1. Rappels de 6e : symétrie axiale

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : symétrique d'un point sur quadrillage**

(a) A est 3 carreaux à gauche de (d).
Donc A′ est sur la même ligne, 3 carreaux à droite de (d) : A′ est à 6 carreaux de A.

(b) B est sur l'axe (d). Or un point de l'axe est son propre symétrique.
Donc B′ = B.

(c) On compte jusqu'à l'axe, pas jusqu'au bord : D est 5 carreaux à gauche de (d).
Donc D′ est sur la même ligne, 5 carreaux à droite de (d), à 10 carreaux de D. D′ n'est pas collé au bord du quadrillage.

(d) C est 2 carreaux à droite de (d), donc C′ est 2 carreaux à gauche de (d), sur la même ligne. A′ a été placé à la première question. Je trace [A′C′] : c'est le symétrique de [AC]. Lui aussi coupe (d), au même point que [AC].

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : axes de symétrie des figures usuelles**

(a) Un rectangle non carré a 2 axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés.

(b) Non. Si on plie le rectangle le long d'une diagonale, les deux triangles ne se superposent pas : un sommet ne retombe pas sur l'autre. Les diagonales d'un rectangle non carré ne sont pas des axes de symétrie.

(c) Aucun. Aucun pliage ne superpose les deux moitiés : ni le long des diagonales, ni le long des médiatrices des côtés
(c'est le piège classique).

(d) Le carré : ses 2 axes sont les médiatrices de ses côtés, les 2 autres sont les droites qui portent ses diagonales.

(e) Un losange non carré a 2 axes de symétrie, portés par ses diagonales ; un cercle en a une infinité : toutes les droites qui passent par son centre.

Ex. 3 ★★☆ **Axe en diagonale : corriger Tom puis construire**

(a) Le segment [KT] est horizontal : il n'est pas perpendiculaire à (d), qui suit les diagonales des carreaux.
Donc (d) n'est pas la médiatrice de [KT] : T n'est pas le symétrique de K.

Ex. 3 **(suite)**

(b) Je pars de K en biais, vers le bas à droite (perpendiculairement à (d)) : je traverse 1 carreau en diagonale et j'arrive sur (d). J'en traverse encore 1 dans le même sens : c'est K′, 2 carreaux à droite et 2 carreaux en bas de K.

(c) L : je traverse 2 carreaux en biais vers le bas à droite et j'arrive sur (d) (au point N), puis encore 2 : L′ est 4 carreaux à droite et 4 carreaux en bas de L. N est sur l'axe : il est sa propre image, donc N′ = N. Je relie K′, L′ et N′ dans le même ordre : c'est le triangle K′L′N′.

Ex. 4 ★★☆ **Le logo du club de voile**

(a) RS = 15 cm, ST = 8 cm, RT = 17 cm. Or la symétrie axiale conserve les longueurs.
Donc R′S′ = 15 cm, S′T′ = 8 cm et R′T′ = 17 cm.

(b) Dans le triangle RST : $\widehat{RTS} = 180° - 90° - 28° = 62°$ (la somme des angles d'un triangle vaut 180°). Or la symétrie axiale conserve les angles.
Donc $\widehat{R'T'S'} = 62°$.

(c) La symétrie axiale conserve les angles, donc R′S′T′ est rectangle en S′. Périmètre : 15 + 8 + 17 = 40 cm. Aire : 15 × 8 ÷ 2 = 60 cm². On peut aussi dire que la symétrie axiale conserve les périmètres et les aires : ce sont ceux de RST.

(d) Non. L'image d'une figure par une symétrie axiale est retournée, comme dans un miroir : les barres du F partent vers la gauche, on ne lit plus un F à l'endroit.

Ex. 5 ★★★ **Un panneau à cheval sur l'axe**

(a) On compte jusqu'à l'axe (d), pas jusqu'au bord du quadrillage. A est 2 carreaux sous (d), donc A′ est 2 carreaux au-dessus de (d), dans la même colonne. B est 2 carreaux sous (d), donc B′ est 2 carreaux au-dessus. D est 2 carreaux au-dessus de (d), donc D′ est 2 carreaux en dessous. E est 1 carreau au-dessus de (d), donc E′ est 1 carreau en dessous.

(b) Non. C est sur l'axe. Or un point de l'axe est sa propre image.
Donc C a une image : C′ = C.

Ex. 5 **(suite)**

(c) Je relie A′, B′, C, D′ et E′ dans cet ordre. A est 2 carreaux sous (d) et A′ est 2 carreaux au-dessus : $AA' = 2 + 2 = 4$ carreaux. [AA′] suit une ligne verticale du quadrillage, donc il est perpendiculaire à (d). De plus, (d) le coupe en son milieu.
Donc (d) est la médiatrice de [AA′].

(d) K est sur l'axe, donc K est sa propre image. [AE] va de 2 carreaux sous (d) à 1 carreau au-dessus. [A′E′] va de 2 carreaux au-dessus à 1 carreau en dessous, dans la même colonne. Les deux segments passent donc par K, et leur partie commune est [E′E], de longueur 2 carreaux.

Ex. 6 ★★★ **Retrouver l'axe effacé d'une frise**

(a) Avec un axe vertical, le segment [RR′] serait perpendiculaire à l'axe, donc horizontal. R′ serait alors sur la même ligne du quadrillage que R. Or R′ est 6 carreaux plus haut que R. Noah a donc tort.

(b) Pour aller de R à R′, je fais 6 carreaux vers la droite et 6 vers le haut. Le milieu de [RR′] est donc 3 carreaux à droite et 3 carreaux au-dessus de R. Pour aller de S à S′, je fais 4 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. Le milieu de [SS′] est donc 2 carreaux à droite et 2 au-dessus de S. L'axe est la médiatrice de [RR′] et de [SS′], donc il passe par ces deux milieux. Je trace la droite qui les relie : elle suit les diagonales des carreaux. Le milieu de [TT′] est aussi sur cette droite.

(c) De S jusqu'à (d), je traverse 2 carreaux en biais. Puis j'en traverse encore 2 dans le même sens pour arriver à S′. De S à S′, cela fait $2 + 2 = 4$ carreaux en biais.

(d) R′ → S′ → T′ tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire dans le sens contraire de RST. La symétrie axiale conserve la forme et les dimensions, mais l'image est retournée, comme dans un miroir.

Ex. 7 ★★★ **Le vitrail d'Ilyès**

(a) À l'équerre, je trace la perpendiculaire à (AC) qui passe par B : elle coupe (AC) en H. Je la prolonge de l'autre côté de (AC). Avec la règle, je reporte $HB' = HB = 4$ cm : c'est B′. La droite (AC) est donc la médiatrice de [BB′]. A et C sont sur l'axe : chacun est sa propre image.

Ex. 7 **(suite)**

(b) Données : l'image de A est A, celle de B est B′ et celle de C est C. Or, la symétrie axiale conserve les longueurs et les angles.
Donc $AB' = AB = 5$ cm, $CB' = CB = 5$ cm et $\widehat{B'AC} = \widehat{BAC} = 53°$. B et B′ sont de part et d'autre de (AC), donc $\widehat{BAB'} = 53° + 53° = 106°$.

(c) $AB = BC = CB' = B'A = 5$ cm. Le quadrilatère a 4 côtés de même longueur, donc ABCB′ est un losange. Son périmètre vaut $4 \times 5 = 20$ cm.

(d) Aire de ABC $= AC \times BH \div 2 = 6 \times 4 \div 2 = 12$ cm². Le triangle AB′C est le symétrique de ABC. Or, la symétrie axiale conserve les aires.
Donc l'aire de AB′C vaut aussi 12 cm², et celle de ABCB′ vaut $12 + 12 = 24$ cm².

