de signes.

(a) Donne le signe de $(x - 6)(x + 1)$ pour $x = 2$.

(b) Pour $x = -7$, combien de facteurs de $(1 - x)(x + 5)(2x - 9)$ sont négatifs ? Déduis-en le signe du produit.

(c) Ana dit : « $-3(x - 2)(x + 7)$ est négatif pour $x = 0$, car il commence par -3 ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 9 (suite)

(d) Dans une colonne d'un tableau, les lignes des facteurs portent +, −, −, −. Quel signe écris-tu dans la dernière ligne ?

(e) Trouve toutes les valeurs de x telles que $(x^2 + 1)(x - 10) = 0$.

(f) Calcule $(x + 8)^2(5 - x)$ pour $x = -8$, puis pour $x = -10$.

Ex. 10 ★★☆ **Le tableau de Malik** — Malik dresse le tableau de signes de $P(x) = (x + 5)(2 - 3x)$:

x	-∞	$\frac{2}{3}$	−5	+∞	
x + 5	−		−	0	+
2 − 3x	−	0	+		+
P(x)	+	0	−	0	+

(a) Repère les deux erreurs de Malik et explique-les.

(b) Dresse le tableau de signes correct de $P(x)$, une ligne par facteur, puis la ligne du produit.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

(d) Dresse le tableau de signes de $Q(x) = -3(x + 1)(x - 6)^2$, avec une ligne pour -3.

Ex. 11 ★★☆ **Factoriser avant de dresser le tableau** — On pose $A(x) = x^2 - 7x$, $B(x) = 49 - x^2$ et $C(x) = (x - 1)(2x + 3) - 4(x - 1)$.

(a) Factorise $A(x)$, puis dresse son tableau de signes.

(b) Factorise $B(x)$ avec $a^2 - b^2$, puis résous $B(x) > 0$.

(c) Mets $x - 1$ en facteur dans $C(x)$, puis résous $C(x) \leqslant 0$.

(d) Mia affirme : « $x^2(x - 6)$ et $x(x - 6)$ ont le même tableau de signes ». A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Explique pourquoi $(x^2 + 5)(3x + 6)$ a le signe de $3x + 6$, puis dresse son tableau de signes.

Ex. 12 ★★★ **Le bénéfice de l'atelier de poterie** — Un atelier de poterie fabrique et vend x centaines de bols par mois, avec $x \in [0\,;20]$. Son bénéfice, en centaines d'euros, est $B(x) = -2x^2 + 36x - 90$.

(a) Développe $-2(x - 3)(x - 15)$ et vérifie que tu retrouves $B(x)$.

(b) Léa affirme : « Le facteur -2 est négatif, donc l'atelier perd toujours de l'argent. » A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

(c) Dresse le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;20]$: une ligne pour -2, une pour chaque facteur, puis la ligne de $B(x)$.

(d) Pour quelles quantités de bols l'atelier réalise-t-il un bénéfice strictement positif ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Un carré et un facteur toujours positif** — On pose $P(x) = (x^2+1)(x-4)^2(3-2x)$ pour tout réel x.

(a) Justifie que $x^2+1 > 0$ pour tout réel x, puis donne le signe de $(x-4)^2$ selon les valeurs de x.

(b) Dresse le tableau de signes de $P(x)$, avec une ligne par facteur.

(c) Résous $P(x) \geqslant 0$, puis $P(x) > 0$.

(d) Inès affirme : « $P(x)$ et $3-2x$ ont exactement le même signe pour tout réel x. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Noé enlève les carrés** — Noé veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x-1)^2 \leqslant (x+4)^2$. Il écrit : « $(2x-1)^2 \leqslant (x+4)^2 \iff 2x-1 \leqslant x+4 \iff x \leqslant 5$ ».

(a) Calcule $(2x-1)^2$ et $(x+4)^2$ pour $x=-5$, puis explique pourquoi le raisonnement de Noé est faux.

