1. Signe de $ax + b$

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : la valeur qui annule**

(a) $5x - 20 = 0 \iff x = \frac{20}{5} = 4$.

(b) $-4x + 10 = 0 \iff x = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$
(et non $-\frac{5}{2}$).

(c) Ici $a = -2$ et $b = 7$: $7 - 2x = 0 \iff x = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$.

(d) $\frac{x}{3} + 2 = 0 \iff \frac{x}{3} = -2 \iff x = -6$.

(e) $10x + 4 = 0 \iff x = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$.

(f) $-x - 5 = 0 \iff -x = 5 \iff x = -5$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : tableaux de signes à compléter**

(a) $3x - 12 = 0 \iff x = 4$; $a = 3 > 0$: $-$ à gauche, $+$ à droite.

x	-∞	4	+∞
3x − 12	−	0	+

(b) $-6x - 18 = 0 \iff x = -3$; $a = -6 < 0$: $+$ à gauche, $-$ à droite.

x	-∞	-3	+∞
−6x − 18	+	0	−

(c) $8 - 4x = 0 \iff x = 2$; $a = -4 < 0$: $+$ à gauche, $-$ à droite.

x	-∞	2	+∞
8 − 4x	+	0	−

(d) $2x + 7 = 0 \iff x = -\frac{7}{2}$; $a = 2 > 0$: $-$ à gauche, $+$ à droite.

x	-∞	$-\frac{7}{2}$	+∞
2x + 7	−	0	+

(e) $1 + 5x = 0 \iff x = -\frac{1}{5}$; $a = 5 > 0$: $-$ à gauche, $+$ à droite.

x	-∞	$-\frac{1}{5}$	+∞
1 + 5x	−	0	+

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs de Malik**

(a) Non. $-5x + 10 = 0 \iff x = -\frac{10}{-5} = 2$. Malik a calculé $\frac{b}{a}$ au lieu de $-\frac{b}{a}$: il a oublié le signe moins.

Ex. 3 (suite)

(b) Non : avec $a = -5 < 0$, l'expression est négative à droite de 2 et positive à gauche.

x	-∞	2	+∞
−5x + 10	+	0	−

Malik a mis le signe de a du mauvais côté.

(c) $-5x > -10 \iff x < \frac{-10}{-5}$: on divise par $-5 < 0$, donc le sens change. $x < 2$, d'où $S =]-\infty\,;2[$
(crochet ouvert en 2 car l'inégalité est stricte).

(d) $-5 \times 0 + 10 = 10 > 0$: 0 est bien solution. $-5 \times 3 + 10 = -5 < 0$: 3 n'est pas solution. Ces deux contrôles confirment $S =]-\infty\,;2[$.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur les expressions affines**

(a) Faux. Contre-exemple : $3x - 6$ avec $x = 1 > 0$ donne $3 \times 1 - 6 = -3 < 0$. Le signe dépend de la position de x par rapport à la valeur qui annule, ici 2.

(b) Vrai. $4 - \frac{x}{2} = 0 \iff x = 8$. Le coefficient de x est $a = -\frac{1}{2} < 0$ (f décroissante) : $f(x)$ est négatif à droite de 8 et positif à gauche.
Donc $f(x) > 0$ pour $x < 8$.

(c) Vrai. $3(x - 1) - 3x + 7 = 3x - 3 - 3x + 7 = 4$: ici $a = 0$, l'expression est la constante $4 > 0$ pour tout réel x.

(d) Faux. $\frac{2}{3}x + 4 = 0 \iff x = -4 \times \frac{3}{2} = -6$. Pour $x = -\frac{8}{3}$, on trouve $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{8}{3}\right) + 4 = \frac{20}{9} \neq 0$.

Ex. 5 ★★★ **Deux tarifs de location de vélo**

(a) $D(x) = 2{,}5x + 15 - 4x = 15 - 1{,}5x$. L'expression est écrite dans le désordre : le coefficient de x est $a = -1{,}5$ (et non 15), et $b = 15$.

(b) $15 - 1{,}5x = 0 \iff x = \frac{-15}{-1{,}5} = 10$. Comme $a = -1{,}5 < 0$, $D(x)$ est négatif à droite de 10 et positif à gauche. On vérifie avec $x = 0$: $D(0) = 15 > 0$.

x	-∞	10	+∞
D(x)	+	0	−

(c) Non. $15 - 1{,}5x \leqslant 3 \iff -1{,}5x \leqslant -12$. On divise par $-1{,}5$, qui est négatif, donc le sens de l'inégalité change : $x \geqslant \frac{-12}{-1{,}5} = 8$. Sofiane a oublié de changer le sens.
Contrôle : $D(0) - 3 = 12 > 0$, donc 0 ne convient pas, alors que $D(10) - 3 = -3 \leqslant 0$, donc 10 convient. Le tarif A coûte au plus 3 € de plus que le tarif B pour $x \in [8\,;+\infty[$.

Ex. 5 **(suite)**

(d) $D(x) > 0$ signifie $A(x) > B(x)$: le tarif A coûte plus cher. D'après le tableau, pour $0 \leqslant x < 10$, le tarif B est le moins cher. Pour $x = 10$, les deux tarifs coûtent 40 €. Pour $x > 10$, on a $D(x) < 0$: le tarif A est le moins cher. Conclusion : Inès choisit B pour moins de 10 heures et A pour plus de 10 heures.

Ex. 6 ★★★ **Une fonction affine donnée par un tableau de valeurs**

(a) $a = \frac{g(6)-g(2)}{6-2} = \frac{-1-7}{4} = -2$. Ensuite $g(2) = -2 \times 2 + b = 7$, donc $b = 11$. Ainsi $g(x) = -2x + 11$. Vérification : $g(-1) = 2 + 11 = 13$.

(b) $a = -2 < 0$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$. $-2x + 11 = 0 \iff x = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$ (et non $-\frac{11}{2}$).

(c) $a < 0$: $g(x)$ est négatif à droite de $\frac{11}{2}$ et positif à gauche. Contrôle : $g(0) = 11 > 0$, et $0 < \frac{11}{2}$.

x	-∞	$\frac{11}{2}$	+∞
g(x)	+	0	−

On garde les valeurs où $g(x)$ est positif ou nul, crochet fermé en $\frac{11}{2}$ car g s'y annule : $S =]-\infty ; \frac{11}{2}]$.

(d) h est décroissante, donc elle renverse l'ordre : si $x > x_0$, alors $h(x) < h(x_0)$, c'est-à-dire $h(x) < 0$. Une fonction affine décroissante est donc négative à droite de la valeur qui l'annule et positive à gauche.

(e) $k(x) = -2x + 11 + 2x = 11$. Le coefficient de x est nul : k est constante. Pour tout réel x, $k(x) = 11 > 0$. $k(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais.

Ex. 7 ★★★ **Question de DS : deux expressions à coefficients fractionnaires**

(a) $E(x) = -\frac{1}{4}x + 3$: son coefficient est $a = -\frac{1}{4}$, et $3 - \frac{x}{4} = 0 \iff \frac{x}{4} = 3 \iff x = 12$. $F(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$: son coefficient est $a = \frac{2}{3}$, et $F(x) = 0 \iff 2x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$.

(b) On range les valeurs dans l'ordre croissant : $\frac{5}{2} < 12$. Pour E, $a < 0$: $E(x)$ est positif à gauche de 12 et négatif à droite. Pour F, $a > 0$: $F(x)$ est négatif à gauche de $\frac{5}{2}$ et positif à droite. Contrôle en 0 : $E(0) = 3 > 0$ et $F(0) = -\frac{5}{3} < 0$.

x	-∞	$\frac{5}{2}$	12	+∞
E(x)	+	+	0	−
F(x)	−	0	+	+

Ex. 7 **(suite)**

(c) D'après le tableau, les deux lignes portent « + » seulement entre $\frac{5}{2}$ et 12. Les crochets sont ouverts, car F s'annule en $\frac{5}{2}$ et E s'annule en 12. L'ensemble cherché est $]\frac{5}{2} ; 12[$. Contrôle avec $x = 5$: $E(5) = \frac{7}{4} > 0$ et $F(5) = \frac{5}{3} > 0$.

(d) Par exemple $G(x) = 5 - 2x$. On a $G\left(\frac{5}{2}\right) = 5 - 5 = 0$. Son coefficient est $-2 < 0$, donc $G(x)$ est positif à gauche de $\frac{5}{2}$ et négatif à droite : c'est exactement l'inverse de $F(x)$. Contrôle : $G(0) = 5 > 0$ alors que $F(0) < 0$. Toute expression $k(5 - 2x)$ avec k entier strictement positif convient aussi.