(e) Léo a tort. $\widehat{BAB'} = 106°$ n'est pas un angle droit, donc ABCB′ n'est pas un carré. C'est un losange non carré : il a 2 axes, les droites (AC) et (BB′) qui portent ses diagonales. Jade a tort aussi. Si l'on plie un parallélogramme quelconque le long d'une diagonale, les deux moitiés ne se superposent pas. Un parallélogramme quelconque n'a aucun axe de symétrie.

2. *Symétrie axiale ou centrale ? Le demi-tour*

Ex. 8 ★☆☆ **Pliage ou demi-tour ?**

(a) Dans F, l'angle droit B est en haut à gauche ; dans F′, l'angle droit B′ est en bas à droite : le fanion a la tête en bas, sans effet miroir. Vérification : A est 3 carreaux à gauche et 2 carreaux en bas de O, A′ est 3 carreaux à droite et 2 carreaux en haut de O, donc O est le milieu de [AA′]. C'est la symétrie centrale de centre O.

(b) La pointe reste en haut mais regarde maintenant vers la gauche : F′ est retourné comme dans un miroir, c'est un pliage (symétrie axiale). A et A′ sont sur la même ligne, à 6 carreaux l'un de l'autre. L'axe est donc la droite verticale située 3 carreaux à droite de A
(et 1 carreau à droite de C : C et C′ sont à 2 carreaux l'un de l'autre).

(c) Non. A est 3 carreaux à gauche et 3 carreaux en bas de O. Après un demi-tour, A′ serait 3 carreaux à droite et 3 carreaux en haut de O. Or sur le dessin de Jade, A′ est 3 carreaux à droite et 3 carreaux en bas de O : O n'est pas le milieu de [AA′]. La hampe, verticale au départ, est devenue horizontale : F a tourné d'un quart de tour, pas d'un demi-tour.

Ex. 8 **(suite)**

(d) Non. La pointe C′ regarde toujours vers la droite, comme C : F′ est retourné comme dans un miroir. Chaque point et son image sont dans la même colonne, à la même distance de (d) : A est 1 carreau au-dessus de (d) et A′ 1 carreau en dessous. C'est la symétrie axiale d'axe (d). Avec un demi-tour, la tête serait en bas et la pointe regarderait vers la gauche.

Ex. 9 ★☆☆ **Lettres, mot et rectangle : axe ou centre ?**

(a) Après un demi-tour autour du milieu de son trait oblique, Z se superpose à lui-même : ce point est son centre de symétrie. Si on plie Z le long d'une droite verticale ou horizontale, on obtient un Z retourné comme dans un miroir, qui ne se superpose pas à Z : Z n'a aucun axe de symétrie.

(b) Non. M a bien un axe de symétrie vertical. Mais après un demi-tour, M a la tête en bas et devient W : il ne se superpose pas à lui-même, donc il n'a pas de centre de symétrie. Avoir un axe ne donne pas un centre.

(c) H et X ont deux axes (vertical et horizontal) et un centre. O aussi a des axes et un centre : un ovale a deux axes, un cercle en a une infinité. N et S ont un centre mais aucun axe. A a un axe vertical mais pas de centre. Réponse : H, X et O.

(d) Oui : le point d'intersection des diagonales, 3 carreaux à droite de E et 2 carreaux au-dessus, est le centre de symétrie, car un demi-tour autour de lui envoie E sur G et F sur H. Le rectangle a 2 axes : la médiatrice de [EF] et la médiatrice de [FG]. Les diagonales ne sont pas des axes : si on plie selon [EG], F ne retombe pas sur H.

(e) On lit encore SOS. Le demi-tour inverse l'ordre des lettres (le dernier S passe en premier) et retourne chaque lettre tête en bas. Or S et O ont un centre de symétrie : après un demi-tour, chacune redevient elle-même.

Ex. 10 ★★☆ **Le dessin de Noé**

(a) R est 3 carreaux à gauche de O, sur la même ligne. R′ est 3 carreaux sous O. R, O et R′ ne sont pas alignés, donc O n'est pas le milieu de [RR′] : son milieu est à 1,5 carreau à droite et 1,5 carreau sous R. Le dessin de Noé est faux.

Ex. 10 **(suite)**

(b) R′S′T′ est retourné comme dans un miroir : c'est un pliage. Le milieu de [RR′] et le point O sont sur l'axe. L'axe est donc la diagonale des carreaux qui passe par O et monte vers la droite (1 carreau vers la droite pour 1 carreau vers le haut). Noé a plié la feuille au lieu de lui faire faire un demi-tour.

(c) R est 3 carreaux à gauche de O, donc le bon point R′ est 3 carreaux à droite de O. S est 1 carreau à gauche de O, donc S′ est 1 carreau à droite de O. T est 2 carreaux à gauche et 3 carreaux en haut de O, donc T′ est 2 carreaux à droite et 3 carreaux en bas de O. Je relie R′, S′ et T′ : le triangle a la tête en bas, sans miroir.

Ex. 11 ★★☆ **Deux pliages pour un demi-tour ?**

(a) K est 3 carreaux à gauche de (d) : K1 est 3 carreaux à droite de (d), sur la même ligne (1 carreau au-dessus de (d′)). L est 1 carreau à gauche de (d) : L1 est 1 carreau à droite de (d), 2 carreaux au-dessus de (d′). M1 est 3 carreaux à droite de (d), 3 carreaux au-dessus de (d′). F1 est retourné comme dans un miroir.

(b) K1 est 1 carreau au-dessus de (d′) : K2 est 1 carreau en dessous, dans la même colonne (3 carreaux à droite de (d)). L2 est 2 carreaux sous (d′), 1 carreau à droite de (d). M2 est 3 carreaux sous (d′), 3 carreaux à droite de (d).

(c) K est 3 carreaux à gauche et 1 carreau en haut de O ; K2 est 3 carreaux à droite et 1 carreau en bas de O : O est le milieu de [KK2]. L est 1 carreau à gauche et 2 carreaux en haut de O ; L2 est 1 carreau à droite et 2 carreaux en bas de O : O est le milieu de [LL2]. C'est pareil pour M et M2.
Donc F2 est l'image de KLM par le demi-tour autour de O : il a la tête en bas, sans miroir.

(d) Iris a seulement constaté un résultat sur cet exemple. La symétrie centrale de centre O se définit par un seul geste : un demi-tour autour de O. L'image M′ de chaque point M vérifie alors que O est le milieu de [MM′]. On n'a besoin ni de pliage ni d'axe.

Ex. 12 ★★★ **Le carrelage aux deux diagonales**

(a) Pour chaque sommet M, l'axe (d1) coupe [MM1] perpendiculairement en son milieu : [MM1] suit une diagonale des carreaux. A_1 est 1 carreau à droite et 1 carreau en bas de A. B_1 est 1 carreau à gauche et 1 carreau en haut de B. C_1 est 4 carreaux à droite et 4 carreaux en bas de C. Je relie A_1, B_1 et C_1. (F est à cheval sur (d1) : A et C sont au-dessus de l'axe, B est en dessous.)

(b) Avec la même méthode et l'axe (d2) : A_2 est 5 carreaux à droite et 5 en haut de A_1, B_2 est 3 à droite et 3 en haut de B_1, C_2 est 2 à droite et 2 en haut de C_1. Par rapport à O : A_2 est 3 carreaux à droite et 2 en haut, B_2 est 1 carreau à droite et 2 en haut, C_2 est 3 carreaux à droite et 1 en bas.

(c) A est 3 carreaux à gauche et 2 en bas de O. A_2 est 3 carreaux à droite et 2 en haut de O.
Donc A, O et A_2 sont alignés et O est le milieu de $[AA_2]$. C'est pareil pour B (1 à gauche et 2 en bas) et pour C (3 à gauche et 1 en haut). F2 est donc l'image de F par la symétrie centrale de centre O : c'est un demi-tour (180°). Un quart de tour enverrait A 2 carreaux à gauche et 3 en haut de O (ou 2 à droite et 3 en bas), jamais en A_2. Mia a tort. On constate seulement que les deux pliages donnent ici le même résultat que le demi-tour.