(b) Passe tout dans le membre de gauche, puis factorise $(2x-1)^2-(x+4)^2$ avec $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

(c) Dresse le tableau de signes de l'expression factorisée.

(d) Résous l'inéquation, puis compare ton résultat avec celui de Noé.

3. *Tableau de signes d'un quotient et valeurs interdites*

À retenir : Cherche d'abord les valeurs interdites ($B(x)=0$). $\frac{A}{B}$ suit la règle des signes du produit : 0 où A s'annule, ‖ sous chaque valeur interdite, qui n'est jamais solution. Ex. : $\frac{x-1}{x+2}$ est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et nul en 1.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : valeurs interdites et ensemble de définition** — Pour chaque quotient, réponds à la question posée.

(a) Donne la valeur interdite de $\frac{x+4}{2x-7}$.

(b) Donne l'ensemble de définition de $\frac{3x}{9-3x}$.

(c) Donne les valeurs interdites de $\frac{5}{(x+6)(3x-1)}$.

(d) Le quotient $\frac{x-9}{x^2+4}$ a-t-il une valeur interdite ? Justifie.

(e) Inès dit : « $\frac{x+3}{x-1}$ n'existe pas en -3. » A-t-elle raison ? Justifie.

(f) Pour quelles valeurs de x le quotient $\frac{x-2}{(x-2)(x+5)}$ est-il défini ?

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : signe et nullité d'un quotient** — Réponds sans dresser de tableau de signes.

(a) Sur quel intervalle le quotient $\frac{1}{x}$ est-il strictement négatif ?

(b) Donne le signe de $\frac{x+6}{2-x}$ pour $x=5$.

(c) Pour quelle valeur de x le quotient $\frac{3x-12}{x+1}$ est-il nul ?

(d) Pour quelles valeurs de x le quotient $\frac{(x+7)(5x-2)}{5x-2}$ est-il nul ?

Ex. 16 (suite)

(e) Donne le signe de $\frac{(x-4)^2}{x+3}$ pour $x=-5$.

(f) Pour $x=0$, combien de facteurs de $\frac{x-1}{(x+2)(x-5)}$ sont négatifs ? Déduis-en le signe du quotient.

Ex. 17 ★★☆ **Compléter un tableau et corriger une erreur** — On considère $q(x) = \frac{x+5}{4-2x}$ et le tableau de signes ci-dessous, à compléter.

x	-∞	-5	2	+∞	
x + 5	?	?	?	?	?
4 − 2x	?	?	?	?	?
q(x)	?	?	?	?	?

(a) Donne la valeur interdite de q et son ensemble de définition.

(b) Complète le tableau de signes en justifiant chaque ligne.

(c) Mila écrit un 0 sous 2 dans la dernière ligne. Explique son erreur.

(d) Résous l'inéquation $q(x) \geqslant 0$.

Ex. 18 ★★☆ **Un carré au numérateur** — On considère $r(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{x+1}$.

(a) Donne la valeur interdite de r.

(b) Dresse le tableau de signes de $r(x)$.

(c) Nadia affirme : « Le numérateur est un carré, donc $r(x)$ est toujours positif ou nul. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Résous l'inéquation $r(x) \leqslant 0$.

Ex. 19 ★★★ **Inéquation quotient : ne pas multiplier à l'aveugle** — On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{5x-2}{x+4} \geqslant 3$.

(a) Donne la valeur interdite et l'ensemble de définition de l'inéquation.

(b) Ilyes multiplie les deux membres par $x+4$ et trouve $x \geqslant 7$. Teste $x=-5$ et explique son erreur.

(c) Écris $\frac{5x-2}{x+4} - 3$ sous la forme d'un seul quotient, que tu noteras $Q(x)$.

(d) Dresse le tableau de signes de $Q(x)$, puis donne l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Ex. 20 ★★★ **Une valeur commune au numérateur et au dénominateur** — On considère $h(x) = \dfrac{x^2-36}{12-2x}$.

