1. Calculer des termes : forme explicite et récurrence

Ex. 1 ★☆☆ **Remplacer n par un entier**

(a) $u_0 = 5$: on remplace n par 0, il reste le terme constant.

(b) $u_3 = 3 \times 3^2 + 8 \times 3 + 5 = 56$.

(c) $u_{10} = 3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 = 385$.

Ex. 2 ★☆☆ **Une récurrence avec un décimal**

(a) $u_1 = 1{,}5 \times (-3) + 4 = -0{,}5$.

(b) $u_2 = 1{,}5 \times (-0{,}5) + 4 = 3{,}25$.

(c) $u_3 = 1{,}5 \times 3{,}25 + 4 = 8{,}875$.

Ex. 3 ★☆☆ **Puissances, signes et terme interdit**

(a) Lila a tort. Un nombre non nul élevé à la puissance 0 vaut 1 : $(-1)^0 = 1$, et non -1.
Donc $c_0 = \frac{(-1)^0+2^0}{0-3} = \frac{1+1}{-3} = -\frac{2}{3}$.

(b) $c_1 = \frac{(-1)^1+2^1}{1-3} = \frac{-1+2}{-2} = -\frac{1}{2}$: attention, le dénominateur est négatif. $c_2 = \frac{1+4}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$. $c_4 = \frac{(-1)^4+2^4}{4-3} = \frac{1+16}{1} = 17$.

(c) Faux. Pour $n = 3$, le dénominateur vaut $3 - 3 = 0$. On ne divise pas par 0, donc c_3 n'existe pas. On ne peut pas calculer c_n pour tout entier naturel n.

Ex. 4 ★★☆ **Quel rang pour cette valeur ?**

(a) Pour tout entier naturel n, $n + 4 > 0$. $u_n = \frac{40}{19} \iff 19(3n - 5) = 40(n + 4) \iff 57n - 95 = 40n + 160 \iff 17n = 255 \iff n = 15$. Le terme égal à $\frac{40}{19}$ est u_{15} : son rang est 15.

(b) $u_n = -1 \iff 3n - 5 = -(n + 4) \iff 4n = 1 \iff n = \frac{1}{4}$. Or un rang est un entier naturel, et $\frac{1}{4}$ n'en est pas un.
Donc -1 n'est pas un terme de la suite.

Ex. 5 ★★☆ **Exprimer u(n+1), u(2n) et u(n−1)**

(a) Inès a calculé $u_n + 1 = n^2 + 6n - 4 + 1 = n^2 + 6n - 3$, c'est-à-dire le terme augmenté de 1, pas le terme suivant. Il faut remplacer n par $(n + 1)$ partout : $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 6(n + 1) - 4 = n^2 + 2n + 1 + 6n + 6 - 4 = n^2 + 8n + 3$.
Donc $u_{n+1} = n^2 + 8n + 3$.

(b) On remplace n par $(2n)$: $u_{2n} = (2n)^2 + 6 \times 2n - 4 = 4n^2 + 12n - 4$.

(c) On remplace n par $(n - 1)$: $u_{n-1} = (n - 1)^2 + 6(n - 1) - 4 = n^2 - 2n + 1 + 6n - 6 - 4 = n^2 + 4n - 9$.

Ex. 5 (suite)

(d) La suite commence à u_0, donc le 5e terme est u_4 (et non u_5). On a $u_4 = 4^2 + 6 \times 4 - 4 = 16 + 24 - 4 = 36$. Avec $u_{n+1} = n^2 + 8n + 3$, on obtient u_4 en prenant $n = 3$: $u_4 = 9 + 24 + 3 = 36$. Les deux méthodes donnent bien le même résultat : le 5e terme est 36.

Ex. 6 ★★☆ **Une récurrence qui dépend de n**

(a) Pour calculer v_2, on part du terme précédent v_1, donc on prend $n = 1$: $v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$. Zoé a pris $n = 2$, le rang du terme cherché, au lieu du rang du terme précédent.
Donc $v_2 = 5$.

(b) Avec $n = 2$: $v_3 = 2v_2 - 2 = 2 \times 5 - 2 = 8$. Avec $n = 3$: $v_4 = 2v_3 - 3 = 2 \times 8 - 3 = 13$. La suite commence à v_1, donc le 4e terme est $v_4 = 13$.

(c) Non. Si on remplace n par 10, on obtient $v_{11} = 2v_{10} - 10$: c'est v_{11} qu'on exprime, et à partir de v_{10}, qu'on ne connaît pas. Avec une relation de récurrence, on doit calculer tous les termes de proche en proche : v_2, v_3, …, jusqu'à v_{10}.

(d) De v_1 à v_{10}, il y a $10 - 1 + 1 = 10$ termes. Le premier, v_1, est donné, donc il faut appliquer la relation 9 fois (pour obtenir v_2, v_3, …, v_{10}).

(e) Avec $n = 2$: $w_3 = 2w_2 - 2$, donc $10 = 2w_2 - 2$, d'où $w_2 = \frac{12}{2} = 6$. Avec $n = 1$: $w_2 = 2w_1 - 1$, donc $6 = 2w_1 - 1$, d'où $w_1 = \frac{7}{2}$.
Donc $w_2 = 6$ et $w_1 = \frac{7}{2}$.

Ex. 7 ★★☆ **Une récurrence d'ordre 2 en Python**

(a) Avec $n = 0$: $a_2 = a_1 + 2a_0 = -1 + 4 = 3$. Avec $n = 1$: $a_3 = a_2 + 2a_1 = 3 - 2 = 1$. Avec $n = 2$: $a_4 = a_3 + 2a_2 = 1 + 6 = 7$. Chaque terme se calcule à partir des deux termes précédents.

(b) Au passage n, le programme ajoute $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ à la liste, pour n allant de 0 à 4. Il calcule donc a_2 à a_6.
On a $a_5 = a_4 + 2a_3 = 7 + 2 = 9$ et $a_6 = a_5 + 2a_4 = 9 + 14 = 23$. Le programme affiche `[2, -1, 3, 1, 7, 9, 23]`.

(c) Non : 7 est la valeur d'un terme, pas son rang. Ce terme est en 5e position et la liste commence à a_0, donc $7 = a_4$. Le dernier terme de la liste est $a_6 = 23$, de rang 6. La liste contient $6 - 0 + 1 = 7$ termes.

Ex. 7 **(suite)**

(d) On remplace `for n in range(5):` par `for n in range(9):`. Le dernier passage, avec $n = 8$, calcule a_{10}. La liste contient alors les termes de a_0 à a_{10}, soit $10 - 0 + 1 = 11$ termes.

(e) On continue de proche en proche :
$a_7 = 23 + 2 \times 9 = 41$, $a_8 = 41 + 2 \times 23 = 87$,
$a_9 = 87 + 2 \times 41 = 169$, $a_{10} = 169 + 2 \times 87 = 343$.
Donc $a_{10} = 343$.

Ex. 8 ★★★ **Les mosaïques de Nora**

(a) La figure 1 a 1 rangée et 3 colonnes. À chaque étape, on ajoute 1 rangée et 1 colonne. La figure n a donc n rangées et $n + 2$ colonnes. Ainsi $r_n = n(n + 2) = n^2 + 2n$. On obtient $r_4 = 4 \times 6 = 24$ et $r_5 = 5 \times 7 = 35$. On contrôle avec le tableau : $r_3 = 3 \times 5 = 15$.

(b) Léo a tort. La suite commence à r_1 : le 1er terme est r_1, le 2e est r_2… Le 5e terme est donc $r_5 = 35$. Le terme r_4 ne serait le 5e terme que si la suite commençait à r_0.

(c) $r_{n+1} = (n + 1)(n + 3) = n^2 + 4n + 3$.
Donc $r_{n+1} - r_n = n^2 + 4n + 3 - (n^2 + 2n) = 2n + 3$.
Ce nombre est le nombre de carreaux ajoutés pour passer de la figure n à la figure $n + 1$. Contrôle : la figure 4 a 4 rangées et 6 colonnes. On ajoute une rangée de 6 carreaux, puis une colonne de 5 carreaux, soit 11 carreaux. On retrouve bien $2 \times 4 + 3 = 11$, et aussi $r_5 - r_4 = 35 - 24 = 11$.

(d) On cherche un entier $n \geqslant 1$ tel que $n^2 + 2n = 120$, c'est-à-dire $n^2 + 2n - 120 = 0$. On a $\Delta = 4 + 480 = 484 = 22^2$. Les solutions sont $\frac{-2+22}{2} = 10$ et $\frac{-2-22}{2} = -12$. Seul 10 convient : 120 est le terme de rang 10, car $r_{10} = 10 \times 12 = 120$. Pour 150, on résout $n^2 + 2n - 150 = 0$. On a $\Delta = 4 + 600 = 604$. Or $24^2 = 576$ et $25^2 = 625$, donc 604 n'est pas un carré parfait. Les solutions ne sont pas entières : 150 n'est pas un terme de la suite.

(e) D'après le calcul fait plus haut, $r_{n+1} - r_n = 2n + 3 > 0$: chaque figure a plus de carreaux que la précédente. Or $r_{13} = 13 \times 15 = 195 \leqslant 200$ et $r_{14} = 14 \times 16 = 224 > 200$. La plus grande figure possible est donc la figure 13. Elle utilise 195 carreaux, et il en reste $200 - 195 = 5$.

(f) De la figure 4 à la figure 13, il y a $13 - 4 + 1 = 10$ figures, et non 9. Total : $r_4 + r_5 + \cdots + r_{13} = 24 + 35 + 48 + 63 + 80 + 99 + 120 + 143 + 168 + 195 = 975$. Nora utilise 975 carreaux.

Ex. 9 ★★★ **Une récurrence avec des fractions**

(a) On calcule de proche en proche. $u_1 = \frac{2+15}{2+3} = \frac{17}{5}$. $u_2 = \frac{\frac{17}{5}+15}{\frac{17}{5}+3} = \frac{\frac{92}{5}}{\frac{32}{5}} = \frac{92}{32} = \frac{23}{8}$. $u_3 = \frac{\frac{23}{8}+15}{\frac{23}{8}+3} = \frac{\frac{143}{8}}{\frac{47}{8}} = \frac{143}{47}$. $u_4 = \frac{\frac{143}{47}+15}{\frac{143}{47}+3} = \frac{\frac{848}{47}}{\frac{284}{47}} = \frac{848}{284} = \frac{212}{71}$.
Donc $u_1 = \frac{17}{5}$, $u_2 = \frac{23}{8}$, $u_3 = \frac{143}{47}$ et $u_4 = \frac{212}{71}$.