(d) Dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$. Or la symétrie centrale de centre O envoie F sur F2 et elle conserve les longueurs, les angles et les aires.
Donc $A_2B_2 = AB = 2$ cm et $\widehat{A_2C_2B_2} = \widehat{ACB} = 34^\circ$.
L'aire de F2 est égale à celle de F : $2 \times 3 \div 2 = 3$ cm^2.

Ex. 13 ★★★ **Enseigne lumineuse : axe, centre ou les deux ?**

(a) Après un quart de tour, les deux barres verticales du H deviennent horizontales et la barre du milieu devient verticale : on voit un I à larges barres, plus un H.
L'erreur se voit. Après un demi-tour autour du milieu de la barre du milieu, H se superpose à lui-même, car ce point est son centre de symétrie : on ne verrait aucune erreur. Un quart de tour n'est pas un demi-tour.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Oui. Je fais un demi-tour autour du centre du O : le O reste sur lui-même, le dernier N arrive à la place du premier, et un N retourné tête en bas reste un N. Le mot se superpose à lui-même : son centre de symétrie est le centre du O. Il n'a pas d'axe, car un pliage vertical ou horizontal retourne le N en miroir (И).

(c) Le rectangle a deux axes de symétrie (les médiatrices de ses côtés) et un centre de symétrie (le point où se coupent ses diagonales). Le mot OXO a un axe horizontal, un axe vertical qui passe par le X, et un centre : le centre du X. Comme le mot est au milieu du panneau, ces éléments sont les mêmes. L'ensemble a donc deux axes de symétrie et un centre de symétrie.

(d) Le centre du panneau est à $60 \div 2 = 30$ cm du bord gauche et à $20 \div 2 = 10$ cm du bord du bas. La vis est $30 - 5 = 25$ cm à gauche et $10 - 4 = 6$ cm en dessous du centre. Or le centre de symétrie est le milieu du segment qui joint la vis à son image.
Donc la seconde vis est 25 cm à droite et 6 cm au-dessus du centre : à $30 + 25 = 55$ cm du bord gauche (5 cm du bord droit) et à $10 + 6 = 16$ cm du bas (4 cm du bord du haut).

(e) Non. Après un demi-tour autour de n'importe quel point, la pointe du haut du triangle se retrouve en bas : le triangle ne se superpose pas à lui-même. Le triangle équilatéral a trois axes de symétrie mais aucun centre de symétrie : avoir des axes ne donne pas un centre.

Ex. 14 ★★★ **Retrouver le centre du logo**

(a) A_1 est 8 carreaux à droite et 4 en haut de A, donc le milieu de $[AA_1]$ est 4 carreaux à droite et 2 en haut de A. C_1 est 2 carreaux à droite et 2 en haut de C, donc le milieu de $[CC_1]$ est 1 carreau à droite et 1 en haut de C. On tombe sur le même point : c'est O.

(b) B_1 est 2 carreaux à droite et 4 en haut de B : le milieu de $[BB_1]$ est 1 à droite et 2 en haut de B, c'est O. D_1 est 6 carreaux à droite de D : le milieu de $[DD_1]$ est 3 carreaux à droite de D, c'est encore O. O est donc le milieu de chaque segment qui relie un sommet à son image. De plus, quand on tourne la feuille d'un demi-tour, F1 a la tête en bas sans effet miroir : le sens A $\to$ B $\to$ C $\to$ D est conservé. F1 est l'image de F par la symétrie centrale de centre O, pas par un pliage.

Ex. 14 **(suite)**

(c) Non. Il est vrai que $OA_2 = OA$ (A_2 est 2 carreaux à gauche et 4 en haut de O, A est 4 carreaux à gauche et 2 en bas). Mais A, O et A_2 ne sont pas alignés : le milieu de $[AA_2]$ est 1 carreau à droite et 3 en haut de A, ce n'est pas O. Avoir $OM' = OM$ ne suffit pas, il faut que O soit le milieu de [MM′]. F2 a la tête sur le côté : il a fait un quart de tour autour de O, pas un demi-tour. Léo a tort.

(d) La symétrie centrale de centre O envoie F sur F1, et elle conserve les longueurs et les angles.
Donc $A_1B_1 = AB = 3$ cm, $B_1C_1 = BC = 1$ cm et $\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{ABC} = 90°$.

3. *Symétrique d'un point par rapport à un point*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : placer des symétriques en comptant les carreaux**

(a) De A à O : 2 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Je refais ce trajet à partir de O : A′ est 2 carreaux à droite et 2 carreaux en haut de O.

(b) B est 1 carreau à droite et 2 carreaux en haut de O. De B à O : 1 vers la gauche et 2 vers le bas. Je refais ce trajet après O : B′ est 1 carreau à gauche et 2 carreaux en bas de O.

(c) Non. Lucas n'a changé que le sens vertical. O doit être le milieu de [DD′] : on change le sens dans les DEUX directions. D′ est 3 carreaux à gauche et 1 carreau en bas de O.

(d) Pendant le demi-tour autour de O, le point O ne bouge pas. Or, le centre de symétrie est sa propre image. Donc le symétrique de O est O lui-même.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : O est le milieu**

(a) O est le milieu de [KK′], donc $OK' = OK = 3{,}7$ cm et $KK' = 2 \times 3{,}7 = 7{,}4$ cm.

(b) Non. O est le milieu de [RR′], donc OR′ est la moitié de RR′ : $OR' = 5{,}2 \div 2 = 2{,}6$ cm. Nadia a confondu OR′ et RR′.

(c) C est le milieu de [TT′]. De T à T′ : 8 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. J'en fais la moitié : C est 4 carreaux à droite et 1 carreau en bas de T.

Ex. 17 ★★☆ **Image d'un segment sur papier blanc**

(a) Je trace la demi-droite [EO). Je pique le compas en O avec l'écartement OE et je trace un arc de l'autre côté de O : il coupe la demi-droite en E′. Je fais de même avec [FO) pour obtenir F′. Je reporte au compas, pas à l'œil.

(b) Je relie E′ et F′ : [E′F′] est l'image de [EF]. La symétrie centrale conserve l'alignement et les milieux, donc G′ est sur [E′F′] et c'est le milieu de [E′F′].

(c) Inès travaille comme pour une symétrie axiale (pliage). En symétrie centrale, on ne trace aucune perpendiculaire : F′ est sur la demi-droite [FO), de l'autre côté de O, avec OF′ = OF.

(d) $EF = 3{,}6$ cm. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc $E'F' = 3{,}6$ cm. G′ est le milieu de [E′F′], donc $F'G' = 3{,}6 \div 2 = 1{,}8$ cm.

Ex. 18 ★★☆ **Le drapeau du camp**

(a) De R à O : 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas. Je refais ce trajet après O : R′ est 3 carreaux à gauche et 2 carreaux en bas de O.

(b) Q est 3 carreaux au-dessus de O, donc Q′ est 3 carreaux en dessous de O. S est 1 carreau au-dessus de O, donc S′ est 1 carreau en dessous. Je trace [OQ′] et je relie Q′, R′, S′ dans le même ordre : le drapeau image a la tête en bas et pointe vers la gauche.

(c) O est le milieu de [VV′]. De V′ à O : 2 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. Je refais ce trajet après O : V est 2 carreaux à gauche et 2 carreaux en haut de O.

(d) Non. Avec un pliage le long du mât, le mât reste en place et le drapeau pointe vers la gauche en restant en haut (R irait 3 carreaux à gauche du mât, à la même hauteur). Avec le demi-tour, le mât descend sous O et le drapeau a la tête en bas.

