53 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Calculer des termes : forme explicite et récurrence

À retenir : Forme explicite : je remplace n en gardant les parenthèses. Si $u_n = n^2 + 1$, alors $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1$, et non $u_n + 1$. Récurrence : je calcule les termes un par un. Si la suite commence à u_0, le 5^{e} terme est u_4 ; de u_p à u_q, il y a $q - p + 1$ termes. Attention : $a^0 = 1$.

Ex. 1 ★☆☆ **Remplacer n par un entier** — Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 + 8n + 5$. Calcule :

(a) u_0 (b) u_3 (c) u_{10}

Ex. 2 ★☆☆ **Une récurrence avec un décimal** — La suite (u_n) est définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}5u_n + 4$. Calcule :

(a) u_1 (b) u_2 (c) u_3

Ex. 3 ★☆☆ **Puissances, signes et terme interdit** — Pour un entier naturel n, on note $c_n = \dfrac{(-1)^n + 2^n}{n-3}$.

(a) Lila affirme : « $(-1)^0 = -1$ et $2^0 = 1$, donc $c_0 = 0$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Calcule c_1, c_2 et c_4.

(c) Vrai ou faux : « On peut calculer c_n pour tout entier naturel n. » Justifie.

Ex. 4 ★★☆ **Quel rang pour cette valeur ?** — Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3n-5}{n+4}$.

(a) Détermine le rang du terme égal à $\dfrac{40}{19}$.

(b) Le nombre -1 est-il un terme de la suite (u_n) ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **Exprimer u(n+1), u(2n) et u(n−1)** — Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 6n - 4$.

(a) Inès écrit : « $u_{n+1} = n^2 + 6n - 3$ ». Repère son erreur, puis donne l'expression correcte de u_{n+1} en fonction de n, développée et réduite.

(b) Exprime u_{2n} en fonction de n, sous forme développée et réduite.

(c) Pour $n \geqslant 1$, exprime u_{n-1} en fonction de n, sous forme développée et réduite.

(d) Le premier terme de la suite est u_0. Calcule le 5e terme de la suite avec la formule de u_n. Retrouve-le ensuite avec ton expression de u_{n+1}, en choisissant bien la valeur de n.

Ex. 6 ★★☆ **Une récurrence qui dépend de n** — La suite (v_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par $v_1 = 3$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2v_n - n$.

(a) Zoé écrit : « $v_2 = 2 \times v_1 - 2 = 4$ ». Repère son erreur, puis calcule correctement v_2.

(b) Calcule v_3, puis v_4. Quel est le 4e terme de la suite ?

(c) Hugo affirme : « Pour obtenir v_{10}, il suffit de remplacer n par 10 dans la relation. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Combien de termes compte-t-on de v_1 à v_{10} ? Combien de fois faut-il appliquer la relation pour obtenir v_{10} à partir de v_1 ?

(e) Une autre suite (w_n) vérifie la même relation $w_{n+1} = 2w_n - n$ pour $n \geqslant 1$, avec $w_3 = 10$. Calcule w_2, puis w_1, en valeurs exactes.

Ex. 7 ★★☆ **Une récurrence d'ordre 2 en Python** — La suite (a_n) est définie par $a_0 = 2$, $a_1 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. On considère ce programme :

```
a = [2, -1]
for n in range(5):
    a.append(a[n+1] + 2*a[n])
print(a)
```

(a) Calcule à la main a_2, a_3 et a_4, en précisant à chaque fois la valeur de n utilisée.

(b) Qu'affiche ce programme ? Justifie en indiquant ce que calcule chaque passage dans la boucle.

(c) Malo lit le nombre 7 dans la liste affichée et dit : « c'est a_7 ». A-t-il raison ? Justifie. Donne ensuite le rang du dernier terme de la liste et le nombre de termes qu'elle contient.

(d) Modifie une seule ligne du programme pour que la liste se termine par a_{10}. Combien de termes contient alors la liste ?

(e) Calcule a_{10}.

Ex. 8 ★★★ **Les mosaïques de Nora** — Nora construit des mosaïques rectangulaires avec des carreaux identiques. La figure 1 est une rangée de 3 carreaux. Pour passer à la figure suivante, elle ajoute une rangée en bas, puis une colonne à droite : la figure reste un rectangle. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note r_n le nombre de carreaux de la figure n.

n	1	2	3
r_n	3	8	15

(a) Donne le nombre de rangées et le nombre de colonnes de la figure n. Déduis-en r_4, r_5 et une expression de r_n en fonction de n.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Léo affirme : « Le 5e terme de la suite (r_n) est $r_4 = 24$. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Exprime r_{n+1} en fonction de n, puis calcule $r_{n+1} - r_n$. Explique ce que représente ce nombre pour les mosaïques. Contrôle ton résultat en comptant les carreaux ajoutés pour passer de la figure 4 à la figure 5.

(d) Les nombres 120 et 150 sont-ils des termes de la suite (r_n) ? Si oui, donne le rang du terme. Justifie.

(e) Nora dispose de 200 carreaux. Quelle est la plus grande figure qu'elle peut construire ? Combien de carreaux lui reste-t-il alors ?

(f) Pour une exposition, Nora construit toutes les figures, de la figure 4 à la figure 13 comprises. Combien de figures construit-elle ? Combien de carreaux utilise-t-elle au total ?

Ex. 9 ★★★ **Une récurrence avec des fractions** — La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n+15}{u_n+3}$. Donne les résultats exacts, sous forme de fractions irréductibles.

(a) Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4.

(b) Yanis écrit : « $u_{10} = \frac{10+15}{10+3} = \frac{25}{13}$ ». Repère ses deux erreurs.

(c) Lina veut écrire une fonction qui renvoie u_n :

```
def terme(n):
    u = 2
    for i in range(1, n):
        u = (u + 15) / (u + 3)
    return u
```

Quel terme de la suite l'appel `terme(3)` renvoie-t-il en réalité ? Justifie, puis corrige le programme.

(d) On garde la même relation de récurrence, mais on choisit un autre premier terme : $u_0 = a$, où a est un réel. Pour quelle valeur de a le terme u_1 n'existe-t-il pas ? Pour quelle valeur de a le terme u_1 existe-t-il, mais pas le terme u_2 ?

(e) On garde la même relation de récurrence, avec $u_0 = a$. Détermine les valeurs de a pour lesquelles $u_1 = u_0$. Que peux-tu dire alors de tous les termes de la suite ? Justifie.

Ex. 10 ★★★ **Paver une allée avec des dominos** — Ben veut paver une allée rectangulaire de 2 cases de large et n cases de long avec des dalles de 2 cases sur 1. Une dalle se pose soit verticalement (elle couvre une colonne entière), soit horizontalement (elle couvre 2 cases voisines d'une même rangée). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note y_n le nombre de pavages différents d'une allée de longueur n. On admet que $y_1 = 1$ et $y_2 = 2$.

(a) Décris tous les pavages d'une allée de longueur 3, puis tous ceux d'une allée de longueur 4. Déduis-en y_3 et y_4.

Ex. 10 **(suite)**

(b) Dans une allée de longueur $n + 2$, regarde la première colonne à gauche : de quelles façons peut-elle être couverte ? Déduis-en que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$.

(c) Calcule y_{10}.