2. *Tableau de signes d'un produit*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes — Valeurs qui annulent et ligne des x**

(a) $6x + 9 = 0 \iff x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$. Le coefficient de x est $6 > 0$: à droite de $-\frac{3}{2}$, $6x + 9$ est positif.

(b) $7 - 2x = 0 \iff x = \frac{7}{2}$. Le coefficient de x est $-2 < 0$: à droite de $\frac{7}{2}$, $7 - 2x$ est négatif.

(c) $x + 1$ s'annule en -1 et $3x + 5$ en $-\frac{5}{3} \approx -1{,}67$. Dans l'ordre : $-\frac{5}{3} < -1$.

(d) x s'annule en 0, $2x - 3$ en $\frac{3}{2}$ et $4x + 1$ en $-\frac{1}{4}$. Dans l'ordre : $-\frac{1}{4} < 0 < \frac{3}{2}$.

(e) $x + 2$ s'annule en -2 et $(x - 9)^2$ en 9 : la ligne des x porte -2 puis 9. Sous 9, il y a un 0 dans la ligne de $(x - 9)^2$ et dans la dernière ligne.

(f) Aucune : $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 4 \geqslant 4 > 0$. Ce facteur n'ajoute aucune valeur et sa ligne ne contient que des $+$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes — Règle des signes**

(a) $(2 - 6)(2 + 1) = (-4) \times 3 = -12$: un seul facteur négatif, le produit est négatif.

(b) $1 - (-7) = 8 > 0$, $-7 + 5 = -2 < 0$ et $2 \times (-7) - 9 = -23 < 0$: deux facteurs négatifs (nombre pair), le produit est positif (il vaut 368).

(c) Non. $-3 \times (0 - 2) \times (0 + 7) = -3 \times (-2) \times 7 = 42 > 0$: il y a deux facteurs négatifs, -3 et -2, donc le produit est positif.

(d) Il y a trois « − », un nombre impair : j'écris −.

(e) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. Or $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ ne s'annule jamais. Il reste $x - 10 = 0 \iff x = 10$: seule solution, $x = 10$.

Ex. 9 **(suite)**

(f) Pour $x = -8$: $0^2 \times 13 = 0$. Pour $x = -10$: $(-2)^2 \times 15 = 4 \times 15 = 60 > 0$: le carré est positif, il ne change pas le signe.

Ex. 10 ★★☆ **Le tableau de Malik**

(a) Première erreur : les valeurs sont mal rangées, car $-5 < \frac{2}{3}$. Seconde erreur : $2 - 3x$ s'annule en $\frac{2}{3}$ avec un coefficient $-3 < 0$: ce facteur est positif à gauche de $\frac{2}{3}$ et négatif à droite. Malik a inversé ces signes.

(b) $x + 5$ s'annule en -5 ($a = 1 > 0$) et $2 - 3x$ en $\frac{2}{3}$ ($a = -3 < 0$).

x	-∞	-5	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$x + 5$	$-$	0	$+$		$+$
$2 - 3x$	$+$		$+$	0	$-$
P(x)	$-$	0	$+$	0	$-$

$P(x)$ est négatif, puis positif sur $\left]-5\,;\frac{2}{3}\right[$, puis négatif.

(c) D'après le tableau, $P(x) > 0$ sur $\left]-5\,;\frac{2}{3}\right[$ et $P(x) = 0$ en -5 et en $\frac{2}{3}$, valeurs que l'on garde (inégalité large). Donc $S = \left[-5\,;\frac{2}{3}\right]$.

(d) -3 est toujours négatif, $x + 1$ s'annule en -1 ($a = 1 > 0$) et $(x - 6)^2$ est positif, nul en 6.

x	-∞	-1	6	$+\infty$	
-3	$-$		$-$		$-$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x - 6)^2$	$+$		$+$	0	$+$
Q(x)	$+$	0	$-$	0	$-$

$Q(x)$ est positif sur $]-\infty\,;-1[$ et négatif sur $]-1\,;6[\cup]6\,;+\infty[$. Il est nul en -1 et en 6.

Ex. 11 ★★☆ **Factoriser avant de dresser le tableau**

(a) $A(x) = x(x - 7)$. Les facteurs s'annulent en 0 et en 7, avec des coefficients positifs.

x	-∞	0	7	$+\infty$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x - 7$	$-$		$-$	0	$+$
A(x)	$+$	0	$-$	0	$+$

$A(x)$ est négatif sur $]0\,;7[$ et positif ailleurs, sauf en 0 et en 7, où il est nul.

Ex. 11 **(suite)**

(b) $B(x) = 7^2 - x^2 = (7 - x)(7 + x)$. $7 + x$ s'annule en -7 ($a = 1 > 0$) et $7 - x$ en 7 ($a = -1 < 0$).

x	-∞	-7	7	$+\infty$	
$7 + x$	$-$	0	$+$		$+$
$7 - x$	$+$		$+$	0	$-$
B(x)	$-$	0	$+$	0	$-$

L'inégalité est stricte, donc on exclut -7 et 7 : $S =]-7\,;7[$.

(c) $C(x) = (x - 1)\left[(2x + 3) - 4\right] = (x - 1)(2x - 1)$. Les facteurs s'annulent en $\frac{1}{2}$ et en 1, avec $\frac{1}{2} < 1$.

x	-∞	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
C(x)	$+$	0	$-$	0	$+$

L'inégalité est large, donc on garde les zéros : $S = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

(d) Non. Pour $x = -1$: $(-1)^2 \times (-7) = -7 < 0$, mais $(-1) \times (-7) = 7 > 0$. Le facteur x^2 est positif (nul en 0), alors que x change de signe en 0.

x	-∞	0	6	$+\infty$	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$x - 6$	$-$		$-$	0	$+$
$x^2(x - 6)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Sur $]-\infty\,;0[$, les deux produits n'ont pas le même signe.

Ex. 11 **(suite)**

(e) $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 5 \geqslant 5 > 0$: ce facteur ne change aucun signe. $3x + 6$ s'annule en -2 ($a = 3 > 0$).

x	-∞	-2	$+\infty$
$x^2 + 5$	$+$		$+$
$3x + 6$	$-$	0	$+$
produit	$-$	0	$+$

Le produit est négatif sur $]-\infty\,;-2[$, nul en -2 et positif sur $]-2\,;+\infty[$.

Ex. 12 ★★★ **Le bénéfice de l'atelier de poterie**

(a) $(x-3)(x-15) = x^2 - 15x - 3x + 45 = x^2 - 18x + 45$. Donc $-2(x-3)(x-15) = -2x^2 + 36x - 90 = B(x)$.

(b) Non. $B(10) = -2 \times (10-3) \times (10-15) = -2 \times 7 \times (-5) = 70 > 0$: pour 1 000 bols vendus, le bénéfice est de 7 000 €. Le signe d'un produit ne dépend pas d'un seul facteur : il faut compter tous les « − » (ici trois, -2, 7 et -5 en contiennent deux, nombre pair). Léa a donc tort.

(c) Le facteur -2 est toujours négatif. $x-3$ s'annule en 3 et $x-15$ s'annule en 15 ; leur coefficient $a = 1 > 0$: négatif, puis positif. On range $0 < 3 < 15 < 20$.

x	0	3	15	20	
-2	−		−		−
x − 3	−	0	+		+
x − 15	−		−	0	+
B(x)	−	0	+	0	−

Sur $]3\,;15[$, il y a deux « − » (nombre pair), donc $B(x) > 0$. Sur les deux autres intervalles, il y en a trois ou un (nombre impair), donc $B(x) < 0$.

(d) D'après le tableau, $B(x) > 0$ si et seulement si $x \in]3\,;15[$. Les crochets sont ouverts car $B(3) = B(15) = 0$. L'atelier réalise donc un bénéfice strictement positif quand il vend strictement entre 300 et 1 500 bols par mois.

Ex. 13 ★★★ **Un carré et un facteur toujours positif**

(a) Un carré est positif ou nul : $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Le carré $(x-4)^2$ est strictement positif pour $x \neq 4$ et il est nul en $x = 4$.