Ex. 19 ★★★ **Le motif de carrelage de Chloé**

(a) De E à E′ : 6 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. O est le milieu de [EE′], donc O est à mi-chemin : 3 carreaux à droite et 2 carreaux en haut de E.

(b) De F′ à O : 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut. Je refais le même trajet à partir de O, dans le même sens : F est 2 carreaux à gauche et 3 carreaux au-dessus de O.
(O est le milieu de [FF′].)

Ex. 19 **(suite)**

(c) De G à O : 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Je continue dans le même sens à partir de O : G′ est 2 carreaux à droite et 1 carreau en dessous de O (et pas 1 au-dessus : on compte dans les deux directions).

(d) H est le milieu de [EF]. Or, la symétrie centrale conserve les milieux.
Donc H′ est le milieu de [E′F′]. Vérification : H est 2,5 carreaux à gauche et 0,5 carreau au-dessus de O, donc H′ est 2,5 carreaux à droite et 0,5 carreau en dessous de O : c'est bien le milieu de [E′F′].

Ex. 20 ★★★ **Le logo de Nathan**

(a) R est le centre de la symétrie. Or, le centre est sa propre image.
Donc l'image de R est R lui-même.

(b) Je trace la demi-droite [SR). Je pique le compas en R avec l'écartement RS et je trace un arc de l'autre côté de R : il coupe la demi-droite en S′. Je fais pareil pour T′ avec la demi-droite [TR) et l'écartement RT. Je relie R, S′, T′ dans le même ordre : le triangle RS′T′ est l'image de RST.

(c) Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc $RS' = 4$ cm, $S'T' = 3{,}2$ cm, $RT' = 4{,}2$ cm, et le périmètre vaut $4 + 3{,}2 + 4{,}2 = 11{,}4$ cm. Dans le triangle RST, $\widehat{RTS} = 180° - 45° - 72° = 63°$. Or, la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{RT'S'} = 63°$.

(d) Première erreur : la perpendiculaire, c'est un réflexe de la symétrie axiale. Ici, c'est un demi-tour : S′ est sur la demi-droite [SR), de l'autre côté de R. Deuxième erreur : R est le milieu de [SS′], donc $RS' = RS = 4$ cm et $SS' = 2 \times 4 = 8$ cm.

Ex. 21 ★★★ **Le vitrail de Yanis**

(a) FGH est à la même hauteur que ABC, mais retourné comme dans un miroir : c'est un pliage (symétrie axiale), F, G, H étant les images de A, B, C. CDE a la tête en bas : le côté [AB] du bas devient le côté [DE] du haut. C'est un demi-tour (symétrie centrale), D et E étant les images de A et B.

Ex. 21 **(suite)**

(b) D et E sont les images de A et B. De A à D : 4 carreaux à droite et 4 en haut. La moitié donne 2 à droite et 2 en haut de A : c'est le point C. De B à E : 2 à gauche et 4 en haut. La moitié donne 1 à gauche et 2 en haut de B : c'est encore C. C est le milieu de [AD] et de [BE], donc le centre est C, qui est sa propre image.

(c) L'axe est la médiatrice de [AF] : A et F sont sur la même ligne, à 8 carreaux d'écart. L'axe est donc la droite verticale à 4 carreaux à droite de A. Elle est aussi à mi-chemin entre B et G, et entre C et H, et elle passe par D.

(d) Base $AB = 3$ cm et hauteur issue de C : 2 cm, donc l'aire de ABC vaut $3 \times 2 \div 2 = 3$ cm². Or, la symétrie centrale et la symétrie axiale conservent les aires.
Donc CDE et FGH ont chacun une aire de 3 cm².

4. *Symétrique d'une figure sur quadrillage*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : image d'un point sur quadrillage**

(a) De A à O : 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Je refais ce trajet à partir de O : A′ est 2 carreaux à droite et 1 carreau en dessous de O.

(b) Non. De B à O : 1 carreau vers la gauche et 2 vers le bas. Je refais le même trajet, dans le même sens, après O : B′ est 1 carreau à gauche et 2 carreaux en dessous de O. Lucas a seulement inversé le sens vertical : il a plié la figure le long de la droite horizontale qui passe par O. C'est une symétrie axiale, pas un demi-tour.

(c) Le demi-tour autour de O laisse O à sa place : le centre est sa propre image, donc O′ = O.

(d) De C à K : 1,5 carreau vers la gauche et 1,5 vers le bas (K est au milieu d'un carreau). Je refais ce trajet après K : C′ est 1,5 carreau à gauche et 1,5 carreau en dessous de K, donc sur un nœud.

(e) Si F est le symétrique de E, alors E est aussi le symétrique de F (K est le milieu de [EF]). F est 1,5 carreau à droite et 1,5 en dessous de K, donc E est 1,5 carreau à gauche et 1,5 carreau au-dessus de K.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : centre sur un sommet ou dans la figure**

(a) Deux seulement : E′ et F′. G est le centre de la symétrie, et le centre est sa propre image : G′ = G, le sommet G ne bouge pas.

Ex. 23 **(suite)**

(b) E est 2 carreaux à gauche et 1 au-dessus de G, donc E′ est 2 carreaux à droite et 1 en dessous de G. F est 3 carreaux à gauche et 1 en dessous de G, donc F′ est 3 carreaux à droite et 1 au-dessus de G. Je relie E′, F′, G dans cet ordre : l'image est le triangle E′F′G.

(c) Je construis chaque sommet séparément. M est 1 carreau à gauche et 2 en dessous de K, donc M′ est 1 à droite et 2 au-dessus. N est 2 à droite et 1 en dessous, donc N′ est 2 à gauche et 1 au-dessus. P est 2 à droite et 2 au-dessus, donc P′ est 2 à gauche et 2 en dessous. Q est 2 à gauche et 2 au-dessus, donc Q′ est 2 à droite et 2 en dessous. Je relie M′, N′, P′, Q′ dans le même ordre que M, N, P, Q.

(d) Le symétrique de [NP] est [N′P′] : on garde les mêmes lettres, dans le même ordre. NP = 3 carreaux. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc N′P′ = 3 carreaux.

Ex. 24 ★★☆ **La voile de Zoé : pliage ou demi-tour ?**

(a) Non. Le milieu de [SS1] est à 5 carreaux de S et de S1, mais 2 carreaux au-dessus de O : O n'est pas le milieu de [SS1]. Zoé a plié la figure le long de la droite verticale qui passe par O : elle a fait une symétrie axiale, pas un demi-tour.

(b) R est 5 carreaux à gauche et 2 en dessous de O, donc R′ est 5 à droite et 2 au-dessus de O. S est 5 à gauche et 2 au-dessus, donc S′ est 5 à droite et 2 en dessous. T est 2 à gauche et 1 au-dessus, donc T′ est 2 à droite et 1 en dessous. Je relie R′, S′, T′.

(c) S′ est en bas : le demi-tour met la voile tête en bas, avec la pointe du mât vers le bas. Zoé a gardé la pointe S1 en haut et a seulement retourné la voile comme dans un miroir : c'est l'effet d'un pliage.

Ex. 25 ★★☆ **Le logo de Ben : axe en diagonale puis demi-tour**

(a) Je trace la perpendiculaire à (d) passant par chaque sommet : elle suit les diagonales des carreaux. J est à 1,5 diagonale de (d), donc J1 est 3 carreaux à droite et 3 en dessous de J. K est à 3 diagonales, donc K1 est 6 à droite et 6 en dessous de K. L est à 1,5 diagonale, donc L1 est 3 à droite et 3 en dessous de L.

(b) K1 est 1 carreau à gauche de W, donc son image serait 1 carreau à droite de W. Or W est sur le bord droit du quadrillage : l'image sortirait du quadrillage. W ne convient pas.