(d) Théo affirme : « Pour tout entier $n \geqslant 1$, $y_{2n} = 2y_n$, car une allée deux fois plus longue a deux fois plus de pavages. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Ben veut que la relation $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ soit vraie aussi pour $n = 0$. Quelle valeur doit-il donner à y_0 ?

(f) Dans le programme suivant, `L[0]` désigne le premier élément de la liste, et `L[-1]`, `L[-2]` ses deux derniers éléments :

```
L = [1, 2]
for i in range(10):
    L.append(L[-1] + L[-2])
```

Combien d'éléments contient `L` à la fin ? Quels termes de la suite contient-elle ? Que valent `L[-1]` et `L[5]` ?

2. *Traduire un motif, une situation, un programme*

À retenir : « Diminuer de 15 % » donne 0,85 u_n, pas $u_n - 0{,}15$. « Ajouter 50 puis retirer 10 % » donne $u_{n+1} = 0{,}9(u_n + 50)$. Si 2024 correspond à $n = 0$, 2029 correspond à $n = 5$.
Motif : je compte ce qui s'ajoute d'une étape à l'autre, sans compter deux fois, et je vérifie sur les premières étapes.
Python : `range(n)` fait n tours ; de u_0 à u_n, il y a $n + 1$ termes.

Ex. 11 ★☆☆ **Lire une boucle for** — Voici une fonction écrite en Python.

```
def suite(n):
    u = -2
    for i in range(n):
        u = 3*u + 1
    return u
```

(a) Que renvoie `suite(0)` ?

(b) Que renvoie `suite(3)` ?

(c) Quelle suite cette fonction calcule-t-elle ? Donne son premier terme et sa relation de récurrence.

Ex. 12 ★☆☆ **Compter les tours d'une boucle** — Réponds sans exécuter de programme.

(a) Combien de tours fait la boucle `for k in range(8):` ? Quelles valeurs prend k ?

(b) Combien de tours fait la boucle `for k in range(1, 8):` ? Quelles valeurs prend k ?

(c) Une suite commence à u_1. Un programme part de u_1 et calcule un nouveau terme à chaque tour de boucle. Combien de tours faut-il pour obtenir u_{12} ?

Ex. 12 **(suite)**

(d) Une liste Python contient les termes de la suite de u_3 à u_{20}, sans en oublier aucun. Combien d'éléments contient-elle ?

Ex. 13 ★★☆ **L'ordre des instructions** — Voici deux fonctions Python qui ne diffèrent que par l'ordre de deux lignes.

```
def A(N):
    u = 2
    n = 0
    while n < N:
        u = 3*u + n
        n = n + 1
    return u
```

```
def B(N):
    u = 2
    n = 0
    while n < N:
        n = n + 1
        u = 3*u + n
    return u
```

(a) Que renvoie `A(3)` ?

(b) Que renvoie `B(3)` ?

(c) Écris la relation de récurrence calculée par chacune des deux fonctions.

Ex. 14 ★★☆ **Un motif qui grandit** — Une figure est faite de jetons. À l'étape 0, il y a 1 jeton. Pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on ajoute une rangée de $2(n+1)+1$ jetons. On note u_n le nombre de jetons à l'étape n.

(a) Calcule u_1, u_2 et u_3.

(b) Écris la relation entre u_{n+1} et u_n.

(c) Combien faut-il de jetons pour l'étape 5 ?

Ex. 15 ★★☆ **Abonnés d'une médiathèque : pourcentage, ordre et année** — Une médiathèque de Rennes compte 2 400 abonnés au 1er janvier 2025. Chaque année, 30 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement, puis 300 nouveaux lecteurs s'inscrivent. On note a_n le nombre d'abonnés au 1er janvier de l'année $2025+n$.

(a) Léa écrit $a_{n+1} = a_n - 0{,}3 + 300$. A-t-elle raison ? Justifie, puis donne a_0 et la relation correcte.

(b) Calcule le nombre d'abonnés au 1er janvier 2027.

(c) Tom affirme : « le nombre d'abonnés au 1er janvier 2030 est a_6, car 2030 est la sixième année ». Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Une autre médiathèque, à Vannes, compte aussi 2 400 abonnés au 1er janvier 2025. Mais chaque année, les 300 nouveaux lecteurs s'inscrivent d'abord, puis 30 % de tous les abonnés partent. On note b_n le nombre d'abonnés au 1er janvier de l'année $2025+n$. Écris b_{n+1} sous la forme $b_{n+1} = q\,b_n + c$, puis calcule b_1.

(e) Compare a_1 et b_1. Explique d'où vient l'écart.

Ex. 16 ★★☆ **Une grille d'allumettes** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'étape n est une grille carrée de n carreaux sur n carreaux, faite avec des allumettes. Chaque côté de carreau est une allumette. Deux carreaux voisins partagent l'allumette de leur côté commun. On note s_n le nombre d'allumettes de l'étape n.

(a) Dessine les étapes 1, 2 et 3, puis compte les allumettes pour donner s_1, s_2 et s_3.

(b) Noah raisonne ainsi : « pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on ajoute $2n+1$ carreaux. Chaque carreau a 4 allumettes, donc $s_{n+1} = s_n + 4(2n+1)$. » A-t-il raison ? Justifie à l'aide des premières étapes.

(c) À l'étape n, compte les allumettes horizontales, puis les allumettes verticales. Déduis-en une forme explicite de s_n.

(d) Exprime $s_{n+1} - s_n$ en fonction de n, puis écris la relation de récurrence vérifiée par (s_n). Contrôle-la sur le passage de l'étape 2 à l'étape 3.

(e) Ben a déjà construit la grille de 7 carreaux sur 7. Combien d'allumettes doit-il ajouter pour obtenir la grille de 10 carreaux sur 10 ? Vérifie ton résultat à l'aide de la relation de récurrence.

Ex. 17 ★★☆ **Corriger une boucle qui démarre à 1** — On considère la suite (r_n) définie par $r_0 = 2$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $r_{n+1} = 2r_n - n + 1$. Inès a écrit cette fonction pour calculer r_n :

```
def r(n):
    x = 2
    for i in range(1, n + 1):
        x = 2*x - i + 1
    return x
```

(a) Calcule à la main r_1, r_2 et r_3.

(b) Fais le tableau des valeurs de `i` et de `x`, tour par tour, lors de l'appel `r(2)`. Que renvoie la fonction d'Inès ? Conclus.

(c) Modifie une seule ligne de la fonction d'Inès pour qu'elle renvoie r_n, sans changer la ligne du `for`. Explique ta correction.

(d) Complète la ligne en pointillés pour que `liste(n)` renvoie la liste des termes de r_0 à r_n. Que renvoie alors `liste(3)` ?

```
def liste(n):
    L = [2]
    for i in range(n):
        L.append(...)
    return L
```

(e) Dans ta fonction `liste`, Jade remplace la ligne `L = [2]` par `L = []`, sans rien changer d'autre. Que se passe-t-il lors de l'appel `liste(3)` ? Explique pourquoi l'initialisation `L = [2]` est indispensable.

Ex. 18 ★★☆ **Affectation simultanée et indentation** — On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Trois élèves ont écrit une fonction pour calculer a_n.