(b) $x^2 + 1$ ne s'annule jamais. $(x-4)^2$ s'annule en 4. $3 - 2x$ s'annule en $\frac{3}{2}$, avec $a = -2 < 0$: positif, puis négatif. On range $\frac{3}{2} < 4$.

x	-∞	$\frac{3}{2}$	4	+∞	
x^2+1	+		+		+
$(x-4)^2$	+		+	0	+
3 − 2x	+	0	−		−
P(x)	+	0	−	0	−

(c) $P(x) \geqslant 0$ quand $x \leqslant \frac{3}{2}$ ou quand $x = 4$: $S =]-\infty\,;\frac{3}{2}] \cup \{4\}$. Pour $P(x) > 0$, on enlève les valeurs qui annulent : $S =]-\infty\,;\frac{3}{2}[$.

(d) Faux. Contre-exemple $x = 4$: $P(4) = 17 \times 0 \times (-5) = 0$, mais $3 - 2 \times 4 = -5 < 0$. Le carré ne change pas le signe, mais il ajoute un 0 en 4.

Ex. 14 ★★★ **Noé enlève les carrés**

(a) Pour $x = -5$: $(2 \times (-5) - 1)^2 = (-11)^2 = 121$ et $(-5+4)^2 = (-1)^2 = 1$. Comme $121 \leqslant 1$ est faux, -5 n'est pas solution. Pourtant $-5 \leqslant 5$, donc Noé le compte comme solution. Son raisonnement est faux : quand les nombres sont négatifs, $a^2 \leqslant b^2$ n'équivaut pas à $a \leqslant b$.

(b) L'inéquation équivaut à $(2x-1)^2 - (x+4)^2 \leqslant 0$. Avec $a = 2x - 1$ et $b = x + 4$: $(2x-1)^2 - (x+4)^2 = (2x - 1 - x - 4)(2x - 1 + x + 4) = (x-5)(3x+3)$.

(c) $x - 5$ s'annule en 5, avec $a = 1 > 0$. $3x + 3$ s'annule en $\frac{-3}{3} = -1$, avec $a = 3 > 0$. On range $-1 < 5$.

x	-∞	-1	5	+∞	
x − 5	−		−	0	+
3x + 3	−	0	+		+
produit	+	0	−	0	+

(d) Le produit est négatif ou nul sur $[-1\,;5]$. Les crochets sont fermés car l'inégalité est large et le produit vaut 0 en -1 et en 5.
Donc $S = [-1\,;5]$. Noé avait trouvé $]-\infty\,;5]$: il comptait à tort tous les réels $x < -1$ comme solutions, par exemple -5.

3. *Tableau de signes d'un quotient et valeurs interdites*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : valeurs interdites et ensemble de définition**

(a) $2x - 7 = 0 \iff x = \frac{7}{2}$. La valeur interdite est $\frac{7}{2}$.

(b) $9 - 3x = 0 \iff x = \frac{-9}{-3} = 3$. Le quotient est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(c) $x + 6 = 0 \iff x = -6$ et $3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$. Les valeurs interdites sont -6 et $\frac{1}{3}$.

(d) Non : $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 4 \geqslant 4 > 0$. Le dénominateur ne s'annule jamais et le quotient est défini sur $\mathbb{R}$.

(e) Non. En -3, le numérateur vaut 0 et le dénominateur vaut $-4 \neq 0$: le quotient existe et vaut 0. La seule valeur interdite est 1.

(f) Le dénominateur s'annule en 2 et en -5. Le quotient est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\,;2\}$. La valeur 2 est exclue, même si elle annule aussi le numérateur.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : signe et nullité d'un quotient**

(a) 0 est une valeur interdite. Si $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$.
Donc sur $]-\infty\,;0[$.

(b) $\frac{5+6}{2-5} = \frac{11}{-3} < 0$: le quotient est négatif, bien que le numérateur soit positif.

(c) $3x - 12 = 0 \iff x = 4$ et, en 4, le dénominateur vaut $5 \neq 0$. Le quotient est nul pour $x = 4$.

(d) $5x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}$: c'est une valeur interdite. Le quotient est nul seulement pour $x = -7$
(le dénominateur y vaut $-37 \neq 0$).

(e) $\frac{(-5-4)^2}{-5+3} = \frac{81}{-2} < 0$: le quotient est négatif. Un carré au numérateur ne suffit pas : hors des valeurs où il s'annule, le quotient a le signe du dénominateur.

(f) $x - 1 = -1 < 0$, $x + 2 = 2 > 0$, $x - 5 = -5 < 0$: deux facteurs négatifs, donc le quotient est positif
(il vaut $\frac{1}{10}$).

Ex. 17 ★★☆ **Compléter un tableau et corriger une erreur**

(a) $4 - 2x = 0 \iff x = 2$. La valeur interdite est 2 et q est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) $x + 5$ s'annule en -5 et $a = 1 > 0$: $-$ puis $+$. $4 - 2x$ s'annule en 2 et $a = -2 < 0$: $+$ puis $-$. On applique la règle des signes.

x	-∞	-5	2	+∞	
x + 5	−	0	+	+	+
4 − 2x	+	+	+	0	−
q(x)	−	0	+	‖	−

(c) En 2, c'est le dénominateur qui s'annule : son 0 va dans la ligne de $4 - 2x$. Le quotient n'existe pas en 2 : on met une double barre ‖, pas un 0.

(d) $q(x)$ est positif sur $]-5\,;2[$ et nul en -5. On ferme le crochet en -5 et on l'ouvre en 2 (valeur interdite).
$S = [-5\,;2[$.

Ex. 18 ★★☆ **Un carré au numérateur**

(a) $x + 1 = 0 \iff x = -1$. La valeur interdite est -1 et r est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ex. 18 **(suite)**

(b) $(2x-3)^2$ est un carré : il est positif, nul seulement en $\frac{3}{2}$.
$x + 1$ s'annule en -1 et $a = 1 > 0$.

x	-∞	-1	$\frac{3}{2}$	+∞	
$(2x-3)^2$	+	+	+	0	+
x + 1	−	0	+	+	+
r(x)	−	‖	+	0	+

(c) Faux. Contre-exemple : $r(-2) = \frac{(-7)^2}{-1} = -49 < 0$. Le quotient a le signe du dénominateur, sauf en $\frac{3}{2}$, où il est nul.

(d) $r(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-1[$ et $r(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$. La valeur -1 est exclue. $S =]-\infty\,;-1[\cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Ex. 19 ★★★ **Inéquation quotient : ne pas multiplier à l'aveugle**

(a) Le dénominateur s'annule quand
$x + 4 = 0 \iff x = -4$. La valeur interdite est -4 et l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

(b) Pour $x = -5$: $\frac{5\times(-5)-2}{-5+4} = \frac{-27}{-1} = 27 \geqslant 3$.
Donc -5 est solution, alors que $-5 \geqslant 7$ est faux.
L'erreur : $x + 4$ peut être négatif (ici -1). Quand on multiplie par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change. On ne connaît pas le signe de $x + 4$, donc on ne multiplie pas par $x + 4$.

(c) $Q(x) = \frac{5x-2}{x+4} - \frac{3(x+4)}{x+4} = \frac{5x-2-3x-12}{x+4} = \frac{2x-14}{x+4}$, pour $x \neq -4$. L'inéquation équivaut à $Q(x) \geqslant 0$.

(d) $2x - 14 = 0 \iff x = 7$ et le coefficient $2 > 0$: la ligne vaut $-$ puis $+$. $x + 4 = 0 \iff x = -4$ et le coefficient $1 > 0$: la ligne vaut $-$ puis $+$, avec son 0 en -4.

x	-∞	-4	7	+∞	
2x − 14	−	−	−	0	+
x + 4	−	0	+	+	+
Q(x)	+	‖	−	0	+

$Q(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-4[$ et sur $[7\,;+\infty[$. Le crochet est ouvert en -4 (valeur interdite, jamais solution, même si l'inégalité est large) et fermé en 7 (le quotient y vaut 0).
Conclusion : $S =]-\infty\,;-4[\cup [7\,;+\infty[$.

Ex. 20 ★★★ **Une valeur commune au numérateur et au dénominateur**

(a) $12 - 2x = 0 \iff x = \frac{-12}{-2} = 6$. La valeur interdite est 6 et l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.

(b) Avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x-6)(x+6)$.