Ex. 25 **(suite)**

(c) J1 est 1 carreau à droite et 1 en dessous de O, donc J2 est 1 à gauche et 1 au-dessus de O. K1 est 3 à droite et 2 en dessous, donc K2 est 3 à gauche et 2 au-dessus. L1 est 3 à droite et 1 au-dessus, donc L2 est 3 à gauche et 1 en dessous. Je relie J2, K2, L2 dans cet ordre.

(d) KL = 3 carreaux. Or, la symétrie axiale conserve les longueurs, donc K1L1 = 3 carreaux. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc K2L2 = K1L1 = 3 carreaux.

Ex. 26 ★★★ **Le fanion de Lina : choisir le bon centre**

(a) A est 7 carreaux à gauche et 2 carreaux en dessous de T.
Donc A′ devrait être 7 carreaux à droite et 2 carreaux au-dessus de T. Or il ne reste que $12 - 9 = 3$ carreaux à droite de T : A′ sort du quadrillage. Le centre T ne convient pas.

(b) S est au milieu d'un carreau, donc je compte des demi-carreaux. De A à S : 4 carreaux et demi vers la droite et 1 et demi vers le haut. Je refais ce trajet après S : A′ est 4 carreaux et demi à droite et 1 et demi au-dessus de S. De B à S : 4 et demi vers la droite et 2 et demi vers le bas, donc B′ est 4 et demi à droite et 2 et demi en dessous de S (sur le bord du bas). De C à S : 1 et demi vers la droite et 1 et demi vers le bas, donc C′ est 1 et demi à droite et 1 et demi en dessous de S. De D à S : 4 et demi vers la droite et un demi vers le bas, donc D′ est 4 et demi à droite et un demi en dessous de S. Je trace [A′B′] et le triangle B′C′D′ (même ordre que BCD). Tout tient dans le quadrillage.

(c) A′ est 4 carreaux au-dessus de B′ : le pied du mât est en haut, le fanion est tête en bas. C′ est 3 carreaux à gauche du mât : le fanion pointe vers la gauche. C'est normal : une symétrie centrale est un demi-tour autour de S. La figure tourne, elle n'est pas retournée comme par un pliage.

(d) Données : AB = 4 cm. Le triangle BCD a pour base BD = 2 cm et pour hauteur 3 cm (de C au mât), donc son aire vaut $2 \times 3 \div 2 = 3$ cm². Or la symétrie centrale conserve les longueurs et les aires.
Donc A′B′ = 4 cm et l'aire de B′C′D′ vaut 3 cm².

Ex. 27 ★★★ **La carte à jouer de Maël : un centre sur un sommet**

(a) G est le centre, donc il est sa propre image : G′ = G. De E à G : 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut, donc E′ est 4 carreaux à droite et 2 carreaux au-dessus de G. De F à G : 2 carreaux vers le haut, donc F′ est 2 carreaux au-dessus de G. De H à G : 3 carreaux vers la droite, donc H′ est 3 carreaux à droite de G. Je relie E′, F′, G′, H′ dans cet ordre.

(b) Dans EFGH, F est relié à G, pas à H. Romain relie F′ à H′ et G′ à E′ : ces deux côtés se croisent et il obtient un quadrilatère croisé. Il faut relier les images dans le même ordre que E, F, G, H : E′F′G′H′.

(c) De L à G : 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut, donc L′ est 2 carreaux à droite et 1 carreau au-dessus de G. Or le symétrique d'un cercle est le cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre. Je trace le cercle de centre L′ et de rayon 1 cm.

(d) Données : $\widehat{EFG} = 90°$. Or la symétrie centrale conserve les angles et les aires.
Donc $\widehat{E'F'G'} = 90°$. Je découpe EFGH en un rectangle de 3 cm sur 2 cm et un triangle rectangle de côtés 1 cm et 2 cm : aire $= 3 \times 2 + 1 \times 2 \div 2 = 6 + 1 = 7$ cm².
Donc l'aire de E′F′G′H′ vaut aussi 7 cm².

Ex. 28 ★★★ **Le vitrail de Clara : retrouver le centre et l'axe**

(a) Non. M est sa propre image. Dans une symétrie centrale, seul le centre est fixe : le centre serait donc M. De N à M : 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Donc l'image de N serait 2 carreaux à droite et 1 en dessous de M. Or N1 est 1 carreau à droite et 2 en dessous de M. De plus, MN1P1 est retourné, comme par un pliage. C'est M2N2P2 qui est tête en bas sans être retourné : c'est lui qui est obtenu par un demi-tour.

(b) D'après la question précédente, la symétrie centrale transforme MNP en M2N2P2. W est donc le milieu de [MM2] et de [NN2]. De M à M2 : 3 carreaux vers la droite et 3 vers le haut, donc le milieu est 1 carreau et demi à droite et 1 et demi au-dessus de M. De N à N2 : 7 vers la droite et 1 vers le haut, donc le milieu est 3 carreaux et demi à droite et un demi au-dessus de N. C'est le même point : W est au milieu d'un carreau.

Ex. 28 **(suite)**

(c) La symétrie axiale transforme donc MNP en MN1P1. M est sa propre image, donc M est sur l'axe. L'axe est la médiatrice de [NN1]. De N à N1 : 3 carreaux vers la droite et 3 vers le bas, donc le milieu de [NN1] est 1 carreau et demi à droite et 1 et demi en dessous de N. L'axe (d) passe par M et par ce milieu : il suit les diagonales des carreaux, vers le haut à droite. Il passe aussi par W.

(d) M est 1 carreau et demi à gauche et 1 et demi en dessous de W, donc M3 est 1 et demi à droite et 1 et demi au-dessus de W : M3 est confondu avec M2. N1 est un demi-carreau à gauche et 3 carreaux et demi en dessous de W, donc N3 est un demi à droite et 3 et demi au-dessus de W. P1 est 2 et demi à droite et 3 et demi en dessous de W, donc P3 est 2 et demi à gauche et 3 et demi au-dessus de W. Le milieu de [NN3] est 2 carreaux à droite et 2 au-dessus de N. Ce point et W sont sur une même diagonale des carreaux, qui monte vers la gauche. Cette diagonale est la médiatrice de [NN3], de [PP3] et de [MM3] : M3N3P3 est l'image de MNP par la symétrie d'axe la diagonale qui passe par W, perpendiculaire à (d).

5. *Symétrique d'une figure sur papier blanc*

Ex. 29 ★☆☆ **Un point et un segment au compas**

(a) 1. Je trace la demi-droite [MO), qui part de M et passe par O. 2. Je pique le compas en O avec l'écartement OM et je trace un arc qui coupe [MO) de l'autre côté de O : c'est M′.

(b) Je trace la demi-droite [NO). Au compas pointé en O, je reporte ON de l'autre côté de O : c'est N′. Je laisse la demi-droite et l'arc visibles : ce sont les traits de construction.

(c) Deux points suffisent : M′ et N′. Je trace [M′N′], qui est l'image de [MN]. Or la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc $M'N' = MN = 5$ cm.

(d) O est le milieu de [MM′], donc $MM' = 2 \times OM = 2 \times 3{,}5 = 7$ cm.

Ex. 30 ★☆☆ **Image d'une droite et d'un cercle**

(a) Deux points suffisent. Je construis A′ (demi-droite [AO), puis OA reportée au compas après O), puis B′ de la même façon. Je trace la droite (A′B′) : c'est (d′).

(b) Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle.
Donc (d′) est parallèle à (d).

(c) O est sur (EF). Le symétrique de E est sur la demi-droite [EO), donc sur (EF). Il en va de même pour F. L'image de (EF) est donc la droite (EF) elle-même.

(d) Je construis seulement K′, le symétrique de K par rapport à O. Je trace ensuite le cercle de centre K′ et de même rayon. La symétrie centrale conserve les longueurs, donc le rayon de $(\mathcal{C}')$ est 2 cm.