(a) Donne la valeur interdite de h et son ensemble de définition.

(b) Factorise le numérateur x^2-36.

(c) Avec cette factorisation, dresse le tableau de signes de $h(x)$ (une ligne par facteur).

Ex. 20 **(suite)**

(d) Maëlys affirme : « $h(x) = 0$ a deux solutions, -6 et 6, car le numérateur s'annule en ces valeurs. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) < 0$.

Ex. 21 ★★★ **Position relative de deux courbes à l'aide d'un quotient** — Soit $f(x) = x$, définie sur $\mathbb{R}$, et $g(x) = \frac{16}{x}$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives.

(a) Donne l'ensemble de définition de g. Sans tableau, donne l'intervalle sur lequel $g(x) > 0$.

(b) Écris $f(x) - g(x)$ sous la forme d'un seul quotient, puis factorise son numérateur.

(c) Dresse le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

(d) Nour calcule $(-1)^2 - 16 = -15 < 0$ et conclut que C_f est au-dessous de C_g en $x = -1$. Ce raisonnement est-il correct ? Justifie.

(e) Donne la position relative de C_f et C_g et les coordonnées de leurs points d'intersection.

4. *Inéquations produit*

À retenir : Je passe tout dans un membre, je factorise, je dresse le tableau, puis je choisis les crochets : fermés pour $\geqslant$, ouverts pour $>$, toujours ouverts en $\pm\infty$. Je ne divise jamais par une expression qui contient x :
$x^2 \geqslant 5x \iff x(x-5) \geqslant 0$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : produit nul et signe en un point** — Réponds en une ou deux lignes.

(a) Résous $(3x - 6)(x + 4) = 0$.

(b) Résous $x(5 - 2x) = 0$.

(c) Résous $x^2 = 7x$, sans diviser par x.

(d) Résous $x^2 - 36 = 0$ en factorisant.

(e) Donne le signe de $(2x - 9)(4 - x)$ pour $x = 5$.

(f) Donne le signe de $(x + 3)^2(x - 1)$ pour $x = -10$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : choisir les bons crochets** — Résous dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation.

(a) $-3(x - 5)(x + 6) > 0$ (b) $(2x - 3)(x + 1) \leqslant 0$

(c) $x^2 \geqslant 64$ (d) $(x + 5)^2 > 0$

(e) $(x - 3)(6 - x) \geqslant 0$

Ex. 24 ★★☆ **Un facteur commun dans les deux membres** — On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x + 2)(3x - 1) \leqslant (x + 2)(x + 5)$.

(a) Calcule les deux membres pour $x = -3$. Simplifier par $x + 2$ donnerait $x \leqslant 3$: explique l'erreur.

(b) Montre que l'inéquation équivaut à $(x + 2)(2x - 6) \leqslant 0$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Complète le tableau de signes :

x	-∞	-2	3	+∞	
x + 2	?	0	?	?	
2x − 6	?	?	0	?	
produit	?	0	?	0	?

(d) Donne l'ensemble des solutions S en justifiant les crochets.

(e) Vérifie ton résultat avec $x = 0$, puis avec $x = 4$.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — Inès résout $49 - 4x^2 > 0$. Voici sa copie : « $4x^2 < 49$, donc $2x < 7$, donc $x < \frac{7}{2}$. $S =]-\infty\,;\frac{7}{2}]$. »

(a) Calcule $49 - 4x^2$ pour $x = -5$. Montre que la réponse d'Inès est fausse.

(b) Inès a aussi fait une erreur de crochet en $\frac{7}{2}$. Explique laquelle.

(c) Factorise $49 - 4x^2$.

(d) Dresse le tableau de signes de $49 - 4x^2$. Donne ensuite l'ensemble des solutions.