Ex. 20 **(suite)**

(c) $x-6$ s'annule en 6, son coefficient vaut $1>0$: $-$ puis $+$. $x+6$ s'annule en -6, son coefficient vaut $1>0$: $-$ puis $+$. $12-2x$ s'annule en 6, son coefficient vaut $-2<0$: $+$ puis $-$.

x	-∞	-6	6	+∞	
x − 6	−	−	−	0	+
x + 6	−	0	+	+	+
12 − 2x	+	+	+	0	−
h(x)	+	0	−	‖	−

En 6, le numérateur s'annule aussi, mais 6 est une valeur interdite : on met une double barre et non un 0.

(d) Non. Un quotient est nul si son numérateur est nul et son dénominateur non nul. En -6 :
$12-2\times(-6)=24\neq 0$, donc $h(-6)=0$. En 6 : le dénominateur est nul, donc $h(6)$ n'existe pas.
L'ensemble des solutions de $h(x)=0$ est $S=\{-6\}$.

(e) D'après le tableau, $h(x)<0$ sur $]-6\,;6[$ et sur $]6\,;+\infty[$. Le crochet est ouvert en -6 (h y est nulle) et en 6 (valeur interdite). Conclusion : $S=]-6\,;6[\cup]6\,;+\infty[$.

Ex. 21 ★★★ **Position relative de deux courbes à l'aide d'un quotient**

(a) g est définie si $x\neq 0$: l'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Comme $16>0$, $g(x)$ a le signe de x, comme $\frac{1}{x}$. Donc $g(x)>0$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Pour $x\neq 0$: $f(x)-g(x)=x-\frac{16}{x}=\frac{x^2-16}{x}=\frac{(x-4)(x+4)}{x}$, avec $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

(c) $x-4$ s'annule en 4 ; $x+4$ s'annule en -4 ; le dénominateur x s'annule en 0 (valeur interdite). Les trois coefficients valent $1>0$, donc chaque ligne vaut $-$ puis $+$.

x	-∞	-4	0	4	+∞		
x − 4	−	−	−	−	−	0	+
x + 4	−	0	+	+	+	+	+
x	−	−	−	0	+	+	+
f(x) − g(x)	−	0	+	‖	−	0	+

(d) Non. Le signe d'un quotient ne se lit pas sur le numérateur seul. Pour $x=-1$, le dénominateur vaut aussi $-1<0$.
Donc $f(-1)-g(-1)=\frac{-15}{-1}=15>0$: en $x=-1$, C_f est au-dessus de C_g.

Ex. 21 **(suite)**

(e) C_f est au-dessous de C_g sur $]-\infty\,;-4[$ et sur $]0\,;4[$. Elle est au-dessus sur $]-4\,;0[$ et sur $]4\,;+\infty[$. Les courbes se coupent quand $f(x)-g(x)=0$, c'est-à-dire en $x=-4$ et en $x=4$. Comme $f(-4)=-4$ et $f(4)=4$, les points d'intersection sont $(-4\,;-4)$ et $(4\,;4)$.

4. *Inéquations produit*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : produit nul et signe en un point**

(a) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $3x-6=0$ ou $x+4=0$, donc $x=2$ ou $x=-4$. $S=\{-4\,;2\}$.

(b) $x=0$ ou $5-2x=0$, donc $x=0$ ou $x=\frac{5}{2}$. $S=\{0\,;\frac{5}{2}\}$.

(c) $x^2-7x=0\iff x(x-7)=0\iff x=0$ ou $x=7$. $S=\{0\,;7\}$. Diviser par x aurait fait perdre la solution 0.

(d) $x^2-36=(x-6)(x+6)=0\iff x=6$ ou $x=-6$. $S=\{-6\,;6\}$.

(e) $(2\times 5-9)(4-5)=1\times(-1)=-1$: le produit est négatif.

(f) $(-10+3)^2=49>0$ et $-10-1=-11<0$: le produit vaut -539, il est négatif.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : choisir les bons crochets**

(a) $x-5$ s'annule en 5 et $x+6$ en -6. Leurs coefficients valent $1>0$, donc $(x-5)(x+6)$ est « $+$ » avant -6, « $-$ » entre -6 et 5, puis « $+$ » après 5. Comme $-3<0$, le produit $-3(x-5)(x+6)$ a le signe contraire : il est strictement positif entre -6 et 5. L'inégalité est stricte, donc les crochets sont ouverts : $S=]-6\,;5[$.

(b) $2x-3$ s'annule en $\frac{3}{2}$ et $x+1$ en -1. Les deux coefficients sont positifs, donc le produit est « $+$ » avant -1, « $-$ » entre -1 et $\frac{3}{2}$, puis « $+$ » après $\frac{3}{2}$. Avec $\leqslant$, les crochets sont fermés : $S=[-1\,;\frac{3}{2}]$.

(c) $x^2-64\geqslant 0\iff(x-8)(x+8)\geqslant 0$: positif à l'extérieur de -8 et 8. $S=]-\infty\,;-8]\cup[8\,;+\infty[$, avec des crochets ouverts en $\pm\infty$. Par exemple, -10 convient.

(d) Un carré est positif ou nul, et il ne s'annule qu'en -5. Inégalité stricte : $S=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$.

Ex. 23 **(suite)**

(e) $x-3$ s'annule en 3 ($a=1>0$) et $6-x$ s'annule en 6 ($a=-1<0$). Le produit est négatif, puis positif, puis négatif. On garde l'intervalle du milieu, bornes comprises : $S=[3\,;6]$.

Ex. 24 ★★☆ **Un facteur commun dans les deux membres**

(a) Pour $x=-3$, le membre de gauche vaut $(-1)\times(-10)=10$ et le membre de droite vaut $(-1)\times 2=-2$. Comme $10\leqslant -2$ est faux, -3 n'est pas solution, alors que $-3\leqslant 3$. Pour $x<-2$, le facteur $x+2$ est négatif : diviser par ce facteur change le sens de l'inégalité.

(b) On passe tout à gauche : $(x+2)(3x-1)-(x+2)(x+5)\leqslant 0$. On met $x+2$ en facteur : $(x+2)[(3x-1)-(x+5)]=(x+2)(2x-6)$. L'inéquation équivaut donc à $(x+2)(2x-6)\leqslant 0$.

(c) $x+2$ s'annule en -2 et $2x-6$ s'annule en $\frac{6}{2}=3$. Les deux coefficients sont positifs, donc chaque facteur est négatif à gauche de sa valeur et positif à droite.

x	-∞	-2	3	+∞
x + 2	−	0	+	+
2x − 6	−	−	0	+
produit	+	0	−	0	+

(d) On garde les « $-$ » et les 0, car l'inégalité est large : $S=[-2\,;3]$.

(e) Pour $x=0$: $2\times(-1)=-2$ et $2\times 5=10$, et $-2\leqslant 10$ est vrai ($0\in S$). Pour $x=4$: $6\times 11=66$ et $6\times 9=54$, et $66\leqslant 54$ est faux ($4\notin S$). Les deux tests confirment le résultat.

Ex. 25 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) $49-4\times(-5)^2=49-100=-51<0$: -5 n'est pas solution, alors qu'il appartient à l'ensemble d'Inès. Passer de $4x^2<49$ à $2x<7$ fait perdre la condition sur les x négatifs.

(b) $49-4\times(\frac{7}{2})^2=49-49=0$, et $0>0$ est faux. L'inégalité est stricte : le crochet doit être ouvert en $\frac{7}{2}$.

(c) On reconnaît a^2-b^2 avec $a=7$ et $b=2x$: $49-4x^2=(7-2x)(7+2x)$.

Ex. 25 **(suite)**

(d) $7+2x$ s'annule en $-\frac{7}{2}$ (coefficient $2>0$). $7-2x$ s'annule en $\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}$ (coefficient $-2<0$, donc « $+$ » puis « $-$ »).

x	-∞	$-\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	+∞
7 + 2x	−	0	+	+
7 − 2x	+	+	0	−
produit	−	0	+	0	−

L'expression est strictement positive entre les deux valeurs, crochets ouverts : $S=]-\frac{7}{2}\,;\frac{7}{2}[$.

Ex. 26 ★★★ **Le bénéfice d'un atelier de bougies**

(a) $-2(x-4)(x-10)=-2(x^2-10x-4x+40)=-2(x^2-14x+40)=-2x^2+28x-80=B(x)$. L'égalité est vérifiée.