Yanis :

```
def A(n):
    a, b = 1, 3
    for k in range(n):
        a, b = b, b + 2*a
    return a
```

Chloé :

```
def B(n):
    a, b = 1, 3
    for k in range(n):
        a = b
        b = b + 2*a
    return a
```

Malik :

```
def C(n):
    a, b = 1, 3
    for k in range(n):
        a, b = b, b + 2*a
        return a
```

(a) Calcule a_2, a_3 et a_4.

(b) Fais le tableau des valeurs de `k`, `a` et `b`, tour par tour, lors de l'appel `A(4)`. Que renvoie la fonction de Yanis ?

(c) Chloé affirme : « ma fonction `B` renvoie elle aussi a_n ». Vrai ou faux ? Justifie en calculant `B(3)`.

(d) Que renvoie `C(5)` ? Explique ce que change l'indentation de la ligne `return a`.

(e) Réécris la fonction de Chloé pour qu'elle renvoie a_n, sans affectation simultanée, en ajoutant une variable `c`.

Ex. 19 ★★★ **Vélos en libre-service : deux calendriers** — Au 1er janvier 2025, le service de vélos en libre-service de Grenoble compte 400 vélos. Chaque année, 20 % des vélos présents sont mis au rebut et 100 vélos neufs sont achetés.

Plan A : rebut pendant l'année, puis livraison des 100 vélos neufs en décembre.

Plan B : livraison des 100 vélos neufs en janvier, puis rebut de 20 % des vélos présents, neufs compris.

On note a_n (plan A) et b_n (plan B) le nombre de vélos au 1er janvier de l'année $2025 + n$. On accepte des valeurs non entières.

(a) Pour le plan A, Hugo écrit $a_{n+1} = 0{,}2\,a_n + 100$. A-t-il raison ? Justifie, puis donne a_0 et la relation correcte entre a_{n+1} et a_n.

(b) Pour le plan B, établis la relation entre b_{n+1} et b_n, puis calcule b_1 et b_2. Que remarques-tu ? Explique pourquoi cela continue les années suivantes.

(c) Selon le plan A, combien de vélos y aura-t-il au 1er janvier 2028 ? Compare avec le plan B, puis explique en une phrase pourquoi l'ordre des opérations change le résultat.

Ex. 19 **(suite)**

(d) On considère la fonction Python suivante.

```
def plan_A(k):
    a = 400
    L = [a]
    for i in range(k):
        a = 0.8 * a + 100
        L.append(a)
    return L
```

Combien d'éléments contient la liste renvoyée par `plan_A(6)` ? Que représente son dernier élément (précise l'année) ? Donne sa valeur arrondie à l'unité.

(e) On considère la fonction Python suivante.

```
def annee_A():
    a = 400
    n = 0
    while a <= 480:
        a = 0.8 * a + 100
        n = n + 1
    return 2025 + n
```

Que renvoie `annee_A()` ? Interprète ce résultat. Que se passe-t-il si l'on remplace la ligne `a = 0.8 * a + 100` par `a = 0.8 * (a + 100)` (plan B) ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Les couronnes de pavés autour d'une fontaine** — Sur une place d'Avignon, une fontaine carrée occupe une case d'un quadrillage. Un paysagiste l'entoure de pavés carrés, de la même taille qu'une case.

À l'étape 1, 8 pavés entourent la fontaine : avec elle, ils forment un carré de 3 cases sur 3.

Pour passer d'une étape à la suivante, on pose une nouvelle couronne de pavés tout autour du carré déjà formé.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note t_n le nombre de pavés à l'étape n (la fontaine n'est pas comptée).

(a) Dessine les étapes 2 et 3. En comptant les pavés, donne t_2 et t_3.

(b) Combien de cases mesure le côté du grand carré (fontaine comprise) à l'étape n ? Déduis-en une forme explicite de t_n, puis contrôle-la sur les étapes 1, 2 et 3.

(c) Mathis affirme : « Une couronne a 4 côtés. Je compte les pavés d'un côté, coins compris, et je multiplie par 4. » Applique sa méthode au passage de l'étape 1 à l'étape 2. A-t-il raison ? Justifie, puis corrige sa méthode et déduis-en la relation entre t_{n+1} et t_n.

(d) Une étape peut-elle compter exactement 1 680 pavés ? Et exactement 2 000 pavés ? Justifie.

Ex. 20 **(suite)**

(e) Ben dispose de `stock` pavés. Il cherche la plus grande étape qu'il peut réaliser entièrement. Dans sa fonction, `t` doit contenir t_n à chaque test de la condition du `while`.

```
def plus_grande_etape(stock):
    n = 1
    t = 8
    while t <= stock:
        n = n + 1
        t = ...
    return n - 1
```

Complète la ligne en pointillés. Explique pourquoi la fonction renvoie `n - 1` et non `n`. Lucas propose d'échanger l'ordre des deux lignes de la boucle. A-t-il raison ? Justifie.

(f) Que renvoie `plus_grande_etape(1000)` ? Justifie à l'aide de la forme explicite, puis indique combien de pavés il reste alors à Ben.

Ex. 21 ★★★ **Retrouver la suite cachée dans un programme** — Voici une fonction Python.

```
def mystere(n):
    u = 37
    L = [u]
    for k in range(1, n + 1):
        u = u + 2 * k - 13
        L.append(u)
    return L
```

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note u_n la valeur de la variable `u` après n tours de boucle. Ainsi $u_0 = 37$.

(a) Que renvoie `mystere(5)` ? Détaille tes calculs tour par tour
(valeurs de `k`, de `u` et de `L`).

(b) Sofia lit le programme et écrit : « Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 13$. » A-t-elle raison ? Justifie, puis donne, pour tout $n \geqslant 0$, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et de n.

(c) Calcule u_6, u_7, u_8, u_9 et u_{10}. Que remarques-tu sur les valeurs de u_0 à u_{10} ? Conjecture une forme explicite du type $u_n = (n-a)^2 + b$, où a et b sont des entiers.

(d) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note w_n l'expression en n que tu as conjecturée à la question précédente. Calcule w_0 et $w_{n+1} - w_n$. Explique pourquoi ces deux résultats permettent d'affirmer que $u_n = w_n$ pour tout n.

(e) Théo a recopié la fonction en décalant une ligne.

```
def mystere2(n):
    u = 37
    L = [u]
    for k in range(1, n + 1):
        u = u + 2 * k - 13
    L.append(u)
    return L
```

Que renvoient `mystere2(5)` et `mystere2(0)` ? Explique son erreur et corrige-la.

Ex. 21 **(suite)**

(f) Ben propose une autre fonction, dont la boucle n'utilise pas la valeur de `k`.

```
def terme(n):
    u, d = 37, -11
    for k in range(n):
        u, d = u + d, d + 2
    return u
```

Explique ce que représente `d` et pourquoi `terme(n)` renvoie u_n. Vrai ou faux : on peut remplacer la ligne `u, d = u + d, d + 2` par les deux lignes `d = d + 2` puis `u = u + d` ? Justifie en calculant ce que renverrait alors `terme(3)`.

3. *Représenter une suite : nuage de points et escalier*

À retenir : Nuage : points $(n\,;u_n)$ non reliés. Si $u_n = f(n)$, les termes sont les ordonnées des points de la courbe d'abscisse entière. Si $u_{n+1} = f(u_n)$, je trace l'escalier avec la droite $y = x$ et je lis les termes en abscisse ; f décroissante donne une spirale (suite non monotone). Une figure ne donne qu'une conjecture.