Ex. 26 ★★★ **Le bénéfice d'un atelier de bougies** — Maëlle fabrique x centaines de bougies par semaine, avec $x \in [0\,;12]$. Son bénéfice hebdomadaire, en centaines d'euros, est $B(x) = -2x^2 + 28x - 80$.

(a) Vérifie que $B(x) = -2(x - 4)(x - 10)$ pour tout réel x.

(b) Complète ce tableau de signes. Déduis-en les productions pour lesquelles $B(x) > 0$.

x	0	4	10	12	
−2	?	?	?		
x − 4	?	?	?	?	
x − 10	?	?	?	?	
B(x)	?	?	?	?	?

(c) Vérifie que $B(x) - 16 = 2 - 2(x - 7)^2$, puis factorise $B(x) - 16$ avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

(d) Maëlle veut gagner au moins 1 600 €. Résous $B(x) \geqslant 16$ sur $[0\,;12]$ avec un tableau de signes, puis conclus.

Ex. 27 ★★★ **Comparer deux carrés** — Pour tout réel x, on pose $E(x) = (2x + 1)^2 - (x + 5)^2$.

(a) Factorise $E(x)$ à l'aide de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

(b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) = 0$.

(c) Dresse le tableau de signes de $E(x)$.

(d) Déduis-en l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x + 1)^2 < (x + 5)^2$.

(e) Lucas écrit : « $(2x + 1)^2 < (x + 5)^2$, donc $2x + 1 < x + 5$, donc $x < 4$. » Teste $x = -3$ et explique son erreur.

Ex. 28 ★★★ **Vrai ou faux sur les inéquations produit** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie. Si elle est fausse, donne un contre-exemple, puis la bonne réponse.

(a) « Pour tout réel x, $x^2 > 2x$ équivaut à $x > 2$. »

(b) « Un produit de deux facteurs affines est toujours positif à l'extérieur des deux valeurs qui l'annulent. »

(c) « L'ensemble des solutions de $(x-1)^2(x+3) \geqslant 0$ est $[-3\,;+\infty[$. »

(d) « L'ensemble des solutions de $(x-1)^2(x+3) > 0$ est $]-3\,;+\infty[$. »

(e) « Les solutions de $(x-3)(x+1) = 5$ sont 8 et 4, car $x-3=5$ ou $x+1=5$. » Tu pourras vérifier que $(x-3)(x+1)-5 = (x-4)(x+2)$.

5. *Inéquations quotient*

À retenir : Valeurs interdites : toujours exclues (crochet ouvert). $\frac{A}{B} \geqslant k$: on étudie $\frac{A}{B} - k \geqslant 0$, jamais de produit en croix. On garde les « + » et les 0 du numérateur : $\frac{x-1}{x} \geqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;0[\cup[1\,;+\infty[$.

Ex. 29 ★☆☆ **Valeurs interdites et valeurs qui annulent** — Réponds en une ligne.

(a) Donne la valeur interdite de $\frac{x-4}{x+5}$.

(b) Quelle valeur de x annule $\frac{3x-2}{5-x}$?

(c) Donne l'ensemble de définition de $\frac{4}{2x+9}$.

(d) Quel est le signe de $\frac{x-11}{x+13}$ pour $x = 0$?

(e) Pour $\frac{(2x-1)^2}{x-9}$, donne la valeur qui l'annule et la valeur interdite.

(f) Le quotient $\frac{x+3}{x^2+2}$ a-t-il une valeur interdite ? Justifie.

Ex. 30 ★★☆ **Du tableau aux crochets** — On pose $f(x) = \frac{10-2x}{x+7}$.

x	-∞	?	?	+∞	
10 − 2x	?	?	?	?	?
x + 7	?	?	?	?	?
f(x)	?	?	?	?	?

(a) Résous $10-2x = 0$ et donne le signe du coefficient de x.

(b) Donne la valeur interdite de f et le signe de $x+7$ de part et d'autre.