(b) $-2<0$ sur tout l'intervalle. $x-4$ s'annule en 4 et $x-10$ en 10 ; leurs coefficients valent $1>0$, donc chaque facteur est « $-$ » à gauche de sa valeur et « $+$ » à droite.

x	0	4	10	12
−2	−	−	−	
x − 4	−	0	+	+
x − 10	−	−	0	+
B(x)	−	0	+	0	−

On garde les « $+$ ». Les crochets sont ouverts, car $B(4)=B(10)=0$ et 0 n'est pas >0 : $S=]4\,;10[$. L'atelier est bénéficiaire pour une production strictement comprise entre 400 et 1 000 bougies.

(c) $B(x)-16=-2x^2+28x-96$ et $2-2(x-7)^2=2-2(x^2-14x+49)=-2x^2+28x-96$: l'égalité est vérifiée. Ensuite $2-2(x-7)^2=2\big[1^2-(x-7)^2\big]=2\big[1-(x-7)\big]\big[1+(x-7)\big]=2(8-x)(x-6)$.

(d) On compare à 0 : $B(x)\geqslant 16 \iff B(x)-16\geqslant 0 \iff 2(8-x)(x-6)\geqslant 0$. $8-x$ s'annule en 8 et son coefficient vaut $-1<0$: il est « $+$ » avant 8 et « $-$ » après. $x-6$ s'annule en 6 et son coefficient vaut $1>0$.

x	0	6	8	12
8 − x	+	+	0	−
x − 6	−	0	+	+
B(x) − 16	−	0	+	0	−

Pour « $\geqslant$ », les crochets sont fermés, puisque $B(6)=B(8)=16$: $S=[6\,;8]$. Maëlle gagne au moins 1 600 € quand elle produit entre 600 et 800 bougies.

Ex. 27 ★★★ **Comparer deux carrés**

(a) Avec $a = 2x+1$ et $b = x+5$: $E(x) = (2x+1-x-5)(2x+1+x+5) = (x-4)(3x+6)$.

(b) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x-4=0$ ou $3x+6=0$, c'est-à-dire $x=4$ ou $x = -\frac{6}{3} = -2$.
Donc $S = \{-2\,;4\}$.

(c) Les deux facteurs ont un coefficient positif (1 et 3) : chacun est « $-$ » à gauche de sa valeur qui l'annule et « $+$ » à droite.

x	-∞	-2	4	+∞	
3x + 6	−	0	+	+	
x − 4	−	−	0	+	
E(x)	+	0	−	0	+

(d) On compare à 0 : $(2x+1)^2 < (x+5)^2 \iff E(x) < 0$. On garde l'intervalle « $-$ ». Les crochets sont ouverts, car l'inégalité est stricte et $E(-2) = E(4) = 0$:
$S =]-2\,;4[$.

(e) Pour $x=-3$: $(2\times(-3)+1)^2 = 25$ et $(-3+5)^2 = 4$. Or $25 < 4$ est faux, alors que $-3 < 4$. Lucas a « enlevé les carrés », mais deux carrés ne se comparent pas comme les nombres eux-mêmes quand ces nombres peuvent être négatifs (ici $2x+1 = -5$). Il faut tout passer dans un membre et factoriser, comme à la question précédente.

Ex. 28 ★★★ **Vrai ou faux sur les inéquations produit**

(a) Faux. Pour $x=-1$: $(-1)^2 = 1$ et $2\times(-1) = -2$, donc $1 > -2$ est vrai, alors que $-1 < 2$. On ne divise pas par x, dont le signe change. On écrit plutôt $x^2 - 2x > 0$, soit $x(x-2) > 0$. Les deux facteurs ont un coefficient positif : le produit est « $+$ » avant 0, « $-$ » entre 0 et 2, puis « $+$ » après 2. L'inégalité est stricte :
$S =]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$.

Ex. 28 **(suite)**

(b) Faux. Contre-exemple : $(4-x)(2x+6)$ s'annule en 4 et en -3. Pour $x=5$, à l'extérieur de ces valeurs, il vaut $(-1)\times 16 = -16 < 0$. Le signe dépend des coefficients de x : ici celui de $4-x$ vaut $-1 < 0$.

x	-∞	-3	4	+∞	
4 − x	+	+	0	−	
2x + 6	−	0	+	+	
produit	−	0	+	0	−

Ce produit est positif entre -3 et 4 : par exemple, $(4-x)(2x+6) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $[-3\,;4]$. Il faut toujours dresser le tableau de signes.

(c) Vrai. $(x-1)^2 \geqslant 0$ pour tout x : le produit a le signe de $x+3$, sauf en 1, où il vaut 0. Pour $x < -3$, il est négatif (avec $x=-4$: $25\times(-1) = -25$). Pour $x \geqslant -3$, il est positif ou nul, et les zéros -3 et 1 sont acceptés par « $\geqslant$ ».
Donc $S = [-3\,;+\infty[$, ouvert en $+\infty$.

(d) Faux. Pour $x=1$: $(1-1)^2\times(1+3) = 0$, et $0 > 0$ est faux, alors que $1 \in]-3\,;+\infty[$. Le facteur carré s'annule en 1 : $S =]-3\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

(e) Faux. Pour $x=8$: $(8-3)(8+1) = 45 \neq 5$. La règle du produit nul ne marche qu'avec 0 : il faut d'abord tout passer dans un membre. On développe : $(x-3)(x+1) - 5 = x^2 - 2x - 8$, et $(x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8$. L'équation équivaut donc à $(x-4)(x+2) = 0$, d'où $x=4$ ou $x=-2$. Vérification : $(4-3)(4+1) = 5$ et $(-2-3)(-2+1) = 5$.

5. *Inéquations quotient*

Ex. 29 ★☆☆ **Valeurs interdites et valeurs qui annulent**

(a) $x+5=0 \iff x=-5$: la valeur interdite est -5.

(b) Le numérateur s'annule pour $3x-2=0$, soit $x=\frac{2}{3}$ (et $\frac{2}{3} \neq 5$, donc ce n'est pas une valeur interdite).

(c) $2x+9=0 \iff x=-\frac{9}{2}$: l'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{9}{2}\}$.

(d) Pour $x=0$: $\frac{0-11}{0+13} = -\frac{11}{13}$, le quotient est négatif.

(e) Le carré s'annule pour $2x-1=0$, soit $x=\frac{1}{2}$; la valeur interdite est 9
(car $x-9=0 \iff x=9$).

(f) Non : $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+2 \geqslant 2 > 0$, le dénominateur ne s'annule jamais. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Du tableau aux crochets**

(a) $10-2x=0 \iff x=5$. Le coefficient de x est $-2<0$: $10-2x$ est positif avant 5 et négatif après.

(b) $x+7=0 \iff x=-7$: valeur interdite -7. Le coefficient 1 est positif : $x+7$ est négatif avant -7 et positif après.

(c)

x	$-\infty$	-7	5	$+\infty$	
$10-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$
f(x)	$-$	‖	$+$	0	$-$

(d) On garde le « $+$ » et le 0 en 5, jamais la double barre en -7 : $S=]-7\,;5]$.

(e) On garde les « $-$ » (sans les bornes) : $S=]-\infty\,;-7[\cup]5\,;+\infty[$.

(f) $f(0)=\frac{10}{7}>0$ et $0\in]-7\,;5[$: cohérent. $f(-8)=\frac{26}{-1}=-26<0$ et $-8<-7$: cohérent.

Ex. 31 ★★☆ **Le produit en croix de Lina**

(a) $\frac{3\times(-3)-1}{-3+2}=\frac{-10}{-1}=10$ et $10>2$: -3 n'est pas solution. Pourtant $-3\leqslant 5$: il est dans l'ensemble de Lina, donc sa réponse est fausse.

(b) Elle a multiplié par $x+2$, dont le signe est inconnu : pour $x<-2$, $x+2<0$ et le sens de l'inégalité change. De plus, -2 est une valeur interdite et ne peut pas être solution.

(c) $\frac{3x-1}{x+2}-2=\frac{3x-1-2(x+2)}{x+2}=\frac{3x-1-2x-4}{x+2}=\frac{x-5}{x+2}$.

(d) L'inéquation équivaut à $\frac{x-5}{x+2}\leqslant 0$. $x-5$ s'annule en 5, $x+2$ en -2 (valeur interdite), coefficients positifs.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
quotient	$+$	‖	$-$	0	$+$

On garde les « $-$ » et le 0 en 5, pas -2. L'ensemble des solutions est $S=]-2\,;5]$.

Ex. 32 ★★☆ **Un carré au dénominateur**

(a) $x-8=0 \iff x=8$: $D=\mathbb{R}\setminus\{8\}$.