(b) Première erreur : la relation fait intervenir le terme u_n, pas le rang n. Yanis a remplacé u_n par le rang 10 : il confond le rang et la valeur du terme. Deuxième erreur : il se trompe aussi d'indice. Avec $n = 10$, la relation donne u_{11}, pas u_{10}. Pour obtenir u_{10}, il faut appliquer la relation avec $n = 9$, donc à partir de u_9. Conclusion : on ne peut pas calculer u_{10} directement. Il faut calculer de proche en proche u_1, u_2, …, u_9, puis $u_{10} = \frac{u_9+15}{u_9+3}$.

(c) Avec `range(1, n)`, la variable `i` prend les valeurs $1, 2, \ldots, n - 1$. La boucle fait donc $n - 1$ tours au lieu de n. Pour `terme(3)`, elle fait 2 tours en partant de u_0. Elle renvoie donc $u_2 = \frac{23}{8}$ (Python affiche 2.875) au lieu de $u_3 = \frac{143}{47}$. Correction : on écrit `for i in range(n):`. La boucle fait alors n tours, et la fonction renvoie bien u_n.

(d) Le terme $u_1 = \frac{a+15}{a+3}$ n'existe pas lorsque $a + 3 = 0$, c'est-à-dire pour $a = -3$. Pour $a \neq -3$, u_1 existe. Le terme u_2 n'existe pas lorsque $u_1 = -3$. On remonte la suite : $\frac{a+15}{a+3} = -3 \iff a + 15 = -3a - 9 \iff 4a = -24 \iff a = -6$. Vérification : $u_1 = \frac{-6+15}{-6+3} = \frac{9}{-3} = -3$. Pour $a = -6$, u_1 existe mais pas u_2.

(e) Il faut $a \neq -3$. On résout : $\frac{a+15}{a+3} = a \iff a + 15 = a^2 + 3a \iff a^2 + 2a - 15 = 0$. On a $\Delta = 4 + 60 = 64$. Les solutions sont $a = \frac{-2+8}{2} = 3$ et $a = \frac{-2-8}{2} = -5$. Toutes deux sont différentes de -3. Vérification : $\frac{3+15}{3+3} = 3$ et $\frac{-5+15}{-5+3} = -5$. Si $u_1 = u_0 = a$, le calcul de u_2 à partir de u_1 est exactement le même que celui de u_1 à partir de u_0.
Donc $u_2 = a$, puis $u_3 = a$, et ainsi de suite. Pour $a = 3$ ou $a = -5$, la suite est constante.

Ex. 10 ★★★ **Paver une allée avec des dominos**

(a) On note V une dalle verticale et H un bloc de deux dalles horizontales superposées, qui couvre 2 colonnes. Une case du haut couverte par une dalle horizontale oblige la case du dessous à l'être aussi, d'où les blocs H. Longueur 3 : VVV, VH, HV, donc $y_3 = 3$. Longueur 4 : VVVV, VVH, VHV, HVV, HH, donc $y_4 = 5$.

Ex. 10 (suite)

(b) Premier cas : la première colonne est couverte par une dalle verticale. Il reste une allée de longueur $n+1$, à paver de y_{n+1} façons. Second cas : la case du haut de la première colonne est couverte par une dalle horizontale, qui déborde sur la colonne 2. La case du bas ne peut alors pas recevoir de dalle verticale : elle est couverte elle aussi par une dalle horizontale. Il reste une allée de longueur n, à paver de y_n façons. Les deux cas ne se recouvrent pas et couvrent toutes les possibilités. Donc $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$.

(c) On calcule de proche en proche : chaque terme est la somme des deux précédents. $y_5 = 5+3 = 8$, $y_6 = 8+5 = 13$, $y_7 = 13+8 = 21$, $y_8 = 21+13 = 34$, $y_9 = 34+21 = 55$, $y_{10} = 55+34 = 89$. Il y a 89 pavages d'une allée de longueur 10.

(d) C'est faux. Pour $n=1$, l'égalité est vraie : $y_2 = 2 = 2\times y_1$. Mais un seul cas ne suffit pas. Pour $n=2$: $y_4 = 5$ alors que $2\times y_2 = 4$. Ce contre-exemple suffit à montrer que l'affirmation est fausse. De même, $y_6 = 13 \neq 2\times y_3 = 6$. Attention : y_{2n} est le terme de rang $2n$, pas le double du terme y_n.

(e) On remonte la suite. Avec $n=0$, la relation s'écrit $y_2 = y_1 + y_0$, donc $2 = 1 + y_0$. Il faut prendre $y_0 = 1$.

(f) La liste contient au départ 2 éléments, puis la boucle en ajoute 10. À la fin, elle a donc 12 éléments : $y_1, y_2, \dots, y_{12}$, soit bien $12-1+1 = 12$ termes. On complète : $y_{11} = 89+55 = 144$ et $y_{12} = 144+89 = 233$, donc `L[-1]` vaut $y_{12} = 233$. `L[0]` contient y_1, donc `L[5]` est le 6e élément, c'est-à-dire $y_6 = 13$. Attention : l'indice 5 n'est pas le rang du terme.

2. *Traduire un motif, une situation, un programme*

Ex. 11 ★☆☆ **Lire une boucle for**

(a) Pour $n=0$, la boucle ne fait aucun tour : la fonction renvoie la valeur de départ, -2.

(b) Trois tours : u prend les valeurs -5, puis -14, puis -41. La fonction renvoie -41.

(c) Le programme calcule la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$; `suite(n)` renvoie u_n.

Ex. 12 ★☆☆ **Compter les tours d'une boucle**

(a) La boucle fait 8 tours. k prend les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$: on s'arrête à 7, pas à 8.

(b) La boucle fait 7 tours. k prend les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$: on commence à 1 et on s'arrête juste avant 8.

(c) Chaque tour fait avancer l'indice de 1. Pour passer de u_1 à u_{12}, il faut donc $12-1 = 11$ tours, et non 12.

(d) Les indices vont de 3 à 20. La liste contient donc $20-3+1 = 18$ éléments. Il ne faut pas oublier le « +1 ».

Ex. 13 ★★☆ **L'ordre des instructions**

(a) Avec `A`, on calcule $u = 3u + n$ AVANT d'augmenter n : on ajoute 0, puis 1, puis 2. u prend les valeurs $3\times 2+0 = 6$, puis $3\times 6+1 = 19$, puis $3\times 19+2 = 59$. `A(3)` renvoie 59.

(b) Avec `B`, n augmente d'abord : on ajoute 1, puis 2, puis 3. u prend les valeurs $3\times 2+1 = 7$, puis $3\times 7+2 = 23$, puis $3\times 23+3 = 72$. `B(3)` renvoie 72.

(c) `A` calcule la suite $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n + n$. `B` calcule $v_0 = 2$, $v_{n+1} = 3v_n + (n+1)$: l'ordre des deux lignes change la suite.

Ex. 14 ★★☆ **Un motif qui grandit**

(a) $u_1 = 1+2\times 1+1 = 4$; $u_2 = 4+2\times 2+1 = 9$; $u_3 = 9+2\times 3+1 = 16$.

(b) Pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on ajoute $2(n+1)+1 = 2n+3$ jetons : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

(c) On continue : $u_4 = 25$, $u_5 = 36$. Il faut 36 jetons pour l'étape 5.

Ex. 15 ★★☆ **Abonnés d'une médiathèque : pourcentage, ordre et année**

(a) Non. « 30 % des abonnés partent » ne veut pas dire « on retire 0,3 abonné ». Il reste 70 % de a_n, soit $0{,}7\,a_n$, puis on ajoute 300.
Donc $a_0 = 2\,400$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 300$.

(b) $2027 = 2025+2$, donc on cherche a_2. On a $a_1 = 0{,}7\times 2\,400 + 300 = 1\,680 + 300 = 1\,980$, puis $a_2 = 0{,}7\times 1\,980 + 300 = 1\,386 + 300 = 1\,686$. La médiathèque compte 1 686 abonnés au 1er janvier 2027.

(c) Faux. 2030 est bien la sixième année si l'on compte 2025, mais la première année correspond à a_0, pas à a_1. Comme $2030 = 2025+5$, l'année 2030 correspond à $n=5$: la sixième valeur de la suite est a_5, pas a_6.

Ex. 15 **(suite)**

(d) On ajoute d'abord 300, ce qui donne $b_n + 300$. Puis il en reste 70 % : $b_{n+1} = 0{,}7(b_n + 300) = 0{,}7\,b_n + 210$. Ici $q = 0{,}7$ et $c = 210$. Alors $b_1 = 0{,}7 \times 2\,400 + 210 = 1\,680 + 210 = 1\,890$.

(e) $a_1 = 1\,980$ et $b_1 = 1\,890$, donc $a_1 - b_1 = 90$. À Vannes, les 300 nouveaux lecteurs arrivent avant les départs : ils subissent eux aussi la baisse de 30 %, et 30 % de 300 font 90. L'ordre « on retire puis on ajoute » ne donne donc pas la même relation que « on ajoute puis on retire ».

Ex. 16 ★★☆ **Une grille d'allumettes**

(a) Étape 1 : un carreau, donc $s_1 = 4$. Étape 2 : 3 lignes horizontales de 2 allumettes et 3 colonnes verticales de 2 allumettes, donc $s_2 = 6 + 6 = 12$. Étape 3 : 4 lignes de 3 allumettes et 4 colonnes de 3 allumettes, donc $s_3 = 12 + 12 = 24$.

(b) Non. Avec sa formule, $s_2 = s_1 + 4 \times 3 = 4 + 12 = 16$, alors qu'on a compté $s_2 = 12$. Noah compte deux fois les allumettes partagées : un côté commun à deux carreaux ne compte qu'une fois. Il oublie aussi les allumettes qui existaient déjà sur le bord de l'étape n.

(c) Il y a $n + 1$ lignes horizontales, de n allumettes chacune : cela fait $n(n + 1)$ allumettes horizontales. De même, il y a $n + 1$ colonnes verticales de n allumettes : encore $n(n + 1)$. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $s_n = 2n(n + 1)$. Contrôle : $s_1 = 2 \times 1 \times 2 = 4$ et $s_3 = 2 \times 3 \times 4 = 24$.

(d) $s_{n+1} - s_n = 2(n + 1)(n + 2) - 2n(n + 1) = 2(n + 1)\big((n + 2) - n\big) = 4(n + 1) = 4n + 4$.
Donc $s_1 = 4$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $s_{n+1} = s_n + 4n + 4$.
Contrôle : $s_3 = s_2 + 4 \times 2 + 4 = 12 + 12 = 24$. C'est bien la valeur comptée.