(c) Complète le tableau de signes de f ci-dessus.

(d) Résous $f(x) \geqslant 0$.

(e) Résous $f(x) < 0$.

(f) Calcule $f(0)$ et $f(-8)$. Leurs signes sont-ils cohérents avec ton tableau ?

Ex. 31 ★★☆ **Le produit en croix de Lina** — Lina doit résoudre $\frac{3x-1}{x+2} \leqslant 2$. Elle écrit : « $3x-1 \leqslant 2(x+2)$, donc $x \leqslant 5$. »

(a) Calcule $\frac{3x-1}{x+2}$ pour $x = -3$. Le nombre -3 est-il solution ? Est-il dans l'ensemble trouvé par Lina ?

(b) Explique l'erreur de Lina.

(c) Pour $x \neq -2$, écris $\frac{3x-1}{x+2} - 2$ sous la forme d'un seul quotient.

(d) Résous l'inéquation de Lina à l'aide d'un tableau de signes.

Ex. 32 ★★☆ **Un carré au dénominateur** — Soit $f(x) = \dfrac{x^2-36}{(x-8)^2}$.

(a) Donne l'ensemble de définition D de f.

(b) Factorise $x^2 - 36$.

(c) Quel est le signe de $(x-8)^2$ sur D ? Justifie.

(d) Dresse le tableau de signes de f.

(e) Résous $f(x) > 0$, puis $f(x) \leqslant 0$.

Ex. 33 ★★★ **Une question de DS, étape par étape** — On pose $f(x) = \frac{3x+1}{2-x}$. On cherche les réels x tels que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

(a) Donne l'ensemble de définition D de f.

(b) Pour $x \in D$, écris $f(x) + 1$ sous la forme d'un seul quotient, puis dresse son tableau de signes.

(c) Résous $f(x) \geqslant -1$. Malo met un crochet fermé en 2, « car l'inéquation est large ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) Résous de même $f(x) \leqslant 3$, en réduisant $f(x) - 3$ au même dénominateur.

(e) Déduis-en l'ensemble S des réels x tels que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. Contrôle avec $f(0)$ et $f(3)$.

Ex. 34 ★★★ **Le taux de réussite de Zoé** — Au basket, Zoé a réussi 12 lancers francs sur 20. Elle réussit ensuite x lancers de suite (avec x entier, $x \geqslant 0$). Son taux de réussite devient alors $T(x) = \frac{12+x}{20+x}$. Elle vise un taux d'au moins 0,8.

(a) Calcule $T(0)$ et $T(5)$ sous forme décimale.

(b) Pour $x \neq -20$, écris $T(x) - 0{,}8$ sous la forme d'un seul quotient.

(c) Résous dans $\mathbb{R} \setminus \{-20\}$ l'inéquation $T(x) \geqslant 0{,}8$ à l'aide d'un tableau de signes.

(d) Combien de lancers réussis de suite faut-il au minimum à Zoé ? Justifie avec la question précédente.

(e) Sami affirme : « Si elle continue assez longtemps, Zoé atteindra un taux de 100 %. » A-t-il raison ? Justifie à l'aide du signe de $T(x) - 1$.

Ex. 35 ★★★ **Une hyperbole et une droite** — On pose $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = x + 2$. On note C_f la courbe de f et D la droite qui représente g.

(a) Donne l'ensemble de définition de f. Vérifie que, pour $x \neq 0$, $f(x) - g(x) = \frac{(1-x)(x+3)}{x}$.

(b) Dresse le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

(c) Déduis-en la position relative de C_f et de D.

(d) Donne les coordonnées des points d'intersection de C_f et de D.

(e) Inès écrit : « $\frac{3}{x} > x + 2 \iff 3 > x^2 + 2x$ ». Trouve une valeur test qui montre que son équivalence est fausse.