Ex. 31 ★★☆ **Programme de construction d'un triangle image**

(a) 1. Je trace les demi-droites [RO), [SO) et [TO). 2. Au compas pointé en O, je reporte OR, OS et OT de l'autre côté de O : j'obtiens R′, S′ et T′. 3. Je relie R′, S′ et T′ dans le même ordre que R, S et T.

(b) Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc $R'S' = 4$ cm, $S'T' = 4{,}2$ cm et $T'R' = 3{,}2$ cm.
Périmètre : $4 + 4{,}2 + 3{,}2 = 11{,}4$ cm.

(c) Dans le triangle RST, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{RTS} = 180° - 72° - 45° = 63°$. Or, la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{R'T'S'} = \widehat{RTS} = 63°$.

Ex. 32 ★★☆ **Le drapeau de la régate de Lorient : retour à la symétrie axiale**

(a) À l'équerre, je trace la perpendiculaire à (d) qui passe par B. Elle coupe (d) en H. Au compas pointé en H, je reporte HB de l'autre côté de (d) : c'est B′. La droite (d) est la médiatrice de [BB′].

(b) Je construis A′, C′ et D′ de la même façon. Je trace [A′B′], puis je relie B′, C′ et D′ dans le même ordre. Le drapeau image se trouve de l'autre côté de (d), sous l'axe.

(c) Or, la symétrie axiale conserve les longueurs.
Donc $A'B' = AB = 5{,}5$ cm.

Ex. 32 (suite)

(d) Malo a fait un demi-tour autour du point L : il a construit le symétrique de B par rapport à L, ce qui est une symétrie centrale. Pour une symétrie axiale, la droite (BB′) doit être perpendiculaire à (d).

Ex. 33 ★★★ **Le vitrail de Lina : quatre erreurs à corriger**

(a) Non. O doit être le milieu de [RR′], donc $OR' = OR = 2{,}5$ cm. Je trace la demi-droite [RO), je pique le compas en O avec l'écartement OR et je reporte cette longueur de l'autre côté de O : c'est R′. Alors $RR' = 2 \times 2{,}5 = 5$ cm. Lina a confondu OR′ et RR′.

(b) Non. Ce cercle a pour rayon $K'O = KO = 3$ cm, et pas 1,8 cm. Or la symétrie centrale conserve les longueurs, donc l'image de $(\mathcal{C})$ a le même rayon. Bonne construction : je construis K′ (O milieu de [KK′]), puis je trace le cercle de centre K′ et de rayon 1,8 cm.

(c) Elle n'a pas relié les images dans le même ordre que les sommets : elle obtient un quadrilatère croisé. Je construis R′, S′, T′, U′ (O milieu de chaque segment [RR′], [SS′], [TT′], [UU′]), puis je relie R′ à S′, S′ à T′, T′ à U′ et U′ à R′.

(d) Non. Données : $\widehat{RST} = 108°$ et R′S′T′ est l'image de RST par la symétrie de centre O. Or la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{R'S'T'} = 108°$. Le demi-tour change la position de la figure, pas ses mesures.

Ex. 34 ★★★ **Le carreau de faïence de Noé : centre sur un sommet**

(a) G est le centre de la symétrie, donc G est sa propre image. Je trace la demi-droite [EG) et je reporte la longueur GE au compas de l'autre côté de G : c'est E′. Je fais de même avec [FG) et la longueur GF : c'est F′. G est le milieu de [EE′] et de [FF′].

(b) Non. La droite (EG) passe par le centre G et E′ est sur la demi-droite [EG) : l'image de (EG) est donc la droite (EG) elle-même. La droite (EF) ne passe pas par G : son image (E′F′) est une droite parallèle à (EF).

(c) Dans le triangle EFG, la somme des angles vaut 180°, donc $\widehat{EGF} = 180° - 60° - 50° = 70°$. Or la symétrie centrale conserve les angles, donc $\widehat{E'GF'} = \widehat{EGF} = 70°$.

Ex. 34 **(suite)**

(d) Aire de EFG $= \frac{5\times3{,}5}{2} = 8{,}75$ cm². Or la symétrie centrale conserve les aires, donc l'aire de E′F′G vaut aussi 8,75 cm². Les deux triangles n'ont que le point G en commun, donc l'aire du motif est $2 \times 8{,}75 = 17{,}5$ cm².

Ex. 35 ★★★ **Le logo du club d'échecs : deux symétries à la suite**

(a) Je place l'équerre sur (d) et je trace la perpendiculaire à (d) qui passe par A ; elle coupe (d) en un point H. Je reporte la longueur HA au compas de l'autre côté de (d) : c'est A1. Je fais de même pour B et C, puis je relie A1, B1, C1. La médiatrice de [AA1] est l'axe (d).

(b) A2 est l'image de A1 et non de A : Yanis est reparti de la mauvaise figure. Je trace la demi-droite [A1O) et je reporte la longueur OA1 au compas de l'autre côté de O : c'est A2, et O est le milieu de [A1A2]. Je fais de même pour B1 et C1, puis je relie A2, B2, C2 dans cet ordre.

(c) La symétrie axiale conserve les longueurs et les angles, donc $A_1B_1 = AB = 6$ cm et $\widehat{B_1A_1C_1} = 53°$. La symétrie centrale les conserve aussi, donc $A_2B_2 = A_1B_1 = 6$ cm et $\widehat{B_2A_2C_2} = \widehat{B_1A_1C_1} = 53°$.

(d) Aire de ABC $= \frac{6\times4}{2} = 12$ cm². La symétrie axiale conserve les aires, donc l'aire de A1B1C1 est 12 cm². La symétrie centrale conserve les aires, donc l'aire de A2B2C2 est aussi 12 cm².

6. *Centre de symétrie d'une figure*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes · Lettres et chiffres**

(a) N, S et H ont un centre de symétrie, leur milieu : après un demi-tour autour de ce point, chacune reste inchangée. T et A se retrouvent la tête en bas : ils n'ont pas de centre. J'en trouve 3.

(b) Non. Après un demi-tour, les boucles du 3, ouvertes à gauche, s'ouvrent à droite : on lit Ɛ. La figure a changé, donc le 3 n'a pas de centre de symétrie (il n'a qu'un axe).

(c) Non. Le E a bien un axe horizontal, mais après un demi-tour ses trois barres se retrouvent à gauche : on lit Ǝ. Le E n'a pas de centre. Avoir un axe ne donne pas un centre.

Ex. 36 **(suite)**

(d) Aucun axe : si on plie le Z verticalement ou horizontalement, la barre oblique part dans l'autre sens ; si on le plie en diagonale, ce sont les barres du haut et du bas qui ne retombent pas l'une sur l'autre. Aucun pliage ne marche. Un centre : après un demi-tour autour de son milieu, la barre du haut arrive sur la barre du bas et la barre oblique sur elle-même. Le Z n'a pas changé. Il a un centre sans avoir d'axe.

(e) Oui. Après un demi-tour autour du centre du 0, le premier 8 arrive à la place du dernier et reste un 8, le dernier arrive à la place du premier, et le 0 reste un 0 à sa place. Le nombre n'a pas changé : 808 a un centre de symétrie, le centre du 0.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes · Centre des figures usuelles**

(a) Oui : c'est le point d'intersection de ses diagonales [EG] et [FH]. Après un demi-tour autour de ce point, E arrive sur G et F arrive sur H : le rectangle se superpose à lui-même.

(b) Non. Quel que soit le point choisi, après un demi-tour la pointe T, qui était en haut, se retrouve en bas : le triangle ne se superpose pas à lui-même. Aucun triangle n'a de centre de symétrie, même s'il a des axes.

(c) Aucun axe : quand on plie le long d'une diagonale ou d'une droite qui passe par les milieux de deux côtés, les deux parties ne coïncident pas. Un centre : en décalquant la figure et en faisant un demi-tour, on constate qu'elle se superpose à elle-même autour du point d'intersection des diagonales [UW] et [VX]. On a donc un centre sans axe.