(e) $s_7 = 2 \times 7 \times 8 = 112$ et $s_{10} = 2 \times 10 \times 11 = 220$. Ben doit ajouter $220 - 112 = 108$ allumettes.
Vérification avec la relation : de l'étape 7 à l'étape 8, il ajoute $4 \times 7 + 4 = 32$ allumettes, puis $4 \times 8 + 4 = 36$, puis $4 \times 9 + 4 = 40$. Au total, $32 + 36 + 40 = 108$ allumettes : on retrouve le même résultat.

Ex. 17 ★★☆ **Corriger une boucle qui démarre à 1**

(a) $r_1 = 2 \times 2 - 0 + 1 = 5$, puis $r_2 = 2 \times 5 - 1 + 1 = 10$, puis $r_3 = 2 \times 10 - 2 + 1 = 19$.

Ex. 17 **(suite)**

(b) Avant la boucle : `x` $= 2$. Tour `i = 1` : `x` $= 2 \times 2 - 1 + 1 = 4$. Tour `i = 2` : `x` $= 2 \times 4 - 2 + 1 = 7$. La fonction renvoie 7, alors que $r_2 = 10$. La fonction d'Inès est donc fausse : dès le premier tour, elle utilise $n = 1$ au lieu de $n = 0$.

(c) Au tour numéro `i`, on calcule r_i à partir de r_{i-1}. Il faut donc remplacer n par $i - 1$: $r_i = 2r_{i-1} - (i - 1) + 1 = 2r_{i-1} - i + 2$. La ligne correcte est `x = 2*x - i + 2`. Contrôle : `r(3)` donne $2 \times 2 - 1 + 2 = 5$, puis $2 \times 5 - 2 + 2 = 10$, puis $2 \times 10 - 3 + 2 = 19 = r_3$.

(d) Ici `i` va de 0 à $n - 1$ et joue le rôle de n dans la relation. `L[-1]` est le dernier terme calculé. On complète donc par `L.append(2*L[-1] - i + 1)`. Alors `liste(3)` renvoie `[2, 5, 10, 19]`.

(e) Au premier tour, la liste est vide : `L[-1]` n'existe pas, et Python s'arrête sur une erreur (`IndexError`). De toute façon, le terme $r_0 = 2$ ne figurerait jamais dans la liste. C'est l'initialisation `L = [2]` qui fournit le premier terme, à partir duquel tous les autres sont calculés.

Ex. 18 ★★☆ **Affectation simultanée et indentation**

(a) $a_2 = a_1 + 2a_0 = 3 + 2 \times 1 = 5$, puis $a_3 = 5 + 2 \times 3 = 11$, puis $a_4 = 11 + 2 \times 5 = 21$.

(b) Avant la boucle : `a` $= 1$, `b` $= 3$. Tour `k = 0` : `a` $= 3$, `b` $= 3 + 2 \times 1 = 5$. Tour `k = 1` : `a` $= 5$, `b` $= 11$. Tour `k = 2` : `a` $= 11$, `b` $= 21$. Tour `k = 3` : `a` $= 21$, `b` $= 43$. La fonction renvoie 21, c'est-à-dire a_4. Après k tours, `a` contient a_k et `b` contient a_{k+1}.

(c) Faux. Avec `B(3)` : au départ, `a` $= 1$ et `b` $= 3$. Tour 1 : `a` $= 3$, puis `b` $= 3 + 2 \times 3 = 9$. Tour 2 : `a` $= 9$, puis `b` $= 27$. Tour 3 : `a` $= 27$, puis `b` $= 81$. La fonction renvoie 27, alors que $a_3 = 11$. Quand on calcule `b`, `a` a déjà reçu sa nouvelle valeur : on n'utilise plus l'ancien terme.

(d) `C(5)` renvoie 3. La ligne `return a` est indentée sous le `for` : elle fait partie de la boucle. La fonction s'arrête donc à la fin du premier tour, avec `a` $= 3$, quelle que soit la valeur de $n \geqslant 1$. Il faut placer `return a` au même niveau que le `for`.

Ex. 18 **(suite)**

(e) On garde l'ancienne valeur de `a` dans `c` avant de la modifier :

```
def B(n):
    a, b = 1, 3
    for k in range(n):
        c = a
        a = b
        b = b + 2*c
    return a
```

Contrôle : `B(4)` renvoie bien $21 = a_4$.

Ex. 19 ★★★ **Vélos en libre-service : deux calendriers**

(a) Hugo a tort. Mettre au rebut 20 % des vélos, c'est diminuer leur nombre de 20 % : il en reste 80 %, soit $0{,}8\,a_n$. Le nombre $0{,}2\,a_n$ est celui des vélos retirés, pas celui des vélos qui restent. On ajoute ensuite les 100 vélos livrés en décembre. L'année 2025 correspond à $n = 0$, donc $a_0 = 400$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 100$.

(b) En janvier, on ajoute d'abord 100 vélos : il y en a $b_n + 100$. Ensuite, on en retire 20 % : il en reste $0{,}8(b_n + 100)$.
Donc $b_{n+1} = 0{,}8(b_n + 100) = 0{,}8\,b_n + 80$, avec $b_0 = 400$.
$b_1 = 0{,}8 \times (400 + 100) = 0{,}8 \times 500 = 400$ et $b_2 = 0{,}8 \times 400 + 80 = 320 + 80 = 400$.
Le nombre de vélos reste à 400 : les 100 vélos mis au rebut (20 % de 500) compensent exactement les 100 vélos achetés. Comme on repart de 400 chaque 1er janvier, le même calcul redonne 400 l'année suivante. La suite (b_n) est donc constante, égale à 400.

(c) Le 1er janvier 2028 correspond à $n = 2028 - 2025 = 3$.
$a_1 = 0{,}8 \times 400 + 100 = 420$; $a_2 = 0{,}8 \times 420 + 100 = 436$; $a_3 = 0{,}8 \times 436 + 100 = 448{,}8$.
Le plan A prévoit environ 449 vélos au 1er janvier 2028, contre 400 pour le plan B. Dans le plan B, les vélos neufs subissent eux aussi la mise au rebut de 20 % : seuls $0{,}8 \times 100 = 80$ d'entre eux restent. Dans le plan A, ils arrivent après la mise au rebut. L'ordre « on retire puis on ajoute » donne donc plus de vélos.

(d) `range(6)` fait 6 tours (i va de 0 à 5). La liste part de `[400]` et reçoit un terme à chaque tour : elle contient $1 + 6 = 7$ éléments, de a_0 à a_6.
Son dernier élément est a_6, le nombre de vélos au 1er janvier $2025 + 6 = 2031$.
$a_4 = 0{,}8 \times 448{,}8 + 100 = 459{,}04$; $a_5 = 0{,}8 \times 459{,}04 + 100 = 467{,}232$; $a_6 = 0{,}8 \times 467{,}232 + 100 = 473{,}7856$.
Le dernier élément vaut environ 474 vélos.

Ex. 19 **(suite)**

(e) La variable `n` compte les tours, donc `a` contient a_n. La boucle continue tant que $a_n \leqslant 480$.
$a_7 = 0{,}8 \times 473{,}7856 + 100 = 479{,}02848 \leqslant 480$, puis $a_8 = 0{,}8 \times 479{,}02848 + 100 = 483{,}222784 > 480$.
La boucle s'arrête quand $n = 8$, et la fonction renvoie $2025 + 8 = 2033$. Avec le plan A, c'est en 2033 que la flotte dépasse 480 vélos au 1er janvier pour la première fois.
Avec le plan B, `a` vaut toujours 400 (question 2). La condition $400 \leqslant 480$ est donc toujours vraie : la boucle ne s'arrête jamais et la fonction ne renvoie rien.

Ex. 20 ★★★ **Les couronnes de pavés autour d'une fontaine**

(a) À l'étape 2, le grand carré mesure 5 cases sur 5, fontaine comprise : $t_2 = 5^2 - 1 = 24$. À l'étape 3, il mesure 7 cases sur 7 : $t_3 = 7^2 - 1 = 48$. On peut aussi compter les couronnes : 8, puis 16, puis 24 pavés, ce qui donne $8 + 16 = 24$ et $24 + 24 = 48$.

(b) À l'étape 1, le côté mesure 3 cases. Chaque couronne ajoute une case à chaque bout de chaque rangée, donc le côté augmente de 2 à chaque étape : il mesure $2n + 1$ cases à l'étape n. Le grand carré contient $(2n + 1)^2$ cases, dont celle de la fontaine. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $t_n = (2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n$.
Contrôle : $t_1 = 4 + 4 = 8$, $t_2 = 16 + 8 = 24$, $t_3 = 36 + 12 = 48$.

(c) Mathis a tort. À l'étape 2, le grand carré mesure 5 cases de côté. Un côté de la nouvelle couronne compte donc 5 pavés, coins compris, et sa méthode donne $4 \times 5 = 20$ pavés. Or $t_2 - t_1 = 24 - 8 = 16$. Chacun des 4 coins appartient à deux côtés : Mathis le compte deux fois. Il faut retirer 4 : $4 \times 5 - 4 = 16$.
À l'étape $n + 1$, le côté mesure $2(n + 1) + 1 = 2n + 3$ cases. La nouvelle couronne compte donc $4(2n + 3) - 4 = 8n + 8$ pavés. Pour tout $n \geqslant 1$, $t_{n+1} = t_n + 8n + 8$.
Contrôle : $t_3 = 24 + 8 \times 2 + 8 = 48$.

(d) $4n^2 + 4n = 1\,680$ équivaut à $n^2 + n - 420 = 0$. $\Delta = 1 + 1\,680 = 1\,681 = 41^2$, donc $n = \frac{-1+41}{2} = 20$ (l'autre racine, -21, est négative). L'étape 20 compte exactement 1 680 pavés.
$4n^2 + 4n = 2\,000$ équivaut à $n(n + 1) = 500$. Or $21 \times 22 = 462$ et $22 \times 23 = 506$, et $n(n + 1)$ augmente avec n. Aucun entier ne convient : aucune étape ne compte exactement 2 000 pavés.

Ex. 20 (suite)

(e) Quand `n` vient d'augmenter, `t` contient encore t_{n-1}. Or $t_n = t_{n-1} + 8(n-1) + 8 = t_{n-1} + 8n$. On complète donc par `t = t + 8 * n` (ou par `t = 4 * n**2 + 4 * n`, avec la forme explicite).

La boucle s'arrête au premier n tel que $t_n >$ `stock`. Cette étape n est irréalisable. Comme (t_n) est croissante, la plus grande étape réalisable est $n-1$.

Lucas a tort. Si l'on calcule `t` avant d'augmenter `n`, on utilise l'ancienne valeur de `n`. Au premier tour, `t` devient $8 + 8 \times 1 = 16$, puis `n` devient 2, alors que $t_2 = 24$.