(b) $x^2-36=x^2-6^2=(x-6)(x+6)$.

(c) Un carré est positif ou nul ; il ne s'annule qu'en 8, exclu de D.
Donc $(x-8)^2>0$ sur D.

Ex. 32 (suite)

(d) $x-6$ s'annule en 6, $x+6$ en -6 (coefficients positifs), 8 est interdite.

x	$-\infty$	-6	6	8	$+\infty$		
$x-6$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+6$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-8)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
f(x)	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$

(e) $f(x)>0$: on garde les « $+$ » sans les 0 et sans 8 : $S=]-\infty\,;-6[\cup]6\,;8[\cup]8\,;+\infty[$. $f(x)\leqslant 0$: le « $-$ » et les deux 0 : $S=[-6\,;6]$.

Ex. 33 ★★★ **Une question de DS, étape par étape**

(a) $2-x=0 \iff x=2$. La valeur interdite est 2.
Donc $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(b) Pour $x\neq 2$: $f(x)+1=\frac{3x+1+(2-x)}{2-x}=\frac{2x+3}{2-x}$.
$2x+3=0 \iff x=-\frac{3}{2}$, coefficient $2>0$: $-$ puis $+$.
$2-x=0 \iff x=2$, coefficient $-1<0$: $+$ puis $-$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$	
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
f(x) + 1	$-$	0	$+$	‖	$-$

(c) $f(x)\geqslant -1 \iff f(x)+1\geqslant 0$. On garde le « $+$ » et le 0 du numérateur : $S_1=\left[-\frac{3}{2}\,;2\right[$. Malo a tort : $f(2)$ n'existe pas. Une valeur interdite est toujours exclue, avec un crochet ouvert, même pour « $\geqslant$ ».

(d) $f(x)-3=\frac{3x+1-3(2-x)}{2-x}=\frac{3x+1-6+3x}{2-x}=\frac{6x-5}{2-x}$.
$6x-5=0 \iff x=\frac{5}{6}$, coefficient $6>0$: $-$ puis $+$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	2	$+\infty$	
$6x-5$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
f(x) − 3	$-$	0	$+$	‖	$-$

On garde les « $-$ » et le 0, pas 2 :
$S_2=\left]-\infty\,;\frac{5}{6}\right]\cup]2\,;+\infty[$.

(e) S réunit les réels qui sont à la fois dans S_1 et dans S_2 : $S=\left[-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{6}\right]$. Contrôle : $f(0)=\frac{1}{2}$ et $-1\leqslant\frac{1}{2}\leqslant 3$, c'est cohérent car $0\in S$. $f(3)=\frac{10}{-1}=-10<-1$, c'est cohérent car $3\notin S$.

Ex. 34 ★★★ **Le taux de réussite de Zoé**

(a) $T(0) = \frac{12}{20} = 0{,}6$ et $T(5) = \frac{17}{25} = 0{,}68$.

(b) $T(x) - 0{,}8 = \frac{12+x}{20+x} - \frac{4}{5} = \frac{5(12+x)-4(20+x)}{5(20+x)} = \frac{60+5x-80-4x}{5(x+20)} = \frac{x-20}{5(x+20)}$.

(c) $x - 20 = 0 \iff x = 20$, et le coefficient est positif. $5x + 100 = 0 \iff x = -20$ (valeur interdite), et le coefficient est positif.

x	-∞	−20	20	+∞	
x − 20	−	−	−	0	+
5x + 100	−	0	+	+	+
T(x) − 0,8	+	‖	−	0	+

On garde les « + » et le 0, mais pas la double barre : $S =]-\infty\,;-20[\cup [20\,;+\infty[$.

(d) Ici $x \geqslant 0$, donc on ne garde que $[20\,;+\infty[$. Il lui faut au moins 20 lancers réussis de suite. Vérification : $T(20) = \frac{32}{40} = 0{,}8$, alors que $T(19) = \frac{31}{39} < 0{,}8$.

(e) $T(x) - 1 = \frac{12+x-(20+x)}{20+x} = \frac{-8}{20+x}$. Pour $x \geqslant 0$, on a $20 + x > 0$, donc $T(x) - 1 < 0$, soit $T(x) < 1$. Sami a tort : Zoé n'atteindra jamais 100 %.

Ex. 35 ★★★ **Une hyperbole et une droite**

(a) La valeur interdite est 0, donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $x \neq 0$: $f(x) - g(x) = \frac{3-x(x+2)}{x} = \frac{-x^2-2x+3}{x}$. De plus, $(1-x)(x+3) = x + 3 - x^2 - 3x = -x^2 - 2x + 3$. Les deux expressions sont donc égales.

(b) $1 - x = 0 \iff x = 1$, coefficient négatif : + puis −. $x + 3 = 0 \iff x = -3$, coefficient positif : − puis +. Le facteur x s'annule en 0 (valeur interdite).

x	-∞	−3	0	1	+∞		
1 − x	+	+	+	+	+	0	−
x + 3	−	0	+	+	+	+	+
x	−	−	−	0	+	+	+
f(x) − g(x)	+	0	−	‖	+	0	−

(c) C_f est au-dessus de D là où $f(x) - g(x) > 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;-3[\cup]0\,;1[$. C_f est en dessous de D sur $]-3\,;0[\cup]1\,;+\infty[$.

(d) Les courbes se coupent quand $f(x) - g(x) = 0$, soit pour $x = -3$ ou $x = 1$. On a $f(-3) = -1 = g(-3)$ et $f(1) = 3 = g(1)$. Les points d'intersection sont $(-3\,;-1)$ et $(1\,;3)$.

Ex. 35 (suite)

(e) Prenons $x = -1$. On a $3 > (-1)^2 + 2 \times (-1) = -1$: c'est vrai. Mais $\frac{3}{-1} = -3$ et $-3 > -1 + 2 = 1$ est faux. Inès a multiplié par x, dont le signe est inconnu. Pour $x < 0$, cela inverse le sens de l'inégalité.

6. *Lire un signe dans un tableau*

Ex. 36 ★☆☆ **Lire un tableau de signes**

(a) On prend l'intervalle marqué −, sans les valeurs −1 et 2 où f s'annule : $S =]-1\,;2[$.

(b) On ajoute les valeurs où f s'annule : $S = [-5\,;-1] \cup [2\,;6]$.

(c) 0 est dans $]-1\,;2[$, donc $f(0) < 0$. −4,5 est dans $[-5\,;-1[$, donc $f(-4{,}5) > 0$.

(d) C_f coupe l'axe aux abscisses où $f(x) = 0$, c'est-à-dire en −1 et en 2.

(e) Non. 3 est dans $]2\,;6]$, donc le tableau dit seulement que $f(3) > 0$. Il donne le signe, pas la valeur : on ne peut pas savoir si $f(3) > 1$.

(f) f n'est définie que sur $[-5\,;6]$: on ne peut pas parler de $-\infty$ ni de $+\infty$. La bonne réponse est $[-5\,;-1[\cup]2\,;6]$.

Ex. 37 ★☆☆ **Déduire un signe sans tableau de signes**

(a) g ne s'annule qu'en −4 et 5 : son signe ne change pas sur $]-\infty\,;-4[$, ni sur $]-4\,;5[$, ni sur $]5\,;+\infty[$. Comme $g(-7) < 0$, $g(0) > 0$ et $g(11) < 0$, g est négative, puis positive, puis négative. Les zéros comptent pour $\geqslant$: $S = [-4\,;5]$.

(b) Le minimum de h sur $[0\,;8]$ vaut $h(3) = 2$, et $2 > 0$. Donc $h(x) \geqslant 2 > 0$: $h(x) > 0$ pour tout x de $[0\,;8]$.

(c) p est décroissante et s'annule en 6. Si $x < 6$, alors $p(x) > p(6) = 0$. Si $x > 6$, alors $p(x) < 0$. Donc $p(x) > 0$ sur $]-\infty\,;6[$ et $p(x) < 0$ sur $]6\,;+\infty[$.

(d) Non, on ne peut pas conclure. Le tableau donne seulement k en quatre valeurs. Entre deux de ces valeurs, par exemple entre 0 et 2, k peut s'annuler et devenir négative.

Ex. 38 ★★☆ **Associer expressions et tableaux**

(a) $A(0) = (-4) \times 3 = -12$; $B(0) = 4 \times 3 = 12$; $C(0) = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$.