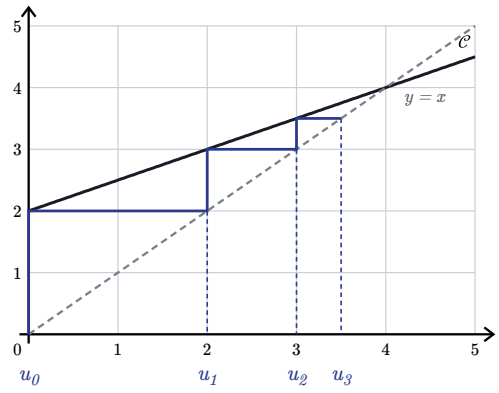
Ex. 22 ★☆☆ **Placer le nuage de points** — Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 4n - 1$.

(a) Calcule $u_0, u_1, \ldots, u_5$.

(b) Représente ces six termes dans un repère.

(c) Que remarques-tu sur le nuage ?

Ex. 23 ★★☆ **Lire un escalier** — On a représenté la droite $\mathcal{C}$ d'une fonction affine f, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.



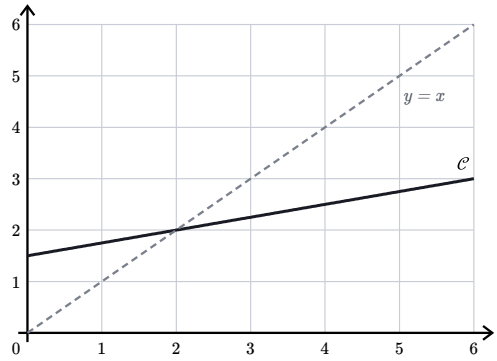
(a) Lis u_1, u_2 et u_3.

(b) Détermine l'expression de $f(x)$, puis la relation de récurrence.

(c) Contrôle deux des valeurs lues par le calcul.

(d) Que semble faire la suite ?

Ex. 24 ★★☆ **Construire un escalier** — On a tracé la droite $\mathcal{C}$ de $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ et la droite d'équation $y = x$. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.



(a) Construis u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses, sans calcul.

(b) Calcule u_1, u_2 et u_3 et compare avec ta construction.

Ex. 25 ★★☆ **Un nuage qui commence à n = 1** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{12}{n} - 2$.

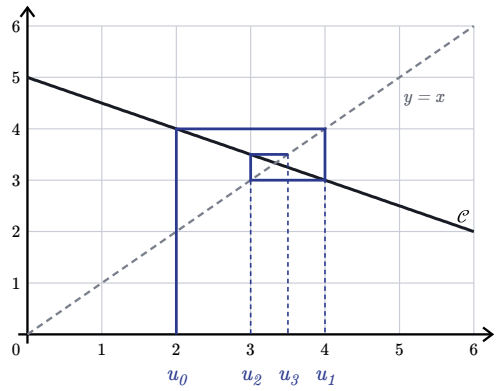
(a) Explique pourquoi le nuage de points de (v_n) ne peut pas commencer à $n = 0$.

(b) Calcule v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et v_6, puis place le nuage de points correspondant.

(c) Léo relie les points par une courbe. Il calcule $\frac{12}{1{,}5} - 2 = 6$ et affirme : « le point d'abscisse 1,5 de ma courbe donne un terme de la suite, égal à 6 ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) À partir du nuage, conjecture le sens de variation de (v_n) et sa limite. Démontre ensuite le sens de variation en calculant $v_{n+1} - v_n$.

Ex. 26 ★★☆ **Un escalier en spirale** — Soit $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La figure montre la droite $\mathcal{C}$ de f, la droite d'équation $y = x$ et la construction des termes u_0 à u_3.



(a) Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4.

(b) Pour construire u_4, Lucas part du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse u_3. Il place u_4 sur l'axe des ordonnées, à la hauteur de ce point, et s'arrête là. Corrige sa construction.

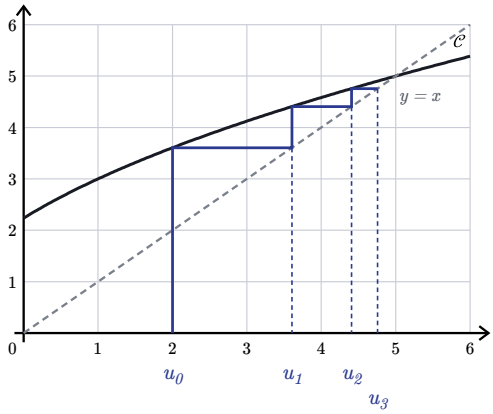
Ex. 26 (suite)

(c) Sami affirme : « la suite (u_n) est croissante, puisque l'escalier part du bas de la figure et monte ». Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Calcule l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$. Conjecture ensuite la limite de (u_n).

(e) On note ℓ l'abscisse trouvée à la question précédente. Démontre que, pour tout n, $u_{n+1} - \ell = -\frac{1}{2}(u_n - \ell)$. Explique ce que cette égalité dit de la position des termes par rapport à ℓ.

Ex. 27 ★★☆ **Même fonction, deux suites** — Soit $f(x) = \sqrt{4x + 5}$, définie pour $x \geqslant 0$. On définit deux suites. D'une part, $r_n = f(n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$. D'autre part, $s_0 = 2$ et $s_{n+1} = f(s_n)$. La figure montre la courbe $\mathcal{C}$ de f, la droite $y = x$ et l'escalier de (s_n) jusqu'à s_3.



(a) Calcule les valeurs exactes de r_0, r_1, r_2 et r_3.

(b) Chloé veut placer r_2. Elle part de 0 sur l'axe des abscisses et fait deux marches d'escalier entre $\mathcal{C}$ et la droite $y = x$. A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

(c) Lis sur la figure des valeurs approchées de s_1, s_2 et s_3. Calcule-les ensuite, arrondies à 10^{-2}.

(d) Explique pourquoi $s_1 = r_2$, alors que $s_2 \neq r_3$.

(e) Conjecture la limite de (r_n) et celle de (s_n). Pour (s_n), justifie la valeur conjecturée par un calcul.

Ex. 28 ★★☆ **Un nuage préparé avec Python** — Pendant un stage d'escalade de 7 jours à Grenoble, le nombre d'inscrits à l'atelier du jour n ($1 \leqslant n \leqslant 7$) est $g_n = 50n - 6n^2$. Noé veut obtenir la liste $[g_1, g_2, \ldots, g_7]$ pour tracer le nuage. Il écrit :

```
L = []
for n in range(7):
    L.append(50 * n - 6 * n ** 2)
print(L)
```

(a) Qu'affiche ce programme ? Explique pourquoi la liste obtenue ne convient pas.

(b) Modifie une seule ligne du programme pour obtenir la liste $[g_1, \ldots, g_7]$. Donne ce qu'affiche le programme corrigé.

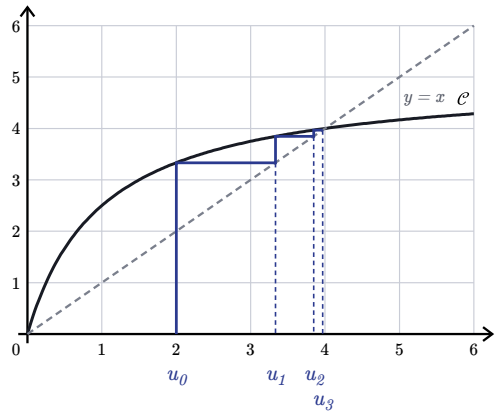
(c) Place le nuage de points de (g_n) dans un repère où l'axe des ordonnées est gradué de 10 en 10.