Ex. 20 (suite)

(f) La fonction renvoie $n-1$, où n est la première étape telle que $t_n > 1\,000$. $t_{15} = 4 \times 15^2 + 4 \times 15 = 960 \leqslant 1\,000$ et $t_{16} = 4 \times 16^2 + 4 \times 16 = 1\,088 > 1\,000$. Comme (t_n) est croissante, la boucle s'arrête avec $n = 16$, et `plus_grande_etape(1000)` renvoie 15. Ben réalise l'étape 15, et il lui reste $1\,000 - 960 = 40$ pavés.

Ex. 21 ★★★ Retrouver la suite cachée dans un programme

(a) `range(1, 6)` fait 5 tours, avec $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Au départ, `u` vaut 37 et `L` vaut `[37]`.

$k = 1$: $u = 37 + 2 - 13 = 26$, `L = [37, 26]` ;

$k = 2$: $u = 26 + 4 - 13 = 17$, `L = [37, 26, 17]` ;

$k = 3$: $u = 17 + 6 - 13 = 10$, `L = [37, 26, 17, 10]` ;

$k = 4$: $u = 10 + 8 - 13 = 5$, `L = [37, 26, 17, 10, 5]` ;

$k = 5$: $u = 5 + 10 - 13 = 2$, `L = [37, 26, 17, 10, 5, 2]`.

La fonction renvoie `[37, 26, 17, 10, 5, 2]`. C'est la liste des 6 termes de u_0 à u_5.

(b) Sofia a tort. Sa relation donne $u_1 = u_0 + 2 \times 0 - 13 = 24$, alors que $u_1 = 26$. Au tour où `k` vaut k, le programme calcule u_k à partir de u_{k-1} :

$u_k = u_{k-1} + 2k - 13$. Avec $k = n + 1$, on obtient $u_{n+1} = u_n + 2(n+1) - 13$, soit $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$ pour tout $n \geqslant 0$.

Ex. 21 (suite)

(c) $u_6 = u_5 + 2 \times 5 - 11 = 2 - 1 = 1$, $u_7 = 1 + 2 \times 6 - 11 = 2$, $u_8 = 2 + 2 \times 7 - 11 = 5$, $u_9 = 5 + 2 \times 8 - 11 = 10$ et $u_{10} = 10 + 2 \times 9 - 11 = 17$.

De u_0 à u_{10}, les valeurs sont $37, 26, 17, 10, 5, 2, 1, 2, 5, 10, 17$. La plus petite vaut 1 et elle est atteinte en $n = 6$. Les valeurs de u_2 à u_{10} sont symétriques autour de $n = 6$. Elles dépassent 1 de $36, 25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16$: ce sont les carrés de l'écart entre n et 6. On conjecture $u_n = (n-6)^2 + 1$, soit $u_n = n^2 - 12n + 37$.

(d) On a conjecturé $w_n = (n-6)^2 + 1$. Alors $w_0 = (0-6)^2 + 1 = 37$.

$w_{n+1} - w_n = (n-5)^2 + 1 - (n-6)^2 - 1 = n^2 - 10n + 25 - n^2 + 12n - 36 = 2n - 11$.

Donc $w_0 = u_0$ et $w_{n+1} = w_n + 2n - 11$: (w_n) a le même premier terme que (u_n) et la même règle pour passer d'un terme au suivant. Chaque terme est entièrement déterminé par le précédent, donc les deux suites ont les mêmes termes : $u_n = (n-6)^2 + 1$ pour tout n.

(e) La ligne `L.append(u)` n'est plus indentée sous le `for`. Elle ne fait plus partie de la boucle : elle n'est exécutée qu'une fois, après le dernier tour. La boucle calcule bien u_n, mais seul ce dernier terme est ajouté à la liste. `mystere2(5)` renvoie donc `[37, 2]`, c'est-à-dire u_0 et u_5. Pour `mystere2(0)`, `range(1, 1)` ne fait aucun tour : `u` vaut toujours 37, et la fonction renvoie `[37, 37]`. Pour corriger, on indente `L.append(u)` sous le `for`, au même niveau que `u = u + 2 * k - 13`.

Ex. 21 (suite)

(f) Au début du tour où `k` vaut k, `d` vaut $u_{k+1} - u_k = 2k - 11$. C'est ce qu'il faut ajouter pour obtenir le terme suivant. Au départ, $d = -11 = u_1 - u_0$. À chaque tour, `u` devient $u + d$, le terme suivant. Dans le même temps, `d` augmente de 2, car $2(k+1) - 11 = (2k - 11) + 2$. L'affectation simultanée calcule les deux nouvelles valeurs avec les anciennes. Après n tours, `u` contient donc u_n.

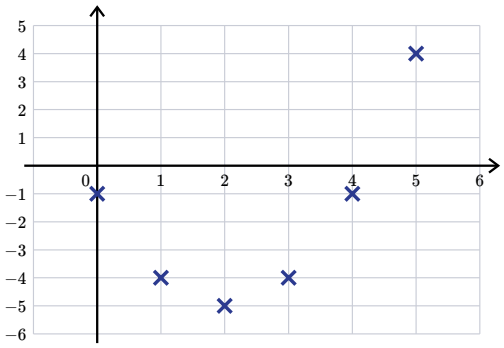
C'est faux. Si `d` est modifié d'abord, `u` reçoit le nouvel écart au lieu de l'ancien. Pour `terme(3)` : $d = -9$, $u = 37 - 9 = 28$; puis $d = -7$, $u = 21$; puis $d = -5$, $u = 16$. La fonction renverrait 16 au lieu de $u_3 = 10$. En revanche, dans l'ordre `u = u + d` puis `d = d + 2`, le résultat serait correct.

3. *Représenter une suite : nuage de points et escalier*

Ex. 22 ★☆☆ **Placer le nuage de points**

(a) $u_0 = -1$, $u_1 = -4$, $u_2 = -5$, $u_3 = -4$, $u_4 = -1$, $u_5 = 4$.

(b) On place les points $(n; u_n)$, sans les relier :



(c) Les points ne sont pas alignés (ils semblent sur une parabole, qu'on ne trace pas) : les termes diminuent puis augmentent. Le nuage permet une conjecture, pas une preuve.

Ex. 23 ★★☆ **Lire un escalier**

(a) On lit les termes sur l'axe des abscisses : $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $u_3 = 3{,}5$.

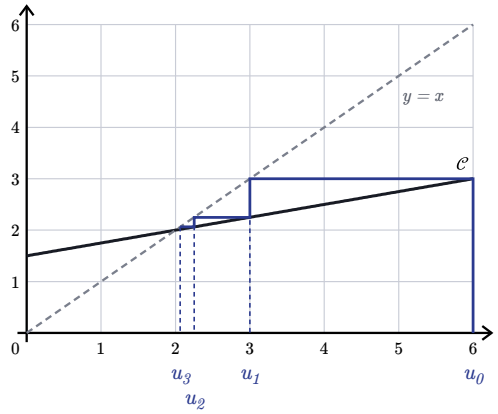
(b) La droite $\mathcal{C}$ passe par $(0; 2)$ et a pour coefficient directeur 0,5 : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

(c) Contrôle : $u_1 = f(0) = 2$, $u_2 = f(2) = 3$.

(d) L'escalier monte : la suite semble croissante. Les marches se rapprochent du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$, d'abscisse 4 : on conjecture que la suite tend vers 4. Ce n'est qu'une conjecture lue sur la figure.

Ex. 24 ★★☆ **Construire un escalier**

(a) On part de $u_0 = 6$ sur l'axe des abscisses. On monte verticalement jusqu'à $\mathcal{C}$, on rejoint horizontalement (vers la gauche) la droite $y = x$, puis on redescend sur l'axe : on obtient u_1. On recommence. Ici, l'escalier descend vers le point d'intersection des deux droites.

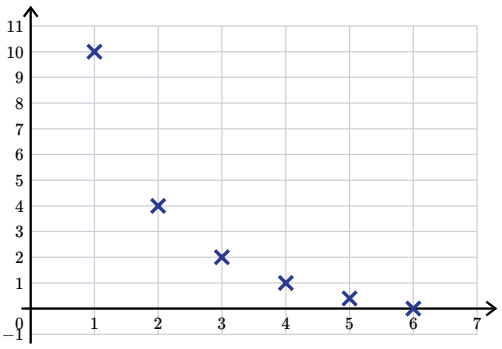


(b) $u_1 = \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 3$, $u_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = 2{,}25$, $u_3 = \frac{2{,}25}{4} + 1{,}5 = 2{,}0625$. Ces valeurs correspondent aux abscisses construites. Comme u_2 et u_3 sont proches, le quadrillage d'unité 1 ne permet de les lire que de façon approchée.

Ex. 25 ★★☆ **Un nuage qui commence à n = 1**

(a) Pour $n = 0$, il faudrait diviser 12 par 0, ce qui est impossible : v_0 n'existe pas. Le premier point du nuage est donc celui d'abscisse 1.

(b) $v_1 = 12 - 2 = 10$, $v_2 = 6 - 2 = 4$, $v_3 = 4 - 2 = 2$, $v_4 = 3 - 2 = 1$, $v_5 = 2{,}4 - 2 = 0{,}4$, $v_6 = 2 - 2 = 0$. On place les points $(1\,;10)$, $(2\,;4)$, $(3\,;2)$, $(4\,;1)$, $(5\,;0{,}4)$ et $(6\,;0)$, sans les relier.



(c) Non. Une suite n'est définie que pour des entiers, et 1,5 n'en est pas un. Le nombre 6 est la valeur en 1,5 de la fonction $x \mapsto \frac{12}{x} - 2$, mais ce n'est pas un terme de (v_n). Il ne fallait pas non plus relier les points du nuage.

Ex. 25 (suite)

(d) Le nuage descend et ses points se rapprochent de la droite d'équation $y = -2$. On conjecture donc que (v_n) est décroissante et qu'elle a pour limite -2 (car $\frac{12}{n}$ devient très petit). Ce n'est qu'une conjecture, puisqu'on ne voit que quelques points. Preuve du sens de variation : $v_{n+1} - v_n = \frac{12}{n+1} - \frac{12}{n} = \frac{12n - 12(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-12}{n(n+1)}$. Pour $n \geqslant 1$, $n(n+1) > 0$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite (v_n) est décroissante.

Ex. 26 ★★☆ Un escalier en spirale

(a) $u_1 = -\frac{2}{2} + 5 = 4$, $u_2 = -\frac{4}{2} + 5 = 3$, $u_3 = -\frac{3}{2} + 5 = 3{,}5$, $u_4 = -\frac{3{,}5}{2} + 5 = 3{,}25$.