Ex. 38 **(suite)**

(b) $B(0) > 0$: seul le tableau 3 est positif en 0, donc B va avec le tableau 3. $A(0)$ et $C(0)$ sont négatifs, comme dans les tableaux 1 et 2. -3 est une valeur interdite de C ($\|$ en -3) : C va avec le tableau 1, et A avec le tableau 2.

(c) D'après le tableau 1, $C(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]4\,;+\infty[$, et $C(4) = 0$. -3 est interdite, donc le crochet est ouvert en -3. $S =]-\infty\,;-3[\cup]4\,;+\infty[$.

(d) Il faut deux facteurs qui s'annulent en -5 et en $\frac{1}{2}$. Prenons $g(x) = (x+5)(1-2x)$. Le facteur $x+5$ a un coefficient $1 > 0$: il est négatif avant -5 et positif après. Le facteur $1-2x$ a un coefficient $-2 < 0$: il est positif avant $\frac{1}{2}$ et négatif après. Par la règle des signes, le produit est $-$ sur $]-\infty\,;-5[$, $+$ sur $]-5\,;\frac{1}{2}[$ et $-$ sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$. Cette expression convient.

Ex. 39 ★★☆ **Position d'une parabole et d'une droite**

(a) $f(x) - g(x) = x^2 - 3x - 2x - 14 = x^2 - 5x - 14$. On développe : $(x-7)(x+2) = x^2 + 2x - 7x - 14 = x^2 - 5x - 14$. Les deux expressions sont égales.

(b) $x+2$ s'annule en -2 et $x-7$ s'annule en 7. Leur coefficient de x vaut $1 > 0$: chaque facteur est négatif à gauche de sa valeur et positif à droite.

x	-∞	-2	7	+∞	
x + 2	−	0	+		+
x − 7	−		−	0	+
f(x) − g(x)	+	0	−	0	+

(c) C_f est strictement au-dessus de C_g sur $]-\infty\,;-2[\cup]7\,;+\infty[$, et strictement au-dessous sur $]-2\,;7[$.

(d) Les zéros de la différence, -2 et 7, sont les abscisses des points d'intersection. $g(-2) = 10$ et $g(7) = 28$. Les points d'intersection sont $(-2\,;10)$ et $(7\,;28)$.

(e) Non. Le tableau donne le signe de $f(x) - g(x)$, pas celui de $f(x)$. Contre-exemple : 4 est dans $]-2\,;7[$ et $f(4) = 16 - 12 = 4 > 0$.

Ex. 40 ★★★ **Bénéfice d'une fabrique de bougies**

(a) $(x-2)(10-x) = 10x - x^2 - 20 + 2x = -x^2 + 12x - 20 = B(x)$.

Ex. 40 **(suite)**

(b) $x-2$ s'annule en 2 et son coefficient $1 > 0$: il est négatif avant 2 et positif après. $10-x$ s'annule en 10 et son coefficient $-1 < 0$: il est positif avant 10 et négatif après.

x	0	2	10	12	
x − 2	−	0	+		+
10 − x	+		+	0	−
B(x)	−	0	+	0	−

(c) $B(x) > 0 \iff x \in]2\,;10[$. $B(x) \leqslant 0 \iff x \in [0\,;2] \cup [10\,;12]$: on inclut 2 et 10 (zéros), ainsi que 0 et 12, car B y est définie et négative. Conclusion : la fabrique gagne de l'argent quand elle produit strictement entre 200 et 1 000 bougies par jour.

(d) $(x-3)(9-x) = 9x - x^2 - 27 + 3x = -x^2 + 12x - 27 = B(x) - 7$. $x-3$ s'annule en 3 (coefficient $1 > 0$) et $9-x$ s'annule en 9 (coefficient $-1 < 0$). Le produit est positif sur $]3\,;9[$ et négatif sur $[0\,;3[$ et sur $]9\,;12]$.
$B(x) \geqslant 7 \iff B(x) - 7 \geqslant 0 \iff x \in [3\,;9]$.
Conclusion : le bénéfice atteint au moins 7 000 € pour une production comprise entre 300 et 900 bougies par jour, bornes comprises.

Ex. 41 ★★★ **Retrouver une expression à partir de son tableau**

(a) On prend les intervalles marqués « + » et les zéros -6 et 8, mais on exclut la valeur interdite 1 :
$S = [-6\,;1[\cup[8\,;+\infty[$.

(b) Un produit de facteurs affines est défini pour tout réel x, donc en particulier en 1. Or le tableau indique ‖ en 1 : f n'est pas définie en 1. Aucun produit ne convient.

(c) On prend par exemple $f(x) = \frac{(x+6)(x-8)}{x-1}$. Les facteurs s'annulent en -6, en 8 et en 1 (valeur interdite, au dénominateur), et chacun a un coefficient de x positif.

x	-∞	-6	1	8	+∞		
x + 6	−	0	+		+		+
x − 8	−		−		−	0	+
x − 1	−		−	0	+		+
f(x)	−	0	+	‖	−	0	+

On retrouve exactement le tableau donné.

(d) Non. Les signes coïncident, mais 8 annule le dénominateur de g : 8 est une valeur interdite de g. Or le tableau indique 0 en 8 : f est définie en 8 et $f(8) = 0$. L'expression de Inès ne convient donc pas.

Ex. 42 ★★★ **Position d'une hyperbole et d'une droite**

(a) $x-2=0 \iff x=2$, donc f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ensuite, $f(x)-g(x)=\frac{6-(x-3)(x-2)}{x-2}=\frac{6-x^2+5x-6}{x-2}=\frac{-x^2+5x}{x-2}=\frac{x(5-x)}{x-2}$.

(b) x s'annule en 0. $5-x$ s'annule en 5 et son coefficient $-1<0$, donc il devient négatif après 5. $x-2$ s'annule en 2, qui est une valeur interdite.

x	-∞	0	2	5	+∞		
x	−	0	+		+		+
5 − x	+		+		+	0	−
x − 2	−		−	0	+		+
f(x) − g(x)	+	0	−	‖	+	0	−

(c) C_f est strictement au-dessus de C_g quand $f(x)-g(x)>0$, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;0[\cup]2\,;5[$. Le crochet est ouvert en 2, qui est une valeur interdite.

(d) La différence s'annule en 0 et en 5. On a $g(0)=-3$ et $f(0)=\frac{6}{-2}=-3$; puis $g(5)=2$ et $f(5)=\frac{6}{3}=2$. Les points d'intersection sont $(0\,;-3)$ et $(5\,;2)$.

(e) Non. Il oublie le dénominateur $x-2$, qui est négatif sur $]0\,;2[$. Contre-exemple : $f(1)=-6$ et $g(1)=-2$, donc $f(1)<g(1)$. Sur $]0\,;2[$, C_f est au-dessous de C_g.

7. *Comparer deux courbes par le signe d'une différence*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : la différence de deux fonctions**

(a) $f(x)-g(x)=x^2+2x-(5x-2)=x^2+2x-5x+2=x^2-3x+2$. Le $-$ porte sur tout $g(x)$, donc $-(-2)=+2$.

(b) $f(x)-g(x)=3x-1-x-5=2x-6$.
$2x-6=0 \iff x=3$. 3 est l'abscisse du point d'intersection de C_f et C_g.

(c) $f(x)-g(x)=2x+1+x-7=3x-6$, qui s'annule en $x=2$. Ordonnée : $f(2)=5$, et on vérifie que $g(2)=-2+7=5$. Le point d'intersection est $(2\,;5)$.

(d) $f(1)-g(1)=1-5=-4<0$.
Donc le point de C_f d'abscisse 1 est au-dessous de C_g.

(e) $f(x)-g(x)=\frac{2}{x}-\frac{x}{x}=\frac{2-x}{x}$. La valeur interdite est 0.
La différence s'annule en $x=2$
(le numérateur est nul et le dénominateur ne l'est pas).

Ex. 43 (suite)

(f) $f(x)-g(x)=-2x+3-x+6=-3x+9$. Elle s'annule en 3. Le coefficient de x est $-3<0$, donc la différence est positive à gauche de 3. C_f est strictement au-dessus de C_g sur $]-\infty\,;3[$.

Ex. 44 ★★☆ **Automatismes : lire une position dans un tableau de signes**

(a) $f(x)-g(x)>0$ sur $]-4\,;1[$: C_f est strictement au-dessus de C_g sur $]-4\,;1[$. Les crochets sont ouverts parce que la différence est nulle en -4 et en 1.