Ex. 28 **(suite)**

(d) Inès relie les points par une parabole, celle de $x \mapsto 50x - 6x^2$. Son sommet a pour abscisse $\frac{25}{6} \approx 4{,}17$. Elle conclut : « le plus grand nombre d'inscrits est environ 104,17, atteint le jour 4,17 ». Corrige sa conclusion.

(e) Vrai ou faux : « le nuage prouve que (g_n) est décroissante à partir du rang 4 ». Justifie, puis démontre ce sens de variation en calculant $g_{n+1} - g_n$.

Ex. 29 ★★★ **Deux départs, deux escaliers** — Soit $f(x) = \frac{5x}{x+1}$, définie pour $x \geqslant 0$. On définit deux suites par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, puis par $v_0 = 9$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. La figure montre la courbe $\mathcal{C}$ de f, la droite d'équation $y = x$ et l'escalier de (u_n).

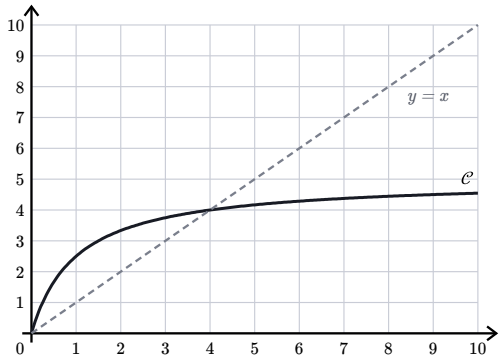


Donne des valeurs exactes.

(a) Calcule u_1, u_2 et u_3.

(b) Pour trouver u_2, Maëlle prend le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 et écrit $u_2 = f(2)$. Explique son erreur. Indique le rôle de la droite $y = x$ dans la construction.

(c) Sur la figure ci-dessous, construis v_1 et v_2 sur l'axe des abscisses, sans calcul. Calcule ensuite leurs valeurs exactes.



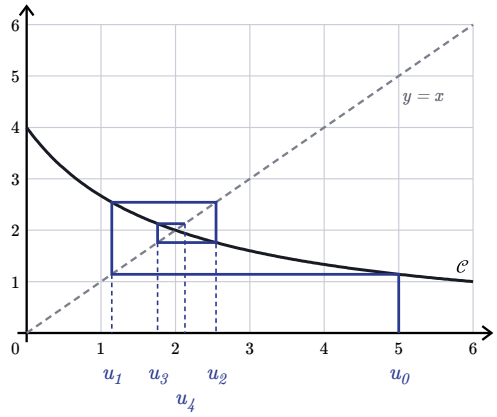
(d) Détermine par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$. À l'aide des deux escaliers, conjecture le sens de variation et la limite de (u_n) et de (v_n).

Ex. 29 **(suite)**

(e) Un camarade affirme : « Comme f est croissante, une suite définie par $w_{n+1} = f(w_n)$ est toujours croissante. » Vrai ou faux ? Justifie.

(f) Vrai ou faux : « Quelle que soit la valeur de départ $w_0 \geqslant 0$, la suite définie par $w_{n+1} = f(w_n)$ se rapproche de 4. » Justifie.

Ex. 30 ★★★ **Une spirale et deux erreurs** — La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{8}{u_n + 2}$. On pose $f(x) = \frac{8}{x+2}$ pour $x \geqslant 0$. La figure montre la courbe $\mathcal{C}$ de f, la droite d'équation $y = x$ et l'escalier de u_0 à u_4.



Donne des valeurs exactes.

(a) Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4.

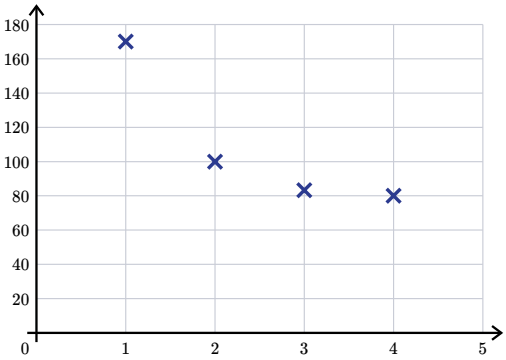
(b) Range u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 dans l'ordre croissant. Justifie que f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et explique pourquoi l'escalier forme une spirale.

(c) Hugo constate que $u_1 < u_0$. Il affirme : « Comme f est décroissante, la suite (u_n) est décroissante, au moins à partir d'un certain rang. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Place le nuage des points $(n\,;u_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 4$. Clara affirme : « Comme l'escalier, le nuage forme une spirale autour d'un point. » Vrai ou faux ? Décris la disposition des points du nuage.

(e) Détermine par le calcul l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$. Formule une conjecture sur la limite de (u_n) et précise ce qui manque pour la prouver.

Ex. 31 ★★★ **Le meilleur lot de cartes de visite** — Une imprimerie de Rodez fabrique des cartes de visite par lots de n centaines, avec $n \geqslant 1$. Le coût moyen d'une centaine de cartes, en euros, est $c_n = 10n + \frac{160}{n}$. Le gérant a fait tracer le nuage des points $(n\,;c_n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 4$.



(a) Lis sur le nuage une valeur approchée de c_3. Calcule ensuite c_3 (valeur exacte, puis arrondie au centime) et explique l'écart.

(b) Raphaël regarde le nuage. Il conclut : « Plus le lot est gros, moins la centaine coûte cher : la suite (c_n) est décroissante. » Calcule c_5 et c_6. Ta conclusion est-elle la même que celle de Raphaël ? Justifie.

(c) Montre que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $c_{n+1} - c_n = 10 - \frac{160}{n(n+1)}$.

(d) Déduis-en le sens de variation de (c_n) en précisant à partir de quel rang il change. Indique le lot qui donne le coût moyen le plus bas et ce coût.

(e) Le gérant veut que la centaine coûte moins de 85 euros. Détermine tous les lots qui conviennent et justifie qu'il n'y en a pas d'autres.

4. *Étudier le sens de variation*

À retenir : J'étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour TOUT entier n. Je compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 seulement si tous les termes sont strictement positifs. Les variations de f servent si $u_n = f(n)$, jamais si $u_{n+1} = f(u_n)$. Quelques termes rangés ne prouvent pas la monotonie.

Ex. 32 ★☆☆ **La différence est donnée** — Chaque suite est définie par son premier terme (quelconque) et, pour tout entier naturel n, par la relation donnée. Étudie son sens de variation.

(a) $u_{n+1} = u_n - n^2 - 5$

(b) $v_{n+1} = v_n + \dfrac{5}{n+1}$

(c) $w_{n+1} = w_n + (n-3)^2$

Ex. 33 ★☆☆ **Croissante, mais pas strictement** — Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 - 3n + 7$.

(a) Exprime u_{n+1} en fonction de n, sous forme développée et réduite.

(b) Calcule $u_{n+1} - u_n$ et étudie son signe pour tout entier naturel n.

(c) Léo écrit : « (u_n) est strictement croissante. » L'affirmation de Léo est-elle correcte ? Justifie.