6. *Lire un signe dans un tableau*

À retenir : $f(x) > 0$: intervalles « + » ; $f(x) \geqslant 0$: j'ajoute les 0. Une borne où f est définie est incluse, une valeur interdite jamais. Un tableau de valeurs ne donne pas le signe ; C_f au-dessus de $C_g \iff f(x) - g(x) > 0$.

Ex. 36 ★★★ **Lire un tableau de signes** — Une fonction f est définie sur $[-5\,;6]$. Voici son tableau de signes.

x	-5	-1	2	6	
f(x)	+	0	−	0	+

(a) Résous l'inéquation $f(x) < 0$.

(b) Résous l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

(c) Donne le signe de $f(0)$ et celui de $f(-4{,}5)$.

(d) En quelles abscisses la courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

(e) Lina affirme : « d'après le tableau, $f(3) > 1$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(f) Hugo écrit : « $f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$ ». Corrige son erreur.

Ex. 37 ★★★ **Déduire un signe sans tableau de signes** — Pour chaque fonction, réponds à la question posée. Si on ne peut pas conclure, explique pourquoi.

(a) La courbe de g, définie sur $\mathbb{R}$, ne coupe l'axe des abscisses qu'en -4 et en 5. On sait que $g(-7) = -1$, $g(0) = 3$ et $g(11) = -2$. Résous $g(x) \geqslant 0$.

(b) h, définie sur $[0\,;8]$, décroît sur $[0\,;3]$ puis croît sur $[3\,;8]$, avec $h(3) = 2$. Donne le signe de $h(x)$.

(c) p est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $p(6) = 0$. Donne le signe de $p(x)$ selon les valeurs de x.

(d) Voici un tableau de valeurs de k, définie sur $[-2\,;4]$.

x	-2	0	2	4
k(x)	3	1	5	2

Zoé conclut : « $k(x) > 0$ sur $[-2\,;4]$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Associer expressions et tableaux** — On donne $A(x) = (x-4)(x+3)$, $B(x) = (4-x)(x+3)$ et $C(x) = \frac{x-4}{x+3}$. Voici trois tableaux de signes, dans le désordre.

Tableau 1 :

x	-∞	-3	4	+∞	
E(x)	+	‖	−	0	+

Tableau 2 :

x	-∞	-3	4	+∞	
E(x)	+	0	−	0	+

Tableau 3 :

x	-∞	-3	4	+∞	
E(x)	−	0	+	0	−

(a) Calcule $A(0)$, $B(0)$ et $C(0)$.

(b) Associe chaque expression à son tableau. Justifie, en particulier pour A et C.

(c) Résous l'inéquation $C(x) \geqslant 0$.

(d) Propose une expression produit de deux facteurs affines qui a ce tableau de signes :

x	-∞	-5	$\frac{1}{2}$	+∞	
g(x)	−	0	+	0	−

Ex. 39 ★★☆ **Position d'une parabole et d'une droite** — On donne $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = 2x + 14$, définies sur $\mathbb{R}$. On note C_f et C_g leurs courbes.

(a) Vérifie que $f(x) - g(x) = (x-7)(x+2)$.

(b) Complète le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

x	-∞	-2	7	+∞	
x + 2	?	0	?		?
x − 7	?		?	0	?
f(x) − g(x)	?	0	?	0	?

(c) Déduis-en la position relative de C_f et C_g.

(d) Donne les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g.

(e) Théo dit : « sur $]-2\,;7[$, on a $f(x) < 0$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Bénéfice d'une fabrique de bougies** — Une fabrique produit x centaines de bougies par jour, avec $x \in [0\,;12]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -x^2 + 12x - 20$.

(a) Vérifie que $B(x) = (x-2)(10-x)$ pour tout x de $[0\,;12]$.

(b) Dresse le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;12]$.

(c) Résous $B(x) > 0$, puis $B(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;12]$. Interprète le premier résultat.