(b) Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse u_3 a bien pour ordonnée $u_4 = 3{,}25$. Mais les termes se lisent sur l'axe des abscisses. Il faut donc reporter cette ordonnée : on se déplace horizontalement jusqu'à la droite $y = x$, au point $(3{,}25\,;3{,}25)$, puis on descend verticalement jusqu'à l'axe des abscisses. C'est là qu'on place $u_4 = 3{,}25$.

(c) Faux. $u_1 = 4$ et $u_2 = 3$, donc $u_2 < u_1$: la suite n'est pas croissante. Elle n'est pas décroissante non plus, car $u_0 = 2 < u_1 = 4$. Comme f est décroissante, la construction tourne autour du point d'intersection : c'est une spirale, pas un escalier qui monte. Les termes sont tour à tour plus petits puis plus grands.

(d) On résout $-\frac{1}{2}x + 5 = x$, soit $\frac{3}{2}x = 5$, d'où $x = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$. La spirale se resserre autour de ce point, donc on conjecture que (u_n) a pour limite $\frac{10}{3}$.

(e) Ici, $\ell = \frac{10}{3}$. On a $u_{n+1} - \frac{10}{3} = -\frac{1}{2}u_n + 5 - \frac{10}{3} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{5}{3} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{10}{3}\right)$. D'un terme au suivant, l'écart à $\frac{10}{3}$ change de signe et est divisé par 2. Les termes sont donc alternativement d'un côté et de l'autre de $\frac{10}{3}$, de plus en plus près. Cela confirme par le calcul ce que la spirale ne faisait que suggérer.

Ex. 27 ★★☆ Même fonction, deux suites

(a) $r_0 = \sqrt{5}$, $r_1 = \sqrt{9} = 3$, $r_2 = \sqrt{13}$, $r_3 = \sqrt{17}$.

(b) Non. Comme $r_n = f(n)$, r_2 est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 : il n'y a aucun escalier à faire. L'escalier de Chloé donne $f(0) = \sqrt{5}$, puis $f(\sqrt{5}) = \sqrt{4\sqrt{5} + 5} \approx 3{,}73$. Or $r_2 = \sqrt{13} \approx 3{,}61$: ce n'est pas le même nombre.

(c) Sur la figure, on lit en abscisse environ $s_1 \approx 3{,}6$, $s_2 \approx 4{,}4$ et $s_3 \approx 4{,}8$. Avec un quadrillage d'unité 1, la lecture n'est qu'approchée. Par le calcul : $s_1 = \sqrt{13} \approx 3{,}61$, $s_2 = \sqrt{4\sqrt{13} + 5} \approx 4{,}41$, $s_3 = \sqrt{4s_2 + 5} \approx 4{,}76$.

Ex. 27 (suite)

(d) $s_1 = f(s_0) = f(2) = r_2$, car $s_0 = 2$. En revanche, $s_2 = f(s_1) = f(\sqrt{13})$, alors que $r_3 = f(3)$. Comme $\sqrt{13} \neq 3$, on obtient $s_2 \approx 4{,}41$ et $r_3 = \sqrt{17} \approx 4{,}12$. Les points d'abscisse entière de $\mathcal{C}$ ne sont donc pas les marches de l'escalier.

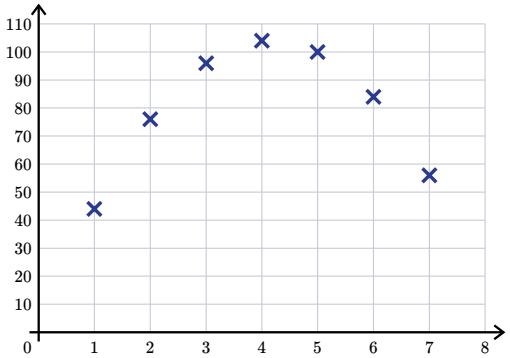
(e) Quand n grandit, $4n + 5$ devient aussi grand qu'on veut, et sa racine aussi : on conjecture que (r_n) tend vers $+\infty$. L'escalier de (s_n) monte vers le point où $\mathcal{C}$ coupe la droite $y = x$. Pour $x \geqslant 0$, $\sqrt{4x + 5} = x$ équivaut à $x^2 = 4x + 5$, soit $x^2 - 4x - 5 = 0$, de racines 5 et -1. On garde 5, et on conjecture que (s_n) a pour limite 5. La même fonction donne ainsi deux suites au comportement très différent.

Ex. 28 ★★☆ Un nuage préparé avec Python

(a) Le programme affiche `[0, 44, 76, 96, 104, 100, 84]`. En effet, `range(7)` donne $n = 0, 1, \ldots, 6$. La liste contient donc 0, qui ne correspond à aucun jour du stage, et il manque g_7.

(b) On remplace la deuxième ligne par `for n in range(1, 8):`, qui donne $n = 1, \ldots, 7$. Le programme affiche `[44, 76, 96, 104, 100, 84, 56]`.

(c) On place les points $(1\,;44)$, $(2\,;76)$, $(3\,;96)$, $(4\,;104)$, $(5\,;100)$, $(6\,;84)$ et $(7\,;56)$, sans les relier. Avec des graduations de 10 en 10, des ordonnées comme 44 ou 76 se placent entre deux traits : on les situe à l'œil.



(d) Une suite n'est définie que pour des entiers : le « jour 4,17 » n'existe pas, et un nombre d'inscrits est un entier. Il ne fallait pas relier les points. Parmi les termes, le plus grand est $g_4 = 200 - 96 = 104$. Le plus grand nombre d'inscrits est donc 104, atteint le jour 4.

Ex. 28 **(suite)**

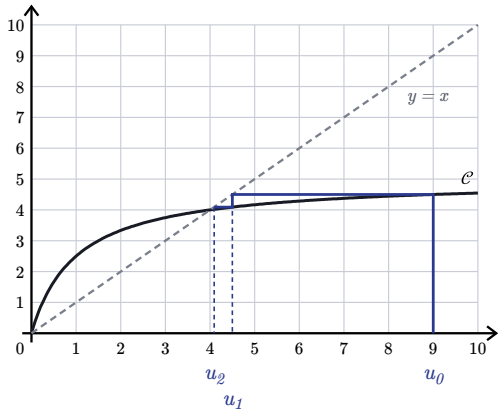
(e) Faux. Un nuage ne montre que quelques points : il donne une conjecture, pas une preuve. Démonstration : $g_{n+1} - g_n = 50(n+1) - 6(n+1)^2 - 50n + 6n^2 = 50 - 12n - 6 = 44 - 12n$. Pour $n \geqslant 4$, $44 - 12n \leqslant 44 - 48 = -4 < 0$. La suite (g_n) est donc bien décroissante à partir du rang 4, ce qui confirme la conjecture.

Ex. 29 ★★★ **Deux départs, deux escaliers**

(a) $u_1 = f(2) = \frac{10}{3}$. $u_2 = f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{50/3}{13/3} = \frac{50}{13}$. $u_3 = f\left(\frac{50}{13}\right) = \frac{250/13}{63/13} = \frac{250}{63}$.
Donc $u_1 = \frac{10}{3}$, $u_2 = \frac{50}{13}$ et $u_3 = \frac{250}{63}$.

(b) $f(2) = \frac{10}{3}$ n'est pas u_2. Comme $u_0 = 2$, c'est $f(u_0) = u_1$. Maëlle confond l'abscisse 2 et le rang 2 : $f(2)$ serait le terme de rang 2 de la suite définie par $f(n)$, qui est une autre suite. Ici, $u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{50}{13}$. Dans l'escalier, on ne remonte pas à la courbe depuis l'abscisse n. L'ordonnée u_1 se reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite $y = x$, puis on remonte à $\mathcal{C}$ depuis l'abscisse u_1.

(c) On part de 9 sur l'axe des abscisses. On monte verticalement jusqu'à $\mathcal{C}$, au point $(9\,;4{,}5)$. On va ensuite horizontalement, vers la gauche, jusqu'à la droite $y = x$, au point $(4{,}5\,;4{,}5)$, puis on redescend sur l'axe : on obtient v_1. On recommence pour v_2.



Par le calcul : $v_1 = f(9) = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}$ et $v_2 = f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{45/2}{11/2} = \frac{45}{11}$.

(d) On résout $\frac{5x}{x+1} = x$, soit $5x = x(x+1)$, soit $x(x-4) = 0$. Les solutions sont $x = 0$ et $x = 4$. L'escalier de (u_n) monte vers le point d'abscisse 4 ; celui de (v_n) descend vers ce même point. On conjecture donc : (u_n) est croissante et tend vers 4 ; (v_n) est décroissante et tend vers 4. Ce ne sont que des conjectures : les figures ne montrent que les premiers termes.

Ex. 29 **(suite)**

(e) Faux. La suite (v_n) vérifie $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f croissante. Pourtant $v_1 = \frac{9}{2} < 9 = v_0$: elle n'est pas croissante. Quand f est croissante, l'escalier ne tourne pas en spirale, mais il peut monter ou descendre selon la position de w_0.

Ex. 29 **(suite)**

(f) Faux. Avec $w_0 = 0$, on a $w_1 = f(0) = 0$, puis $w_2 = f(0) = 0$, et ainsi de suite : la suite est constante égale à 0. Elle ne se rapproche donc pas de 4. La valeur de départ compte.

Ex. 30 ★★★ **Une spirale et deux erreurs**

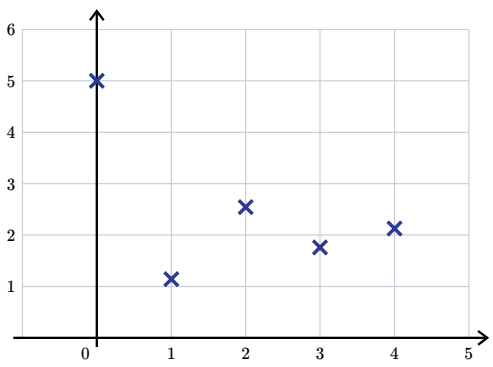
(a) $u_1 = \frac{8}{5+2} = \frac{8}{7}$. $u_2 = \frac{8}{\frac{8}{7}+2} = \frac{8}{22/7} = \frac{56}{22} = \frac{28}{11}$. $u_3 = \frac{8}{\frac{28}{11}+2} = \frac{8}{50/11} = \frac{88}{50} = \frac{44}{25}$. $u_4 = \frac{8}{\frac{44}{25}+2} = \frac{8}{94/25} = \frac{200}{94} = \frac{100}{47}$.
Donc $u_1 = \frac{8}{7}$, $u_2 = \frac{28}{11}$, $u_3 = \frac{44}{25}$ et $u_4 = \frac{100}{47}$.