(d) À partir de quel rang la suite (u_n) est-elle strictement croissante ? Justifie.

Ex. 34 ★★☆ **La différence dépend du terme** — Chaque suite est définie par son premier terme (quelconque) et, pour tout entier naturel n, par la relation donnée. Étudie son sens de variation.

(a) $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

(b) $v_{n+1} = v_n^2 + v_n + 4$

(c) $w_{n+1} = w_n + (-1)^n$

Ex. 35 ★★☆ **Les premiers termes trompent** — Pour tout entier naturel n, $u_n = -n^2 + 11n + 5$.

(a) Calcule u_0, u_1, u_2 et u_3.

(b) Peut-on en déduire que la suite est croissante ? Justifie.

(c) Calcule $u_{n+1} - u_n$ et étudie son signe.

(d) Conclus.

Ex. 36 ★★☆ **Une parabole qui n'est pas monotone** — On pose $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_n = f(n)$.

(a) Détermine l'abscisse du sommet de la parabole qui représente f, puis donne les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Sami affirme : « f n'est pas monotone sur $[0\,;+\infty[$, donc (w_n) n'est pas monotone. » Calcule $w_{n+1} - w_n$ et étudie son signe. L'affirmation de Sami est-elle correcte ?

(c) Retrouve le sens de variation de (w_n) par une autre méthode : utilise les variations de f sur $[1\,;+\infty[$, puis compare w_0 et w_1.

(d) On pose maintenant $k(x) = 3x^2 - 8x + 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_n = k(n)$. Calcule z_0, z_1 et z_2, puis étudie le signe de $z_{n+1} - z_n$. Décris précisément le sens de variation de (z_n).

Ex. 37 ★★☆ **Le quotient, mais pas n'importe comment** — Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = (n+3) \times 0{,}8^n$ et $c_n = (-1)^n \times (n+2)$.

(a) Justifie que $a_n > 0$ pour tout entier naturel n, puis exprime $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ en fonction de n.

(b) Compare $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ à 1 selon les valeurs de l'entier naturel n.

(c) Calcule a_0, a_1 et a_2, puis décris précisément le sens de variation de (a_n).

Ex. 37 **(suite)**

(d) Hugo calcule $\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{n+3}{n+2}$. Il constate que ce quotient est inférieur à 1 et conclut que (c_n) est décroissante. Le raisonnement de Hugo est-il correct ? Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Le programme qui rassure trop** — Mathis a ouvert une boutique en ligne à Annecy. Son bénéfice du mois numéro n, en centaines d'euros, est modélisé par $b_n = -n^2 + 40n + 30$. Il écrit ce programme :

```
def b(n):
    return -n**2 + 40*n + 30

ok = True
for n in range(15):
    if b(n + 1) - b(n) <= 0:
        ok = False
print(ok)
```

Le programme affiche `True`.

(a) Explique précisément ce que teste ce programme.

(b) Mathis conclut : « Mon bénéfice augmente tous les mois. » Exprime $b_{n+1} - b_n$ en fonction de n et étudie son signe pour tout entier naturel n. La conclusion de Mathis est-elle correcte ?

(c) Calcule b_{19}, b_{20} et b_{21}, puis décris précisément le sens de variation de (b_n).

(d) Mathis remplace `range(15)` par `range(30)`. Qu'affiche alors le programme ? Explique pourquoi ce genre de programme peut prouver qu'une suite n'est pas strictement croissante, mais jamais qu'elle l'est.

Ex. 39 ★★☆ **Une même relation, deux départs** — Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 8 - 3v_n$. Le premier terme v_0 change selon les questions.

(a) On prend $v_0 = 2$. Calcule v_1 et v_2, puis donne le sens de variation de (v_n) en justifiant.

(b) On prend $v_0 = 1$. Calcule v_1, v_2 et v_3.

(c) Avec $v_0 = 1$, la suite (v_n) est-elle monotone ? Justifie à l'aide des termes calculés.

(d) Exprime $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_n, puis détermine les valeurs de v_0 pour lesquelles $v_1 > v_0$.

Ex. 40 ★★★ **Fonction croissante, suite… pas forcément** — On pose $f(x) = 5x - 36$ pour tout réel x. On définit deux suites : pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$; et $v_0 = 8$ avec $v_{n+1} = f(v_n)$, c'est-à-dire $v_{n+1} = 5v_n - 36$. Inès affirme : « f est croissante, donc (u_n) et (v_n) sont croissantes. »

(a) Justifie que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Étudie ensuite le sens de variation de (u_n) de deux façons : avec la fonction f, puis avec le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(b) Calcule v_1, v_2 et v_3. Inès a-t-elle raison pour (v_n) ? Justifie.

Ex. 40 **(suite)**

(c) On garde la relation $v_{n+1} = f(v_n)$, mais on change le premier terme. Détermine la seule valeur de v_0 pour laquelle $v_1 = v_0$. Justifie qu'avec cette valeur, la suite (v_n) est constante.

(d) Explique pourquoi la propriété « si f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite $(f(n))$ est croissante » s'applique à (u_n), mais pas à (v_n).

(e) Vrai ou faux ? « Si une fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors toute suite définie par $w_{n+1} = g(w_n)$ est décroissante. » Justifie. Tu pourras tester $g(x) = 10 - x$ avec $w_0 = 3$.

Ex. 41 ★★★ **Une suite qui hésite au départ** — Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n + \frac{6}{n+1}$. On note $f(x) = x + \frac{6}{x+1}$ pour $x \geqslant 0$, de sorte que $u_n = f(n)$. Donne des valeurs exactes.

(a) Kenza écrit : « Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto x$ est croissante et la fonction $x \mapsto \frac{6}{x+1}$ est décroissante, donc j'en déduis le sens de variation de f. » Explique pourquoi ce raisonnement ne permet pas de conclure.

(b) Calcule u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. Que peux-tu déjà affirmer sur la monotonie de (u_n) sur $\mathbb{N}$? Justifie.

(c) Exprime $u_{n+1} - u_n$ sous la forme d'un seul quotient, puis factorise son numérateur.

(d) Étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n. Déduis-en le sens de variation de (u_n) à partir d'un rang que tu préciseras.

(e) Vrai ou faux ? « (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1. » Justifie, puis détermine le plus petit terme de la suite.

(f) Vrai ou faux ? « (u_n) est croissante à partir du rang 1, donc f est croissante sur $[1\,;+\infty[$. » Justifie. Tu pourras calculer $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Ex. 42 ★★★ **L'exposition de Colmar** — Une exposition temporaire ouvre à Colmar. On note a_n le nombre de visiteurs le jour numéro n (le jour 0 est le jour de l'ouverture). On modélise ce nombre par $a_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{6}{n+3} \times a_n$. Donne les valeurs exactes, puis arrondies à l'unité quand elles ne sont pas entières.

(a) Calcule a_1, a_2, a_3 et a_4. Yanis, le gardien, affirme : « $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$, donc la fréquentation augmente chaque jour. » A-t-il raison ? Justifie en calculant aussi a_5.

(b) Justifie que tous les termes de la suite sont strictement positifs, puis exprime $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ en fonction de n.

(c) Compare $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ à 1 selon les valeurs de l'entier naturel n. Déduis-en le sens de variation de (a_n), en précisant les rangs. Donne la fréquentation maximale et les jours où elle est atteinte.