Ex. 40 (suite)

(d) La fabrique vise un bénéfice d'au moins 7 000 €. Vérifie que $B(x) - 7 = (x-3)(9-x)$, puis résous $B(x) \geqslant 7$ et interprète.

Ex. 41 ★★★ Retrouver une expression à partir de son tableau — Une fonction f a le tableau de signes ci-dessous.

x	-∞	-6	1	8	+∞		
f(x)	−	0	+	‖	−	0	+

(a) Lis le tableau et donne l'ensemble des x tels que $f(x) \geqslant 0$.

(b) Sami cherche $f(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs affines. Explique pourquoi aucun produit de ce type ne peut convenir.

(c) Propose une expression de $f(x)$ compatible avec le tableau. Justifie par un tableau de signes.

(d) Inès propose $g(x) = \frac{x+6}{(x-1)(x-8)}$. Ses signes coïncident avec ceux du tableau. Son expression convient-elle ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ Position d'une hyperbole et d'une droite — On donne $f(x) = \frac{6}{x-2}$ et $g(x) = x - 3$. On note C_f et C_g leurs courbes.

(a) Donne l'ensemble de définition de f. Montre ensuite que $f(x) - g(x) = \frac{x(5-x)}{x-2}$.

(b) Dresse le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

(c) Déduis-en les intervalles sur lesquels C_f est strictement au-dessus de C_g.

(d) Donne les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g.

(e) Noé dit : « Le numérateur $x(5-x)$ est positif sur $]0\,;5[$, donc C_f est au-dessus de C_g sur $]0\,;5[$. » A-t-il raison ? Justifie.

7. *Comparer deux courbes par le signe d'une différence*

À retenir : C_f au-dessus de $C_g \iff f(x) - g(x) > 0$: calcule la différence dans cet ordre et distribue le $-$: $x^2 - (2x-5) = x^2 - 2x + 5$. Ses zéros sont les abscisses des points d'intersection. Un quotient s'étudie en entier.

Ex. 43 ★☆☆ Automatismes : la différence de deux fonctions — Dans chaque question, f et g sont deux fonctions et C_f, C_g sont leurs courbes.

(a) $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = 5x - 2$. Écris $f(x) - g(x)$ sous forme réduite.

(b) $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = x + 5$. Résous $f(x) - g(x) = 0$. Que représente la solution ?

Ex. 43 (suite)

(c) $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -x + 7$. Donne les coordonnées du point d'intersection de C_f et C_g.

(d) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x + 2$. Le point de C_f d'abscisse 1 est-il au-dessus ou au-dessous de C_g ? Justifie avec le signe de $f(1) - g(1)$.

(e) $f(x) = \frac{2}{x}$ et $g(x) = 1$. Écris $f(x) - g(x)$ avec un seul dénominateur. Donne la valeur interdite et la valeur qui annule cette différence.

(f) $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = x - 6$. Sur quel intervalle C_f est-elle strictement au-dessus de C_g ?

Ex. 44 ★☆☆ Automatismes : lire une position dans un tableau de signes — f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, avec $g(x) = 2x + 3$. Voici le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

x	-∞	-4	1	+∞	
f(x) − g(x)	−	0	+	0	−

(a) Sur quel intervalle C_f est-elle strictement au-dessus de C_g ?

(b) Sur quels intervalles C_f est-elle strictement au-dessous de C_g ?

(c) Quelles sont les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g ?

(d) Donne les coordonnées de ces points d'intersection.

(e) Tom affirme : « $g(x) - f(x) > 0$ sur $]-4\,;1[$, comme $f(x) - g(x)$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ Une parabole, une hyperbole et la droite y = x — On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, définies sur $\mathbb{R}$, et $h(x) = \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C_f, C_g et C_h sont leurs courbes ; C_g est la droite d'équation $y = x$.

(a) Factorise $f(x) - g(x)$, puis dresse son tableau de signes.

(b) Déduis-en la position de C_f par rapport à la droite C_g, puis leurs points d'intersection.