(b) $f(x)-g(x)<0$ sur $]-\infty\,;-4[\cup]1\,;+\infty[$: C_f y est strictement au-dessous de C_g.

(c) Ce sont les zéros de la différence : -4 et 1.

(d) Les ordonnées se calculent avec g : $g(-4)=-8+3=-5$ et $g(1)=2+3=5$. Les points sont $(-4\,;-5)$ et $(1\,;5)$.

(e) Non. $g(x)-f(x)=-(f(x)-g(x))$ a le signe contraire. Elle est donc négative sur $]-4\,;1[$ et positive sur $]-\infty\,;-4[\cup]1\,;+\infty[$. Si on calcule $g-f$ au lieu de $f-g$, la conclusion s'inverse.

Ex. 45 ★★☆ **Une parabole, une hyperbole et la droite y = x**

(a) $f(x)-g(x)=x^2-x=x(x-1)$. x s'annule en 0 et $x-1$ s'annule en 1 ; leurs coefficients sont positifs.

x	-∞	0	1	+∞	
x	−	0	+	+	
x − 1	−	−	0	+	
f(x) − g(x)	+	0	−	0	+

(b) C_f est au-dessus de la droite sur $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ et au-dessous sur $]0\,;1[$. Les points d'intersection sont $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$, car $g(0)=0$ et $g(1)=1$.

(c) $h(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x}=\frac{1-x^2}{x}$. D'autre part, $(1-x)(1+x)=1+x-x-x^2=1-x^2$. L'égalité est donc vraie pour $x\neq 0$.

(d) Non. Elle a oublié le dénominateur x. Pour $x=-\frac{1}{2}$, le numérateur vaut $\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}>0$, mais $x<0$, donc le quotient est négatif : C_h est au-dessous de C_g sur $]-1\,;0[$. De plus, 0 est une valeur interdite : $]-1\,;1[$ ne convient pas. La conclusion juste est $]0\,;1[$.

Ex. 45 **(suite)**

(e)

x	-∞	-1	0	1	+∞		
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$		
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
h(x) − g(x)	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

C_h est au-dessus de la droite sur $]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$ et au-dessous sur $]-1\,;0[\cup]1\,;+\infty[$. Les points d'intersection sont $(-1\,;-1)$ et $(1\,;1)$.

Ex. 46 ★★☆ **Deux tarifs pour une salle d'escalade**

(a) $A(x)-B(x)=5x+40-9x=-4x+40$.

(b) $-4x+40=0 \iff x=10$. Le coefficient de x est $-4<0$: la différence est positive à gauche de 10 et négative à droite.

x	0	10	+∞
A(x) − B(x)	$+$	0	$-$

(c) Les tarifs sont égaux quand $A(x)-B(x)=0$, c'est-à-dire pour $x=10$. Le prix est alors $A(10)=90$ €, et on vérifie que $B(10)=90$ €.

(d) $A(x)<B(x) \iff A(x)-B(x)<0 \iff x>10$. Le tarif A est le moins cher à partir de 11 séances.

(e) Le $-$ doit porter sur tout $A(x)$: $B(x)-A(x)=9x-(5x+40)=9x-5x-40=4x-40$. Cette différence est positive seulement pour $x>10$. Le tarif A n'est donc pas toujours le moins cher : il ne l'est qu'à partir de 11 séances.

Ex. 47 ★★★ **Une parabole et une droite, étape par étape**

(a) Lina n'a pas distribué le signe $-$ sur tout $g(x)$. Il faut des parenthèses : $f(x)-g(x)=2x^2-3x+1-(-x+5)=2x^2-3x+1+x-5=2x^2-2x-4$.

(b) $2(x-2)(x+1)=2(x^2+x-2x-2)=2(x^2-x-2)=2x^2-2x-4$. On retrouve bien $f(x)-g(x)$.

Ex. 47 **(suite)**

(c) Le facteur 2 est toujours positif. $x+1=0 \iff x=-1$ et $x-2=0 \iff x=2$. Les deux coefficients de x valent $1>0$, donc chaque facteur est $-$ à gauche de sa valeur et $+$ à droite.

x	-∞	-1	2	+∞	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	
f(x) − g(x)	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion : C_f est strictement au-dessus de C_g sur $]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$ et strictement au-dessous sur $]-1\,;2[$.

(d) Les zéros de la différence, -1 et 2, sont les abscisses des points d'intersection. $g(-1)=1+5=6$ et $f(-1)=2+3+1=6$. $g(2)=-2+5=3$ et $f(2)=8-6+1=3$. Les points d'intersection sont $(-1\,;6)$ et $(2\,;3)$.

(e) Non. $g(x)-f(x)>0$ veut dire $g(x)>f(x)$: c'est donc C_g qui est au-dessus de C_f sur $]-1\,;2[$. Par exemple, en 0 : $g(0)=5$ et $f(0)=1$. Changer l'ordre de la différence inverse la conclusion.

Ex. 48 ★★★ **Une courbe à valeur interdite et la droite y = x**

(a) $f(x)-g(x)=\frac{3x-4}{x-2}-\frac{x(x-2)}{x-2}=\frac{3x-4-(x^2-2x)}{x-2}=\frac{3x-4-x^2+2x}{x-2}=\frac{-x^2+5x-4}{x-2}$.

(b) $(x-1)(4-x)=4x-x^2-4+x=-x^2+5x-4$. Donc $f(x)-g(x)=\frac{(x-1)(4-x)}{x-2}$.

(c) $x-1=0 \iff x=1$ (coefficient $1>0$). $4-x=0 \iff x=4$ (coefficient $-1<0$: $+$ à gauche, $-$ à droite). $x-2=0 \iff x=2$: c'est la valeur interdite.

x	-∞	1	2	4	+∞		
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$4-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$		
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
f(x) − g(x)	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

(d) C_f est strictement au-dessus de C_g sur $]-\infty\,;1[\cup]2\,;4[$ et strictement au-dessous sur $]1\,;2[\cup]4\,;+\infty[$. Le crochet est ouvert en 2, car f n'y est pas définie. Les abscisses des points d'intersection sont 1 et 4. $f(1)=\frac{-1}{-1}=1=g(1)$ et $f(4)=\frac{8}{2}=4=g(4)$. Les points sont $(1\,;1)$ et $(4\,;4)$.

Ex. 48 **(suite)**

(e) Non. En 1,5, le numérateur vaut $-2{,}25 + 7{,}5 - 4 = 1{,}25 > 0$, mais $f(1{,}5) = \frac{0{,}5}{-0{,}5} = -1$ et $g(1{,}5) = 1{,}5$. Donc C_f est au-dessous de C_g en 1,5. Nora a oublié le dénominateur, qui est négatif sur $]1\,;2[$. On n'étudie jamais le numérateur seul.

Ex. 49 ★★★ **Deux devis pour une terrasse carrée**

(a) La surface du carré vaut x^2 m². À 2 € le m², cela coûte $2x^2$, plus 30 € : $A(x) = 2x^2 + 30$. Le tour du carré mesure $4x$ m. À 4 € le mètre : $B(x) = 4 \times 4x = 16x$.

(b) $2(x-3)(x-5) = 2(x^2 - 5x - 3x + 15) = 2x^2 - 16x + 30$, et $A(x) - B(x) = 2x^2 + 30 - 16x$. Les deux expressions sont égales.

(c) Le facteur 2 est positif. $x - 3 = 0 \iff x = 3$ et $x - 5 = 0 \iff x = 5$, avec des coefficients positifs.

x	1	3	5	10	
x − 3	−	0	+	+	
x − 5	−	−	0	+	
A(x) − B(x)	+	0	−	0	+

(d) Le devis A est le moins cher quand $A(x) < B(x)$, donc quand $A(x) - B(x) < 0$, c'est-à-dire sur $]3\,;5[$. Les crochets sont ouverts car en 3 et en 5 la différence est nulle. Conclusion : le devis A est strictement le moins cher si le côté est strictement compris entre 3 m et 5 m.

(e) Les abscisses sont les zéros de la différence : 3 et 5. $A(3) = 18 + 30 = 48$ et $B(3) = 48$. $A(5) = 50 + 30 = 80$ et $B(5) = 80$. Les points sont $(3\,;48)$ et $(5\,;80)$. Pour un côté de 3 m ou de 5 m, les deux devis coûtent le même prix : 48 € et 80 €.