Ex. 42 **(suite)**

(d) Lina préfère la méthode de la différence. Écris $a_{n+1} - a_n$ sous la forme $a_n \times q(n)$, où $q(n)$ est un quotient qui ne dépend que de n. Retrouve les conclusions précédentes et indique quel résultat déjà établi Lina utilise, elle aussi.

(e) On veut le premier jour où la fréquentation passe sous 100 visiteurs. Complète ce programme, puis donne la valeur qu'il affiche.

```
n = 0
a = 200
while ......... :
    a = .........
    n = n + 1
print(n)
```

(f) Explique pourquoi, après ce jour, la fréquentation reste sous 100 visiteurs d'après le modèle.

5. *Conjecturer une limite, chercher un seuil*

À retenir : Limite : je la conjecture avec n très grand (10^3, 10^6…). Seuil : je résous l'inéquation, puis je contrôle avec les deux termes qui encadrent la réponse ; attention au cas d'égalité. La condition du `while` est la négation : pour $u_n < s$, j'écris `while u >= s:`. Si le seuil n'est jamais franchi, la boucle ne s'arrête pas.

Ex. 43 ★☆☆ **Des valeurs de plus en plus grandes** — Pour tout entier naturel n, $u_n = -2 + \frac{3}{n+1}$. Donne des valeurs approchées à 10^{-4} près.

(a) Calcule u_{10} et u_{100}.

(b) Calcule $u_{1\,000}$.

(c) Quelle limite peut-on conjecturer pour (u_n) ?

(d) Tom affirme : « Ces trois valeurs démontrent que la suite tend vers cette limite. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 44 ★★☆ **Lire un algorithme de seuil** — Voici une fonction écrite en Python.

```
def seuil():
    u = 1
    n = 0
    while u < 9.9:
        u = 0.9*u + 1
        n = n + 1
    return n
```

(a) Que représente la valeur renvoyée par `seuil()` ?

(b) Que renvoie `seuil()` ?

(c) Que renverrait la fonction si on écrivait `while u <= 9.9:` ? Dans quel cas les deux versions renverraient-elles des valeurs différentes ?

Ex. 45 ★★☆ **Une récurrence qui se stabilise** — La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 7$.

(a) Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4 (valeurs approchées à 10^{-3} près si besoin).

(b) Calcule u_{15} et u_{30} à 10^{-3} près, puis conjecture la limite de (u_n).

(c) Détermine le plus petit entier n tel que $u_n > 17{,}4$. Explique pourquoi des valeurs arrondies à 10^{-3} ne suffisent pas pour conclure.

Ex. 46 ★★☆ **Quand Python arrondit** — Pour tout entier naturel n, $x_n = 0{,}1n$. Mia cherche le plus petit entier n tel que $x_n = 1$. Voici son programme A :

```
def compte():
    n = 0
    x = 0
    while x != 1:
        n = n + 1
        x = x + 0.1
    return n
```

Voici le programme B :

```
x = 0
for k in range(10):
    x = x + 0.1
print(x)
```

Le programme B affiche `0.9999999999999999`.

(a) En calcul exact, pour quel entier n a-t-on $x_n = 1$?

(b) En t'appuyant sur l'affichage du programme B, explique pourquoi l'appel `compte()` du programme A ne s'arrête jamais.

(c) Mia remplace la condition par `while x < 1:`. Que renvoie alors `compte()` ? Propose une condition de `while` qui fait renvoyer la bonne valeur.

Ex. 47 ★★☆ **Des termes qui grimpent… jusqu'où ?** — Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1\,000n}{n+500}$. Donne les valeurs approchées à 0,1 près.

(a) Calcule u_{10}, u_{100} et $u_{1\,000}$.

(b) Lina affirme : « Les termes ne font que grimper, donc la suite tend vers $+\infty$. » Calcule $u_{10\,000}$ et $u_{1\,000\,000}$. L'affirmation de Lina est-elle justifiée ? Justifie.

(c) Quelle limite conjectures-tu pour (u_n) ? Explique comment la prévoir en comparant les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

(d) Détermine les réels a et b tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = a - \frac{b}{n+500}$. Déduis-en que tous les termes sont strictement inférieurs à a, puis que la suite ne peut pas tendre vers $+\infty$.

Ex. 48 ★★☆ **Un thé qui refroidit** — À Brest, Malo verse un thé à 90 °C dans une pièce à 20 °C. On modélise la température du thé, en °C, au bout de n minutes : $T_0 = 90$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 4$. Malo cherche le plus petit entier n tel que $T_n < 30$. Voici son programme :

```
def seuil(s):
    n = 0
    T = 90
    while T < s:
        n = n + 1
        T = 0.8 * T + 4
    return n
```

(a) Calcule T_1, T_2 et T_3.

(b) Que renvoie l'appel `seuil(30)` ? Explique l'erreur de Malo et corrige la ligne du `while`.

(c) Avec la ligne corrigée, calcule les termes suivants jusqu'à passer sous 30 (valeurs à 10^{-2} près). Donne la valeur renvoyée par `seuil(30)`.

(d) Inès recopie la version corrigée, mais écrit `n = 1` à la place de `n = 0`. Que renvoie son appel `seuil(30)` ? Explique pourquoi ce résultat est faux.

(e) On admet que $T_n > 20$ pour tout entier naturel n. Que se passe-t-il lors de l'appel `seuil(20)` avec la version corrigée ? Quelle limite conjectures-tu pour (T_n) ?

Ex. 49 ★★☆ **Une croissance très lente** — Pour tout entier naturel n, $h_n = 2\sqrt{n} + 1$. La suite (h_n) est croissante, car la fonction racine carrée est croissante.

(a) Résous l'inéquation $h_n > 50$ d'inconnue n. Contrôle ta réponse avec les deux termes qui l'encadrent (valeurs à 10^{-2} près), puis donne le plus petit entier n qui convient.

(b) Détermine le plus petit entier n tel que $h_n \geqslant 41$, puis le plus petit entier n tel que $h_n > 41$. Explique pourquoi les deux réponses sont différentes.

(c) Nora affirme : « Les écarts $h_{n+1} - h_n$ deviennent minuscules, donc la suite ne dépassera jamais 1 000. » Calcule $h_{101} - h_{100}$ à 10^{-4} près. Détermine ensuite le plus petit entier n tel que $h_n > 1\,000$. L'affirmation de Nora est-elle juste ? Justifie.

(d) Soit A un réel strictement supérieur à 1. Montre que $h_n > A$ dès que $n > \left(\frac{A-1}{2}\right)^2$. Quelle limite conjectures-tu pour (h_n) ?

Ex. 50 ★★☆ **Deux escaliers, deux comportements** — Figure 1 : la suite (r_n) définie par $r_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $r_{n+1} = 7 - r_n$. On a tracé la courbe $\mathcal{C}$ de $f(x) = 7 - x$.