(c) Vérifie que, pour $x \neq 0$, $h(x) - g(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{x}$.

(d) Inès n'étudie que le numérateur $(1-x)(1+x)$. Elle conclut que C_h est au-dessus de C_g sur $]-1\,;1[$. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Dresse le tableau de signes de $h(x) - g(x)$ et conclus sur la position de C_h et de C_g.

Ex. 46 ★★☆ Deux tarifs pour une salle d'escalade — Salomé va dans une salle d'escalade. Tarif A : une carte à 40 € puis 5 € par séance. Tarif B : 9 € par séance, sans carte. Pour x séances ($x \geqslant 0$), les coûts en euros sont $A(x) = 5x + 40$ et $B(x) = 9x$.

(a) Écris $A(x) - B(x)$ sous forme réduite.

(b) Dresse le tableau de signes de $A(x) - B(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Pour combien de séances les deux tarifs coûtent-ils le même prix ? Quel est ce prix ?

Ex. 46 **(suite)**

(d) Quand le tarif A est-il le moins cher ? Rédige une phrase de conclusion.

(e) Malik écrit $B(x) - A(x) = 9x - 5x + 40 = 4x + 40 > 0$ et conclut que le tarif A est toujours le moins cher. Trouve et corrige son erreur.

Ex. 47 ★★★ **Une parabole et une droite, étape par étape** — On pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = -x + 5$, définies sur $\mathbb{R}$. C_f et C_g sont leurs courbes.

(a) Lina écrit : $f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 1 - x + 5 = 2x^2 - 4x + 6$. Explique son erreur.

(b) Vérifie en développant que $f(x) - g(x) = 2(x - 2)(x + 1)$.

(c) Dresse le tableau de signes de $f(x) - g(x)$, puis donne la position relative de C_f et C_g.

(d) Donne les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g. Contrôle chaque ordonnée avec f et avec g.

(e) Yanis étudie $g(x) - f(x)$. Il trouve un signe $+$ sur $]-1\,;2[$ et conclut que C_f est au-dessus de C_g sur $]-1\,;2[$. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Une courbe à valeur interdite et la droite y = x** — On pose $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et $g(x) = x$, définie sur $\mathbb{R}$. C_f et C_g sont leurs courbes.

(a) Réduis au même dénominateur et montre que $f(x) - g(x) = \frac{-x^2+5x-4}{x-2}$ pour $x \neq 2$.

(b) Vérifie en développant que $(x - 1)(4 - x) = -x^2 + 5x - 4$.

(c) Dresse le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(d) Donne la position relative de C_f et C_g, puis les coordonnées de leurs points d'intersection.

(e) Nora étudie seulement le numérateur $-x^2 + 5x - 4$, qui est positif sur $]1\,;4[$. Elle conclut que C_f est au-dessus de C_g sur $]1\,;4[$. A-t-elle raison ? Justifie avec $x = 1{,}5$.

Ex. 49 ★★★ **Deux devis pour une terrasse carrée** — Hugo veut une terrasse carrée de côté x mètres, avec $1 \leqslant x \leqslant 10$. Devis A : 30 € de déplacement, puis 2 € par m² de surface. Devis B : 4 € par mètre de bordure, sur tout le tour du carré. On note $A(x)$ et $B(x)$ les prix en euros, et C_A, C_B leurs courbes.

(a) Justifie que $A(x) = 2x^2 + 30$ et $B(x) = 16x$.

(b) Vérifie en développant que $A(x) - B(x) = 2(x - 3)(x - 5)$.

(c) Dresse le tableau de signes de $A(x) - B(x)$ sur $[1\,;10]$.

(d) Pour quelles longueurs de côté le devis A est-il strictement le moins cher ? Conclus par une phrase.

(e) Donne les coordonnées des points d'intersection de C_A et C_B, puis explique ce qu'ils signifient pour Hugo.