(b) On a $u_1 \approx 1{,}14$, $u_3 = 1{,}76$, $u_4 \approx 2{,}13$ et $u_2 \approx 2{,}55$, donc $u_1 < u_3 < u_4 < u_2 < u_0$. Si $0 \leqslant a < b$, alors $0 < a+2 < b+2$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a $\frac{1}{a+2} > \frac{1}{b+2}$, donc $f(a) > f(b)$: f est décroissante. Elle inverse l'ordre. Comme $u_0 > u_1$, on obtient $u_1 < u_2$, puis $u_2 > u_3$, puis $u_3 < u_4$. Les termes passent alternativement d'un côté à l'autre du point d'intersection : l'escalier tourne en spirale.

(c) Faux. On a $u_2 = \frac{28}{11} > \frac{8}{7} = u_1$, donc (u_n) n'est pas décroissante. Elle ne l'est à partir d'aucun rang. D'après la question précédente, f inverse l'ordre de deux termes consécutifs. Si $u_n > u_{n+1}$, alors $u_{n+1} = f(u_n) < f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Si $u_n < u_{n+1}$, alors $u_{n+1} > u_{n+2}$. Le sens des comparaisons change donc à chaque rang : jamais deux baisses de suite. La suite n'est ni croissante ni décroissante, même à partir d'un certain rang.

Ex. 30 **(suite)**

(d)



Faux. Dans le nuage, l'abscisse d'un point est le rang n : elle augmente de 1 à chaque terme. Les points avancent donc toujours vers la droite et ne peuvent pas tourner autour d'un point. Ils forment un zigzag : u_0, u_2 et u_4 sont en haut, u_1 et u_3 en bas. Les points du haut descendent ($5 > \frac{28}{11} > \frac{100}{47}$) et ceux du bas montent ($\frac{8}{7} < \frac{44}{25}$) : le zigzag se resserre. La spirale n'apparaît que sur l'escalier, où les termes se lisent en abscisse.

(e) On résout $\frac{8}{x+2} = x$ avec $x \geqslant 0$, soit $x^2 + 2x - 8 = 0$. Ses racines sont 2 et -4 ; on garde $x = 2$, et l'on vérifie que $f(2) = \frac{8}{4} = 2$. La spirale se resserre autour du point d'abscisse 2. On conjecture que (u_n) tend vers 2. Ce n'est qu'une conjecture : la figure ne montre que cinq termes, et une construction graphique n'est pas une preuve.

Ex. 31 ★★★ **Le meilleur lot de cartes de visite**

(a) Le point d'abscisse 3 est un peu au-dessus de la graduation 80 : on lit $c_3 \approx 83$. Par le calcul, $c_3 = 30 + \frac{160}{3} = \frac{250}{3} \approx 83{,}33$ euros. L'axe des ordonnées est gradué de 20 en 20. Avec cette échelle, la lecture n'est qu'approchée ; seul le calcul donne la valeur exacte.

(b) $c_5 = 50 + \frac{160}{5} = 82$ et $c_6 = 60 + \frac{160}{6} = \frac{260}{3} \approx 86{,}67$. Or $c_4 = 40 + 40 = 80$, donc $c_4 < c_5 < c_6$. Ma conclusion est différente : Raphaël a tort, (c_n) n'est pas décroissante. Un nuage de quatre points ne donne qu'une conjecture, et cette conjecture était fausse.

(c) $c_{n+1} - c_n = 10(n+1) + \frac{160}{n+1} - 10n - \frac{160}{n} = 10 + \frac{160n - 160(n+1)}{n(n+1)} = 10 - \frac{160}{n(n+1)}$. C'est l'égalité demandée.

Ex. 31 **(suite)**

(d) $c_{n+1} - c_n = \frac{10\,(n(n+1) - 16)}{n(n+1)}$, et $n(n+1) > 0$: la différence a le signe de $n(n+1) - 16$. Or $n(n+1)$ augmente avec n. Pour $n = 3$, $3 \times 4 = 12 < 16$; pour $n = 4$, $4 \times 5 = 20 > 16$. La différence est donc négative pour $n \leqslant 3$ et positive pour $n \geqslant 4$. Ainsi $c_1 > c_2 > c_3 > c_4$, puis $c_4 < c_5 < c_6 < \ldots$: la suite est décroissante jusqu'au rang 4, puis croissante à partir du rang 4. Le coût moyen le plus bas est $c_4 = 80$ euros, pour un lot de 4 centaines, soit 400 cartes.

(e) D'après la question précédente, (c_n) décroît jusqu'au rang 4, puis croît. Pour $n \leqslant 2$, $c_n \geqslant c_2 = 100 > 85$. On a $c_3 = \frac{250}{3} \approx 83{,}33 < 85$, $c_4 = 80 < 85$ et $c_5 = 82 < 85$. Pour $n \geqslant 6$, $c_n \geqslant c_6 = \frac{260}{3} \approx 86{,}67 > 85$. Les lots qui conviennent sont donc ceux de 3, 4 ou 5 centaines, et seulement ceux-là. Le nuage, limité à $n \leqslant 4$, ne permettait pas de voir le lot de 5 centaines.

4. *Étudier le sens de variation*

Ex. 32 ★☆☆ **La différence est donnée**

(a) $u_{n+1} - u_n = -n^2 - 5 < 0$ pour tout n : (u_n) est strictement décroissante.

(b) $v_{n+1} - v_n = \frac{5}{n+1} > 0$ car $n + 1 > 0$: (v_n) est strictement croissante.

(c) $w_{n+1} - w_n = (n-3)^2 \geqslant 0$: (w_n) est croissante. Elle n'est pas strictement croissante, car pour $n = 3$ la différence est nulle : $w_4 = w_3$.

Ex. 33 ★☆☆ **Croissante, mais pas strictement**

(a) $u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 7 = 3n^2 + 6n + 3 - 3n - 3 + 7 = 3n^2 + 3n + 7$.

(b) $u_{n+1} - u_n = (3n^2 + 3n + 7) - (3n^2 - 3n + 7) = 6n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6n \geqslant 0$, et il n'y a égalité que pour $n = 0$.
Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n : (u_n) est croissante.

(c) Non. Pour $n = 0$, la différence est nulle, donc $u_1 = u_0$. En effet, $u_0 = 7$ et $u_1 = 3 - 3 + 7 = 7$. La suite est croissante, mais elle n'est pas strictement croissante.

(d) Pour tout $n \geqslant 1$, $6n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

Ex. 34 ★★☆ **La différence dépend du terme**

(a) $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$: (u_n) est décroissante, quel que soit u_0.

(b) $v_{n+1} - v_n = v_n^2 + 4 > 0$ (un carré plus un nombre positif) : (v_n) est strictement croissante.

Ex. 34 **(suite)**

(c) $w_{n+1} - w_n = (-1)^n$ vaut 1 pour n pair et -1 pour n impair : la différence change de signe, (w_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Ex. 35 ★★☆ **Les premiers termes trompent**

(a) $u_0 = 5$, $u_1 = 15$, $u_2 = 23$, $u_3 = 29$: ces quatre termes sont rangés dans l'ordre croissant.

(b) Non : quelques termes rangés ne disent rien des suivants. Il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n.

(c) $u_{n+1} - u_n = 10 - 2n$, strictement positif pour $n \leqslant 4$, nul pour $n = 5$ ($u_6 = u_5$) et strictement négatif pour $n \geqslant 6$.

(d) La suite est croissante de u_0 à u_6 (avec $u_5 = u_6$), puis strictement décroissante à partir du rang 6 : elle n'est pas croissante. Par exemple $u_7 = 33 < u_6 = 35$.

Ex. 36 ★★☆ **Une parabole qui n'est pas monotone**

(a) Le sommet a pour abscisse $-\frac{-2}{2\times 3} = \frac{1}{3}$, et $a = 3 > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, avec $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$. f n'est donc pas monotone sur $[0\,;+\infty[$.

(b) $w_{n+1} = 3(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 = 3n^2 + 4n + 2$, donc $w_{n+1} - w_n = (3n^2 + 4n + 2) - (3n^2 - 2n + 1) = 6n + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6n + 1 > 0$: (w_n) est strictement croissante. Sami a tort. La propriété du cours dit seulement que si f est monotone, alors la suite l'est aussi. Elle ne dit rien dans l'autre sens. Ici, f descend entre 0 et $\frac{1}{3}$, donc entre deux entiers consécutifs : la suite ne « voit » pas cette descente.

(c) $[1\,;+\infty[$ est inclus dans $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, donc f y est strictement croissante. Pour tout $n \geqslant 1$, $n < n+1$, donc $f(n) < f(n+1)$, c'est-à-dire $w_n < w_{n+1}$. De plus, $w_0 = 1$ et $w_1 = 3 - 2 + 1 = 2$, donc $w_0 < w_1$. Ainsi, (w_n) est strictement croissante dès le rang 0.

Ex. 36 **(suite)**

(d) $z_0 = 1$, $z_1 = 3 - 8 + 1 = -4$ et $z_2 = 12 - 16 + 1 = -3$. Comme $z_1 < z_0$, (z_n) n'est pas croissante. Comme $z_2 > z_1$, elle n'est pas décroissante. Ensuite, $z_{n+1} = 3(n+1)^2 - 8(n+1) + 1 = 3n^2 - 2n - 4$, donc $z_{n+1} - z_n = (3n^2 - 2n - 4) - (3n^2 - 8n + 1) = 6n - 5$. Ce nombre est strictement négatif pour $n = 0$ et strictement positif pour $n \geqslant 1$.
Donc (z_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$, mais elle est strictement croissante à partir du rang 1. Cette fois, le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{8}{2\times 3} = \frac{4}{3}$.
L'intervalle $\left[0\,;\frac{4}{3}\right]$, où k décroît, contient deux entiers, 0 et 1 : la suite « voit » la baisse $z_1 < z_0$.

Ex. 37 ★★☆ **Le quotient, mais pas n'importe comment**

(a) $n + 3 > 0$ et $0{,}8^n > 0$, donc $a_n > 0$ pour tout n. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+4)\times 0{,}8^{n+1}}{(n+3)\times 0{,}8^n} = \frac{0{,}8(n+4)}{n+3}$.

(b) Comme $n + 3 > 0$, je compare $0{,}8(n+4)$ et $n + 3$: $0{,}8(n+4) - (n+3) = 0{,}8n + 3{,}2 - n - 3 = 0{,}2(1-n)$. Pour $n = 0$, ce nombre est positif, donc le quotient est > 1. Pour $n = 1$, il est nul, donc le quotient est $= 1$. Pour $n \geqslant 2$, il est négatif, donc le quotient est < 1.