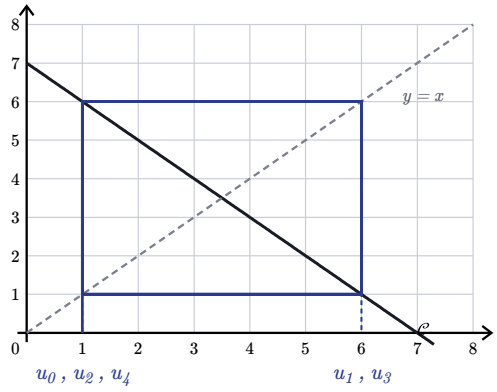
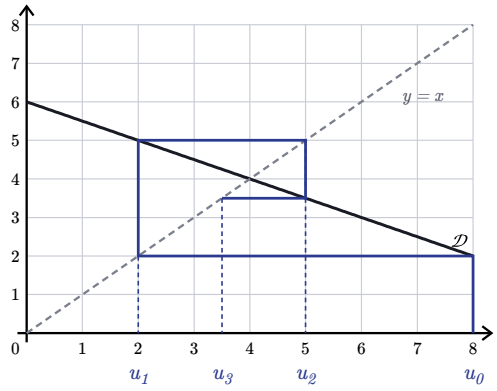


Figure 2 : la suite (b_n) définie par $b_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 6 - 0{,}5b_n$. On a tracé la courbe $\mathcal{D}$ de $g(x) = 6 - 0{,}5x$.



(a) Lis sur la figure 1 les termes r_1, r_2, r_3 et r_4. Donne la valeur de r_n selon que n est pair ou impair.

(b) La suite (r_n) a-t-elle une limite finie, une limite infinie ou aucune limite ? Justifie.

(c) Calcule b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5. Contrôle les trois premiers sur la figure 2.

(d) Yanis affirme : « (b_n) passe alternativement au-dessus et au-dessous de 4, comme (r_n) autour de 3,5. Elle n'a donc pas de limite non plus. » Exprime $b_{n+1} - 4$ en fonction de $b_n - 4$, puis $r_{n+1} - 3{,}5$ en fonction de $r_n - 3{,}5$. L'affirmation de Yanis est-elle juste ? Justifie.

(e) Détermine le plus petit entier n tel que l'écart entre b_n et 4 soit strictement inférieur à 0,01.

Ex. 51 ★★★ **Corriger un programme de seuil** — Pour tout entier naturel n, $v_n = 4 + \frac{60}{n+2}$. Adam cherche le plus petit entier n tel que $v_n < 4{,}1$. Voici son programme A :

```
def seuil_A():
    n = 0
    v = 34
    while v > 4.1:
        n = n + 1
        v = 4 + 60/(n + 2)
    return n
```

Donne les valeurs approchées à 10^{-4} près si besoin.

(a) Calcule v_{10}, v_{100} et $v_{1\,000}$. Quelle limite peux-tu conjecturer pour la suite (v_n) ?

(b) Étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$. Déduis-en le sens de variation de (v_n).

(c) Résous l'inéquation $v_n < 4{,}1$ d'inconnue n. Contrôle ta réponse avec les deux termes qui l'encadrent, puis conclus.

(d) Que renvoie l'appel `seuil_A()` ? Explique pourquoi ce n'est pas le rang cherché, puis corrige la ligne fautive du programme A.

(e) Léa recopie le programme A corrigé, mais écrit les deux lignes du corps de la boucle dans l'autre ordre : d'abord `v = 4 + 60/(n + 2)`, puis `n = n + 1`. Que renvoie alors l'appel ? Explique d'où vient l'écart avec la bonne réponse et propose une correction.

(f) Adam transforme le programme A corrigé en une fonction `seuil(s)` qui renvoie le plus petit entier n tel que $v_n < s$. Pour quelles valeurs du réel s l'appel `seuil(s)` s'arrête-t-il ? Justifie.

Ex. 52 ★★★ **Trois conjectures trop rapides** — À Rouen, trois élèves conjecturent des limites un peu vite. Pour tout entier naturel n : $p_n = 0{,}02n^2 - 3n + 120$, $q_n = 2n + 9 \times (-1)^n$ et $s_n = 5 \times (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. Donne les valeurs approchées à 10^{-4} près si besoin.

(a) Jade calcule $p_0 = 120$, $p_{10} = 92$, $p_{20} = 68$ et $p_{50} = 20$. Elle affirme : « (p_n) est décroissante et tend vers $-\infty$. » Calcule p_{100} et $p_{1\,000}$. Jade a-t-elle raison ? Justifie.

(b) Montre que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0{,}02(n - 75)^2 + 7{,}5$. Déduis-en le sens de variation de (p_n) à partir du rang 75, ainsi que le signe de p_n.

(c) Détermine le plus petit entier n tel que $p_n > 10\,000$. Contrôle ta réponse avec les deux termes qui l'encadrent. Quelle limite conjectures-tu pour (p_n) ? Explique.

(d) Hugo calcule q_0, q_1, q_2 et q_3, puis affirme : « (q_n) descend puis remonte sans arrêt, donc elle n'a pas de limite. » Calcule ces quatre termes, puis $q_{1\,000}$ et $q_{1\,001}$. Montre que $q_n \geqslant 2n - 9$ pour tout entier naturel n. Hugo a-t-il raison ? Justifie.

(e) Pour tout entier naturel n, $t_n = \frac{7n^2 - 4n}{5 - 2n^2}$. Pour $n \geqslant 1$, mets n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur. Conjecture la limite de (t_n), puis contrôle avec $t_{1\,000}$.

Ex. 52 (suite)

(f) Zoé trouve $s_{10} \approx 5{,}0909$, $s_{100} \approx 5{,}0099$ et $s_{1\,000} \approx 5{,}0010$. Elle conjecture que (s_n) tend vers 5. Calcule s_{11}, s_{101} et $s_{1\,001}$. Zoé a-t-elle raison ? Justifie, puis indique l'erreur de méthode commune à Zoé et Jade.

Ex. 53 ★★★ **Le dallage de Camille** — À Nîmes, Camille est carreleuse et pose des dallages rectangulaires. Pour tout entier $n \geqslant 1$, le dallage numéro n compte $n + 1$ rangées de $n + 4$ dalles carrées. Les dalles du contour sont noires, les autres sont blanches. On note c_n le nombre total de dalles et b_n le nombre de dalles blanches. Donne les valeurs approchées à 10^{-5} près si besoin.

(a) Exprime c_n puis b_n en fonction de n, sous forme développée. Déduis-en le nombre de dalles noires du dallage numéro n, puis vérifie ta formule en décrivant le dallage numéro 1.

(b) Camille dispose de 10 000 dalles. Quel est le plus grand entier n pour lequel elle peut poser le dallage numéro n ? Justifie avec une inéquation, puis contrôle avec les deux termes qui encadrent ta réponse.

(c) On note $w_n = \frac{b_n}{c_n}$ la proportion de dalles blanches. Calcule w_{10}, w_{100} et $w_{1\,000}$. Conjecture la limite de (w_n) et explique le lien avec les coefficients de n^2.

(d) Détermine le plus petit entier n tel que $w_n > 0{,}99$. Contrôle ta réponse avec les deux termes qui l'encadrent.

(e) Complète les trois lignes en pointillés de ce programme pour que `seuil(s)` renvoie le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $w_n > s$. Explique pourquoi l'initialisation `w = 0` convient, puis indique ce que doit renvoyer `seuil(0.99)`.

```
def seuil(s):
    n = 1
    w = 0
    while ... :
        n = n + 1
        w = ...
    return ...
```

(f) Ben affirme : « Le nombre de dalles noires tend vers $+\infty$, donc leur proportion dans le dallage ne peut pas tendre vers 0. » Vrai ou faux ? Justifie.