(d) Non. Après un demi-tour, la grande base [MN], qui était en bas, passe en haut, et la petite base [QP] passe en bas : la figure a la tête en bas et ne se superpose pas à elle-même. Le trapèze isocèle a un axe, mais pas de centre.

(e) Oui, c'est son centre K. Après un demi-tour autour de K, chaque point du cercle arrive sur le point opposé, qui est aussi sur le cercle (à 3,5 cm de K).

Ex. 38 ★★☆ Compléter un logo

(a) A est 3 carreaux à gauche de O, à la même hauteur, donc A′ est 3 carreaux à droite de O, à la même hauteur. B est 3 carreaux à gauche et 2 carreaux en haut de O, donc B′ est 3 carreaux à droite et 2 carreaux en bas de O. C est 1 carreau à gauche et 2 carreaux en haut de O, donc C′ est 1 carreau à droite et 2 carreaux en bas de O.

(b) O est le centre de la symétrie, donc O est sa propre image. Chaque point de la ligne A-B-C-O a son symétrique sur la ligne O-C′-B′-A′ et réciproquement. Après un demi-tour autour de O, le logo se superpose donc à lui-même : O est son centre de symétrie.

(c) Avec le pliage, B, qui est 3 carreaux à gauche et 2 carreaux en haut de O, arriverait 3 carreaux à droite et 2 carreaux en haut de O, et non sur B′ (qui est 2 carreaux en bas). Le pliage est une symétrie axiale : le logo aurait un axe, mais pas O pour centre. Ce pliage ne convient pas, il faut faire un demi-tour.

Ex. 39 ★★☆ L'atelier de vitrail

(a) C'est la rosace à 6 pétales. 6 est pair : après un demi-tour, chaque pétale arrive sur le pétale d'en face, donc le centre de cette rosace est son centre de symétrie. Avec 5 pétales, en face d'un pétale il y a un vide : cette rosace n'a pas de centre de symétrie.

(b) Non. Chaque triangle seul n'a pas de centre, mais la frise entière en a un : le point K situé au milieu de [BD], 1 carreau au-dessus de B. A est 2 carreaux à gauche et 1 carreau en bas de K, donc son image est 2 carreaux à droite et 1 carreau en haut de K : c'est E. De même, B a pour image D, et C a pour image F. Le triangle ABC arrive sur DEF : la frise se superpose à elle-même.

(c) Non. Si la frise avait un centre de symétrie, ce serait son milieu : le point situé 3 carreaux à droite et 1 carreau au-dessus de A. A est 3 carreaux à gauche et 1 carreau en bas de ce point, donc son image serait 3 carreaux à droite et 1 carreau en haut, c'est-à-dire 2 carreaux au-dessus de H. Ce point n'appartient pas à la frise : elle ne se superpose pas à elle-même, elle n'a pas de centre de symétrie.

Ex. 40 ★★★ Les numéros de chambre

(a) H et N ont un centre de symétrie (leur milieu) : tête en bas, on lit encore H et N. K a un axe horizontal mais pas de centre : après un demi-tour, ses branches regardent vers la gauche. Y a un axe vertical mais pas de centre : tête en bas, sa fourche passe en bas. N n'a aucun axe mais a un centre : avoir un centre ne demande pas d'avoir un axe.

(b) Non. Fais faire un demi-tour au numéro 69 autour du point situé entre les deux chiffres : le 9 devient un 6 et passe à gauche, le 6 devient un 9 et passe à droite. On lit encore 69, donc ce point est un centre de symétrie du numéro. Un chiffre seul peut ne pas avoir de centre alors que le numéro entier en a un.

(c) 6009 : oui. Tête en bas, le 9 devient un 6 et passe en premier, le 6 devient un 9 et passe en dernier, les deux 0 s'échangent : on lit encore 6009. Le centre est le point situé entre les deux 0. 8338 : non. Les deux 8 s'échangent, mais chaque 3 devient « Ɛ » tête en bas : on ne lit plus 8338.

(d) Après un demi-tour, le premier chiffre retourné prend la place du dernier. Il faut donc que le chiffre du milieu reste pareil tête en bas (0 ou 8) et que le premier chiffre retourné donne le dernier (6 et 9 s'échangent, 8 avec 8). Pour faire le plus grand nombre, je mets 9 en premier, donc 6 en dernier, et 8 au milieu : 986. Vérification : tête en bas, 986 se lit encore 986.

Ex. 41 ★★★ Le carreau de la salle de bains

(a) Depuis A, je compte 3,5 carreaux à droite et 1,5 carreau en haut pour arriver à O. Depuis O, je compte encore 3,5 à droite et 1,5 en haut pour arriver à C : O est le milieu de [AC]. Depuis B, je compte 1,5 à gauche et 1,5 en haut pour arriver à O, puis encore 1,5 à gauche et 1,5 en haut pour arriver à D : O est aussi le milieu de [BD].

(b) O est le milieu de [AC], donc $A' = C$ et $C' = A$. O est le milieu de [BD], donc $B' = D$ et $D' = B$. Après le demi-tour, chaque sommet tombe sur un sommet, donc chaque côté tombe sur un côté. Le carreau se superpose à lui-même : O est son centre de symétrie.

(c) Non. A est 3,5 carreaux à gauche de la verticale qui passe par O. Avec ce pliage, il arrive 3,5 carreaux à droite, sur la ligne du bas, 2 carreaux à droite de B : ce point n'est pas un sommet du carreau. Le carreau ne se superpose pas à lui-même. Un parallélogramme quelconque a un centre de symétrie mais aucun axe : il ne faut pas confondre pliage et demi-tour.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Base $AB = 5$ cm, hauteur 3 cm (3 carreaux), donc aire de ABCD $= 5 \times 3 = 15$ cm². Dans la symétrie de centre O, A a pour image C, B a pour image D et C a pour image A : le triangle ABC a pour image le triangle CDA. Or la symétrie centrale conserve les aires. Donc ABC et CDA ont la même aire, et chacun vaut la moitié du carreau : $15 \div 2 = 7{,}5$ cm².

(e) Oui. Le cercle a pour centre de symétrie son centre O : par le demi-tour, il se superpose à lui-même (même centre, même rayon). Le carreau a aussi O pour centre de symétrie. Les deux se superposent à eux-mêmes en même temps, donc toute la figure aussi. Par exemple, A est sur le cercle, et son image C y est aussi, car $OC = OA$.

Ex. 42 ★★★ **Le fanion du club de voile**

(a) R est 3 carreaux à gauche et 1 carreau en bas de O, donc R′ est 3 carreaux à droite et 1 carreau en haut de O : c'est le point T. O est le milieu de [RT], donc de même T′ = R. Elsa se trompe : R′ et T′ sont déjà dessinés, seul S′ est un nouveau point.

(b) S est 2 carreaux à gauche et 2 carreaux en haut de O, donc S′ est 2 carreaux à droite et 2 carreaux en bas de O, sur la ligne du bas du quadrillage. O est bien le milieu de [SS′].

(c) Dans la symétrie de centre O, R et T s'échangent, S et S′ aussi : chaque sommet a pour image un sommet, donc chaque côté a pour image un côté. Après un demi-tour autour de O, RSTS′ se superpose à lui-même : O est son centre de symétrie.

(d) Deux. Le centre est sa propre image, donc T′ = T. R est 6 carreaux à gauche et 2 carreaux en bas de T, donc R′ est 6 carreaux à droite et 2 carreaux en haut de T. S est 5 carreaux à gauche et 1 carreau en haut de T, donc S′ est 5 carreaux à droite et 1 carreau en bas de T. Ni R′ ni S′ ne sont déjà dessinés : il faut 2 nouveaux points.