(c) $a_0 = 3$, $a_1 = 4 \times 0{,}8 = 3{,}2$ et $a_2 = 5 \times 0{,}64 = 3{,}2$. Les termes sont strictement positifs, donc : $a_1 > a_0$, $a_2 = a_1$, et $a_{n+1} < a_n$ pour $n \geqslant 2$. Ainsi, (a_n) est décroissante à partir du rang 1, et strictement décroissante à partir du rang 2. Elle n'est pas décroissante dès le rang 0, car $a_1 > a_0$.

(d) Non. Les termes ne sont pas tous strictement positifs (par exemple $c_1 = -3$), donc comparer le quotient à 1 n'a pas de sens. On a $c_0 = 2$, $c_1 = -3$ et $c_2 = 4$. Comme $c_1 < c_0$, la suite n'est pas croissante. Comme $c_2 > c_1$, elle n'est pas décroissante. (c_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Ex. 38 ★★☆ **Le programme qui rassure trop**

(a) Pour n allant de 0 à 14, le programme calcule $b_{n+1} - b_n$. Si une de ces différences est négative ou nulle, `ok` devient `False`. Il affiche `True` : on sait donc seulement que $b_{n+1} > b_n$ pour $n = 0, 1, \ldots, 14$.

(b) $b_{n+1} = -(n+1)^2 + 40(n+1) + 30 = -n^2 + 38n + 69$, donc $b_{n+1} - b_n = 39 - 2n$. Ce nombre est strictement positif pour $n \leqslant 19$ et strictement négatif pour $n \geqslant 20$. Mathis a tort : le programme n'a testé que 15 valeurs de n.

Ex. 38 **(suite)**

(c) $b_{19} = -361 + 760 + 30 = 429$, $b_{20} = -400 + 800 + 30 = 430$ et $b_{21} = -441 + 840 + 30 = 429$. (b_n) est strictement croissante de b_0 à b_{20}, puis strictement décroissante à partir du rang 20. Le bénéfice est maximal le mois 20 : 430 centaines d'euros, soit 43 000 euros.

(d) Il affiche `False`, car pour $n = 20$ la différence vaut $39 - 40 = -1$. Un seul contre-exemple suffit pour prouver qu'une suite n'est pas strictement croissante. En revanche, un programme ne teste qu'un nombre fini de valeurs de n, alors que la stricte croissance exige $b_{n+1} > b_n$ pour TOUT entier n. Seule l'étude du signe de la différence peut le prouver.

Ex. 39 ★★☆ **Une même relation, deux départs**

(a) $v_1 = 8 - 3 \times 2 = 2$ et $v_2 = 8 - 3 \times 2 = 2$. Dès qu'un terme vaut 2, le suivant vaut $8 - 6 = 2$. De proche en proche, tous les termes valent donc 2 : la suite (v_n) est constante.

(b) $v_1 = 8 - 3 \times 1 = 5$, $v_2 = 8 - 3 \times 5 = -7$ et $v_3 = 8 - 3 \times (-7) = 29$.

(c) Non. $v_0 = 1 < v_1 = 5$, donc (v_n) n'est pas décroissante. $v_2 = -7 < v_1 = 5$, donc elle n'est pas croissante non plus. (v_n) n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone.

(d) $v_{n+1} - v_n = 8 - 3v_n - v_n = 8 - 4v_n$. Pour $n = 0$: $v_1 > v_0 \iff 8 - 4v_0 > 0 \iff v_0 < 2$. Le signe de la différence dépend du terme v_n. Avec $v_0 = 1$, les termes passent d'un côté à l'autre de 2, donc ce signe change : c'est pour cela que la suite n'est pas monotone.

Ex. 40 ★★★ **Fonction croissante, suite… pas forcément**

(a) f est une fonction affine de coefficient directeur $5 > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0\,;+\infty[$. Comme $u_n = f(n)$, la suite (u_n) est strictement croissante. Avec la différence : $u_{n+1} - u_n = (5(n+1) - 36) - (5n - 36) = 5$. Ce nombre est strictement positif pour tout n, ce qui confirme que (u_n) est strictement croissante.

(b) $v_1 = 5 \times 8 - 36 = 4$; $v_2 = 5 \times 4 - 36 = -16$; $v_3 = 5 \times (-16) - 36 = -116$. Comme $v_1 < v_0$, la suite (v_n) n'est pas croissante. Inès a donc tort pour (v_n), alors que f est bien croissante.

Ex. 40 **(suite)**

(c) $v_1 = v_0$ équivaut à $5v_0 - 36 = v_0$, soit $4v_0 = 36$, donc $v_0 = 9$. Alors $v_1 = 5 \times 9 - 36 = 9$, puis $v_2 = 5 \times 9 - 36 = 9$. Chaque terme se calcule à partir du précédent, qui vaut 9, et $f(9) = 9$: de proche en proche, tous les termes valent 9. La suite (v_n) est constante, égale à 9.

(d) La propriété ne porte que sur les suites de la forme $u_n = f(n)$. C'est le cas de (u_n) : on compare $f(n)$ et $f(n+1)$. Les nombres n et $n+1$ sont rangés ($n < n+1$) et f, croissante, conserve cet ordre : $u_n < u_{n+1}$. Ce n'est pas le cas de (v_n) : $v_0 = 8$ alors que $f(0) = -36$, donc v_n n'est pas égal à $f(n)$. Pour (v_n), on a $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_n = f(v_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$. On applique donc f à v_n et à v_{n-1}, dont on ne connaît pas l'ordre à l'avance. La croissance de f ne donne donc pas le sens de variation de (v_n) : il dépend du premier terme. On l'a vu avec $v_0 = 8$ (la suite n'est pas croissante) et avec $v_0 = 9$
(la suite est constante).

(e) Faux. $g(x) = 10 - x$ est affine de coefficient directeur $-1 < 0$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$. Avec $w_0 = 3$: $w_1 = 10 - 3 = 7$, $w_2 = 10 - 7 = 3$, $w_3 = 10 - 3 = 7$. Comme $w_1 > w_0$, la suite n'est pas décroissante. Comme $w_2 < w_1$, elle n'est pas croissante non plus. Elle n'est ni croissante ni décroissante, donc l'affirmation est fausse.

Ex. 41 ★★★ **Une suite qui hésite au départ**

(a) La somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut être croissante, décroissante ou ni l'une ni l'autre : aucune règle ne permet de conclure. Il faut changer de méthode, par exemple étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(b) $u_0 = 0 + \frac{6}{1} = 6$; $u_1 = 1 + \frac{6}{2} = 4$; $u_2 = 2 + \frac{6}{3} = 4$; $u_3 = 3 + \frac{6}{4} = \frac{9}{2}$; $u_4 = 4 + \frac{6}{5} = \frac{26}{5}$. Comme $u_1 < u_0$, la suite n'est pas croissante sur $\mathbb{N}$. Comme $u_3 > u_2$, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{N}$.
Donc (u_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

(c) $u_{n+1} = n + 1 + \frac{6}{n+2}$, donc $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1} = 1 + \frac{6(n+1) - 6(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{6}{(n+1)(n+2)}$. Sur un seul quotient : $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(n+2) - 6}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n - 4}{(n+1)(n+2)}$.
Comme $(n-1)(n+4) = n^2 + 3n - 4$, on obtient $u_{n+1} - u_n = \frac{(n-1)(n+4)}{(n+1)(n+2)}$.

Ex. 41 (suite)

(d) Pour tout entier naturel n, les facteurs $n+4$, $n+1$ et $n+2$ sont strictement positifs. Le signe de $u_{n+1}-u_n$ est donc celui de $n-1$. Pour $n=0$, il est négatif, donc $u_1<u_0$. Pour $n=1$, il est nul, donc $u_2=u_1$. Pour $n\geqslant 2$, il est strictement positif, donc $u_{n+1}>u_n$. Conclusion : pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}\geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante à partir du rang 1, et même strictement croissante à partir du rang 2.

(e) Faux, car $u_2=u_1=4$: l'inégalité n'est pas stricte pour $n=1$. La suite est seulement croissante à partir du rang 1, et strictement croissante à partir du rang 2. Plus petit terme : $u_0=6>u_1$ et, pour $n\geqslant 1$, la suite est croissante, donc $u_n\geqslant u_1$. Le plus petit terme vaut 4. Il est atteint pour $n=1$ et pour $n=2$.

(f) Faux. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{12}{5}=\frac{39}{10}$, et $f(1)=u_1=4=\frac{40}{10}$. Ainsi $1<\frac{3}{2}$ mais $f(1)>f\left(\frac{3}{2}\right)$: f n'est pas croissante sur $[1\,;+\infty[$. La suite ne « voit » f qu'aux entiers : $f(1)=f(2)=4$, et entre 1 et 2, f descend sous 4. Le sens de variation de la suite $(f(n))$ ne donne pas celui de la fonction f.

Ex. 42 ★★★ L'exposition de Colmar

(a) $a_1=\frac{6}{3}\times 200=400$; $a_2=\frac{6}{4}\times 400=600$; $a_3=\frac{6}{5}\times 600=720$; $a_4=\frac{6}{6}\times 720=720$. Et $a_5=\frac{6}{7}\times 720=\frac{4320}{7}\approx 617$. Yanis a tort : $a_4=a_3$, puis $a_5<a_4$. Quelques premiers termes rangés ne prouvent rien sur toute la suite.

(b) $a_0=200>0$. Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{6}{n+3}$, qui est strictement positif. Partant d'un nombre strictement positif, on obtient donc toujours un nombre strictement positif : $a_n>0$ pour tout n. On peut alors diviser : $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{6}{n+3}$.

(c) Comme $n+3>0$: $\frac{6}{n+3}>1$ équivaut à $6>n+3$, c'est-à-dire $n<3$; $\frac{6}{n+3}=1$ équivaut à $n=3$; $\frac{6}{n+3}<1$ équivaut à $n>3$. Les termes étant strictement positifs, on en déduit $a_0<a_1<a_2<a_3$, puis $a_4=a_3$, puis $a_{n+1}<a_n$ pour tout $n\geqslant 4$. La suite est strictement croissante du rang 0 au rang 3, vérifie $a_3=a_4$, puis elle est strictement décroissante à partir du rang 4. La fréquentation maximale vaut 720 visiteurs. Elle est atteinte les jours 3 et 4.

Ex. 42 (suite)

(d) $a_{n+1}-a_n=\frac{6}{n+3}a_n-a_n=a_n\times\left(\frac{6}{n+3}-1\right)=a_n\times\frac{3-n}{n+3}$. Comme $a_n>0$ et $n+3>0$, le signe de la différence est celui de $3-n$: strictement positif pour $n<3$, nul pour $n=3$, strictement négatif pour $n>3$. On retrouve les mêmes conclusions. Lina utilise aussi la stricte positivité de tous les termes : sans elle, on ne connaîtrait pas le signe du produit.