7. *Propriétés conservées et calculs*

Ex. 43 ★☆☆ **Lire les mesures de l'image**

(a) [M′K′] est l'image de [MK]. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc M′K′ = MK = 3 cm.

(b) [L′M′] est l'image de [LM]. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc L′M′ = LM = 5 cm.

Ex. 43 **(suite)**

(c) $\widehat{K'L'M'}$ est l'image de $\widehat{KLM}$. Or, la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{K'L'M'} = 37°$
(et pas $180° - 37°$).

(d) $\widehat{L'K'M'}$ est l'image de l'angle droit $\widehat{LKM}$. Or, la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{L'K'M'}$ est un angle droit
($90°$).

(e) Or, la symétrie centrale conserve les longueurs, donc les périmètres. Périmètre de K′L′M′ $= 4 + 5 + 3 = 12$ cm.

(f) Aire de KLM $= 4 \times 3 \div 2 = 6$ cm². Or, la symétrie centrale conserve les aires.
Donc l'aire de K′L′M′ est 6 cm².

Ex. 44 ★☆☆ **Vrai ou faux : droites, milieu, alignement**

(a) Faux. L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle : l'image de (AB) est parallèle à (AB).

(b) Vrai. La droite (OA) passe par le centre O : son image est la droite elle-même.

(c) Vrai. I est le milieu de [AB]. Or, la symétrie centrale conserve les milieux.
Donc I′ est le milieu de [A′B′].

(d) Faux. Le centre est sa propre image : le symétrique de O par rapport à O est O lui-même.

(e) Vrai. AI $= 6 \div 2 = 3$ cm car I est le milieu de [AB]. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc A′I′ = AI = 3 cm.

Ex. 45 ★★☆ **Deux triangles autour d'un sommet**

(a) Dans RST : $\widehat{RTS} = 180° - 56° - 31° = 93°$. $\widehat{R'T'S}$ est l'image de $\widehat{RTS}$. Or, la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{R'T'S} = 93°$.

(b) Aire de RST $= 7 \times 3 \div 2 = 10{,}5$ cm². Or, la symétrie centrale conserve les aires.
Donc l'aire de R′ST′ est 10,5 cm².

(c) Les triangles ne se recouvrent pas, donc j'additionne les aires : $10{,}5 + 10{,}5 = 21$ cm².

(d) S est le centre, donc S est le milieu de [RR′]. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs, donc SR′ = SR = 7 cm.
Donc RR′ $= 2 \times 7 = 14$ cm.

Ex. 46 ★★☆ Les erreurs de Tom

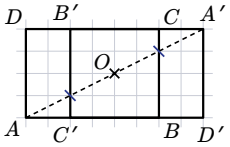
(a) Tom n'a pas pris les bons points : [F′G′] est l'image de [FG], pas de [EF]. Or, la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc $F'G' = FG = 2{,}5$ cm.

(b) La figure est retournée, mais ses angles ne changent pas. Or, la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{E'F'G'} = \widehat{EFG} = 135°$.

(c) La droite (EF) ne passe pas par le centre O. Or, l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.
Donc (E′F′) est parallèle à (EF), mais c'est une autre droite : seule une droite qui passe par O est sa propre image.

Ex. 47 ★★★ Le vitrail de Lina

(a) A est 4 carreaux à gauche et 2 carreaux en bas de O, donc A′ est 4 carreaux à droite et 2 carreaux en haut de O. De même, B′ est 2 carreaux à gauche et 2 en haut de O, C′ est 2 carreaux à gauche et 2 en bas de O, et D′ est 4 carreaux à droite et 2 en bas de O. Je relie A′, B′, C′ et D′.



(b) ABCD a quatre angles droits, avec AB = 6 cm et AD = 4 cm. Or la symétrie centrale conserve les angles et les longueurs.
Donc A′B′C′D′ a aussi quatre angles droits, avec A′B′ = AB = 6 cm et A′D′ = AD = 4 cm : c'est un rectangle de 6 cm sur 4 cm.

(c) La partie commune va de C′ à B sur la largeur (4 carreaux) et de C′ à B′ sur la hauteur (4 carreaux), avec des angles droits : c'est un carré de côté 4 cm. Son aire vaut $4 \times 4 = 16$ cm².

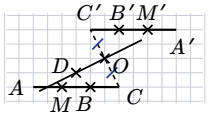
(d) Chaque rectangle a une aire de $6 \times 4 = 24$ cm², car la symétrie centrale conserve les aires. Mila compte deux fois la partie rouge. Aire du vitrail : $24 + 24 - 16 = 32$ cm². Vérification : le contour est un rectangle de 8 cm sur 4 cm, et $8 \times 4 = 32$ cm².

Ex. 47 (suite)

(e) Le contour est le rectangle AD′A′D, de longueur 8 cm (de A à D′) et de largeur 4 cm. Son périmètre vaut $2 \times (8 + 4) = 24$ cm. On n'additionne pas les deux périmètres de 20 cm : les côtés à l'intérieur de la partie rouge ne font pas partie du contour.

Ex. 48 ★★★ Les piquets du jardin d'Ayoub

(a) A est 5 carreaux à gauche et 2 en bas de O, donc A′ est 5 carreaux à droite et 2 en haut de O. M′ est 3 carreaux à droite et 2 en haut de O, et B′ 1 carreau à droite et 2 en haut. C est 1 carreau à droite et 2 carreaux en bas de O, donc C′ est 1 carreau à gauche et 2 carreaux en haut de O.



(b) M est le milieu de [AB]. Or la symétrie centrale conserve les milieux.
Donc M′ est le milieu de [A′B′]. De plus, [A′C′] est le symétrique de [AC]. Or la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc $A'C' = AC = 6$ cm.

(c) Non. A, M, B, C sont alignés dans cet ordre. Or la symétrie centrale conserve l'alignement.
Donc A′, M′, B′, C′ sont alignés, et M′ est entre A′ et B′, B′ entre M′ et C′. C'est le même ordre, lu de droite à gauche : le demi-tour a seulement retourné la figure.

(d) Or l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.
Donc (A′C′) est parallèle à (AC), et non perpendiculaire. Sur le quadrillage, les deux droites sont horizontales.

(e) D est 2 carreaux à gauche et 1 carreau en bas de O, donc D′ est 2 carreaux à droite et 1 carreau en haut de O. D′ est sur (d). Or, quand une droite passe par le centre O, son image est la droite elle-même.
Donc l'image de (d) est (d).

Ex. 49 ★★★ **La carte à jouer d'Inès**

(a) O est le milieu de [FG]. Or le symétrique M′ d'un point M est le point tel que O est le milieu de [MM′].
Donc le symétrique de F est G, et celui de G est F.

(b) Dans le triangle EFG : $\widehat{FEG} = 180° - 67° - 50° = 63°$.
Le symétrique de E est E′, celui de G est F et celui de F est G. L'angle $\widehat{FE'G}$ est donc l'image de l'angle $\widehat{GEF}$.
Or la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{FE'G} = 63°$.

(c) L'angle image n'est pas le supplémentaire. Le symétrique de G est F, celui de F est G et celui de E est E′. L'angle $\widehat{FGE'}$ est donc l'image de l'angle $\widehat{GFE}$. Or la symétrie centrale conserve les angles.
Donc $\widehat{FGE'} = \widehat{EFG} = 67°$.

(d) La figure est à main levée : on ne peut rien mesurer dessus. Le symétrique de G est F et celui de E est E′, donc [GE′] est le symétrique de [FE] (et non de [GE]).
Or la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc GE′ = FE = 5,2 cm.

(e) Aire de EFG : FG × EH ÷ 2 = 6 × 4,8 ÷ 2 = 14,4 cm².
Or la symétrie centrale conserve les aires, donc le triangle E′GF a aussi une aire de 14,4 cm². Les deux triangles ont seulement le côté [FG] en commun, sans recouvrement. Aire de EFE′G : 2 × 14,4 = 28,8 cm².