(e) Programme complété : `while a >= 100 :` et `a = 6 / (n + 3) * a`. La mise à jour de `a` doit venir avant celle de `n`, car le calcul de a_{n+1} utilise n. On a $a_9=\frac{7776}{77}\approx 101$, qui est encore supérieur ou égal à 100, et $a_{10}=\frac{3888}{77}\approx 50$, qui est inférieur à 100. Le programme affiche donc 10 : la fréquentation passe sous 100 visiteurs le jour 10.

(f) La suite est strictement décroissante à partir du rang 4, donc à partir du rang 10. Pour tout $n>10$, on a alors $a_n<a_{10}<100$. D'après le modèle, une fois passée sous 100 visiteurs, la fréquentation ne remonte plus au-dessus.

5. *Conjecturer une limite, chercher un seuil*

Ex. 43 ★☆☆ Des valeurs de plus en plus grandes

(a) $u_{10}=-2+\frac{3}{11}\approx -1{,}7273$ et $u_{100}=-2+\frac{3}{101}\approx -1{,}9703$.

(b) $u_{1\,000}=-2+\frac{3}{1\,001}\approx -1{,}9970$.

(c) Quand n devient très grand, $\frac{3}{n+1}$ devient aussi proche de 0 qu'on veut. On conjecture que (u_n) tend vers -2.

(d) Tom a tort. Quelques valeurs, même pour n grand, suggèrent un comportement mais ne démontrent rien. En 1re, on peut seulement conjecturer que (u_n) tend vers -2. La démonstration se fait en Terminale.

Ex. 44 ★★☆ Lire un algorithme de seuil

(a) La boucle s'arrête dès que $u\geqslant 9{,}9$: la fonction renvoie le plus petit rang n tel que $u_n\geqslant 9{,}9$, pour la suite $u_0=1$, $u_{n+1}=0{,}9u_n+1$.

(b) Les termes augmentent : $u_1=1{,}9$, $u_2=2{,}71\ldots$ Par calculs successifs (calculatrice ou programme), $u_{42}\approx 9{,}892<9{,}9$ et $u_{43}\approx 9{,}903\geqslant 9{,}9$. La boucle s'arrête donc pour la première fois quand `n` vaut 43 : `seuil()` renvoie 43.

Ex. 44 (suite)

(c) Avec `<=`, la boucle s'arrête dès que $u > 9{,}9$: on cherche le plus petit n tel que $u_n > 9{,}9$. Comme $u_{42} \approx 9{,}892 < 9{,}9$ et $u_{43} \approx 9{,}903 > 9{,}9$, la fonction renvoie encore 43. Les deux versions ne diffèrent que si un terme vaut exactement 9,9 : la version avec `<` s'arrête sur ce terme, la version avec `<=` continue.

Ex. 45 ★★☆ **Une récurrence qui se stabilise**

(a) $u_1 = 7{,}6$, $u_2 = 11{,}56$, $u_3 = 13{,}936$, $u_4 = 15{,}3616$.

(b) $u_{15} \approx 17{,}492$ et $u_{30} \approx 17{,}500$ (valeur arrondie : le terme reste un peu en dessous). Les termes semblent se rapprocher de 17,5. On conjecture que (u_n) tend vers 17,5.

(c) Les termes augmentent. Par calculs successifs, $u_9 \approx 17{,}3337 \leqslant 17{,}4$. À 10^{-3} près, $u_{10} \approx 17{,}400$: cet arrondi ne dit pas si u_{10} est au-dessus ou au-dessous de 17,4. Avec plus de décimales, $u_{10} \approx 17{,}40023 > 17{,}4$. Le plus petit rang cherché est donc 10.

Ex. 46 ★★☆ **Quand Python arrondit**

(a) $x_n = 1 \iff 0{,}1n = 1 \iff n = 10$. En calcul exact, la réponse est $n = 10$.

(b) Python ne peut pas stocker 0,1 exactement. Chaque addition ajoute une petite erreur d'arrondi. Après 10 passages, `x` vaut `0.9999999999999999` et non `1`. Au passage suivant, il vaut environ 1,1, puis il continue d'augmenter. `x` n'est donc jamais exactement égal à `1`. La condition `x != 1` reste toujours vraie : la boucle tourne sans fin.

(c) Après 10 passages, `x` vaut `0.9999999999999999`, qui est strictement inférieur à 1. La boucle fait donc un passage de plus : `n` passe à 11 et `x` à environ 1,1, puis la boucle s'arrête. La fonction renvoie 11 au lieu de 10 : le résultat est décalé de 1. Une condition qui marche : `while x < 0.95:`. Le seuil 0,95 est placé entre 0,9 et 1, loin des erreurs d'arrondi. La fonction renvoie alors 10.

Ex. 47 ★★☆ **Des termes qui grimpent… jusqu'où ?**

(a) $u_{10} = \frac{10\,000}{510} \approx 19{,}6$; $u_{100} = \frac{100\,000}{600} \approx 166{,}7$; $u_{1\,000} = \frac{1\,000\,000}{1\,500} \approx 666{,}7$.

(b) $u_{10\,000} = \frac{10\,000\,000}{10\,500} \approx 952{,}4$ et $u_{1\,000\,000} = \frac{10^9}{1\,000\,500} \approx 999{,}5$. Les termes augmentent, mais de moins en moins vite : de $n = 10^4$ à $n = 10^6$, ils ne gagnent qu'environ 47. Ils semblent se rapprocher de 1 000 sans le dépasser. Lina a regardé des valeurs de n trop petites. Une suite qui devient grande ne tend pas forcément vers $+\infty$: son affirmation n'est pas justifiée.

Ex. 47 (suite)

(c) Pour n très grand, $n + 500$ est presque égal à n. Donc u_n est proche de $\frac{1\,000n}{n} = 1\,000$, le rapport des coefficients des termes de plus haut degré ($\frac{1\,000}{1}$). On conjecture que (u_n) tend vers 1 000. C'est une conjecture : la preuve se fait en Terminale.

(d) $a - \frac{b}{n+500} = \frac{a(n+500)-b}{n+500} = \frac{an+500a-b}{n+500}$. Pour retrouver $\frac{1\,000n}{n+500}$ pour tout n, il faut $a = 1\,000$ et $500a - b = 0$, donc $b = 500\,000$. Pour tout n, $\frac{500\,000}{n+500} > 0$, donc $u_n = 1\,000 - \frac{500\,000}{n+500} < 1\,000$. Tous les termes sont strictement inférieurs à 1 000 : la suite ne peut pas tendre vers $+\infty$.

Ex. 48 ★★☆ **Un thé qui refroidit**

(a) $T_1 = 0{,}8 \times 90 + 4 = 76$; $T_2 = 0{,}8 \times 76 + 4 = 64{,}8$; $T_3 = 0{,}8 \times 64{,}8 + 4 = 55{,}84$.

(b) Au départ, `T` vaut 90. La condition `T < 30` est fausse, donc la boucle ne tourne pas et la fonction renvoie 0. L'erreur : Malo a écrit la condition cherchée au lieu de sa négation. On cherche $T_n < 30$, donc la boucle doit continuer tant que $T \geqslant 30$. Ligne corrigée : `while T >= 30:`, ou `while T >= s:` pour garder le paramètre `s`.

(c) $T_4 = 48{,}672$; $T_5 \approx 42{,}94$; $T_6 \approx 38{,}35$; $T_7 \approx 34{,}68$; $T_8 \approx 31{,}74$; $T_9 \approx 29{,}40$. La suite décroît. On a $T_8 \geqslant 30$ et $T_9 < 30$, donc la boucle s'arrête quand `n` vaut 9. L'appel renvoie 9 : le thé passe sous 30 °C au bout de 9 minutes.

(d) L'appel renvoie 10. La boucle tourne toujours 9 fois, mais `n` démarre à 1. À chaque étape, `n` vaut donc l'indice du terme stocké dans `T` plus 1. Le résultat est décalé de 1 : la bonne réponse est 9.

(e) On a $T_n > 20$ pour tout n. La condition `T >= 20` reste donc toujours vraie et la boucle ne s'arrête jamais : le seuil 20 n'est jamais franchi. Les termes décroissent et semblent se rapprocher de 20. On conjecture que (T_n) tend vers 20, la température de la pièce.

Ex. 49 ★★☆ **Une croissance très lente**

(a) $h_n > 50 \iff 2\sqrt{n} > 49 \iff \sqrt{n} > 24{,}5 \iff n > 24{,}5^2 = 600{,}25$. On peut élever au carré car les deux membres sont positifs. Contrôle : $h_{600} \approx 49{,}99 \leqslant 50$ et $h_{601} \approx 50{,}03 > 50$. Le plus petit entier cherché est $n = 601$.

(b) $h_n \geqslant 41 \iff \sqrt{n} \geqslant 20 \iff n \geqslant 400$. Le plus petit entier est 400, car $h_{400} = 2 \times 20 + 1 = 41$ exactement. Pour $h_n > 41$, il faut $n > 400$: le plus petit entier est 401 ($h_{401} \approx 41{,}05$). Les réponses diffèrent à cause du cas d'égalité $h_{400} = 41$: « $\geqslant$ » l'accepte, mais pas « $>$ ».

Ex. 49 **(suite)**

(c) $h_{101} - h_{100} = 2\sqrt{101} - 20 \approx 0{,}0998$. Pourtant, $h_n > 1\,000 \iff \sqrt{n} > 499{,}5 \iff n > 249\,500{,}25$, donc le plus petit entier est $n = 249\,501$. Contrôle : $h_{249\,500} \approx 999{,}9995$ et $h_{249\,501} \approx 1\,000{,}0015$. Nora a tort : même si les écarts deviennent de plus en plus petits, la suite dépasse 1 000. Il faut seulement attendre longtemps.

(d) Supposons $n > \left(\frac{A-1}{2}\right)^2$. Comme $\frac{A-1}{2} > 0$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante, $\sqrt{n} > \frac{A-1}{2}$.
Donc $2\sqrt{n} > A - 1$, puis $h_n > A$. N'importe quel nombre A fixé à l'avance est dépassé à partir d'un certain rang. On conjecture que (h_n) tend vers $+\infty$, même si elle y va très lentement.

Ex. 50 ★★☆ **Deux escaliers, deux comportements**

(a) On lit $r_1 = 6$, $r_2 = 1$, $r_3 = 6$ et $r_4 = 1$: l'escalier tourne toujours sur le même rectangle.
Donc $r_n = 1$ si n est pair et $r_n = 6$ si n est impair.

(b) La suite n'a aucune limite. Ses termes valent alternativement 1 et 6, donc deux termes consécutifs sont toujours à distance 5 : ils ne se rapprochent d'aucun réel. Ils restent aussi entre 1 et 6, donc ils ne tendent ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

(c) $b_1 = 6 - 0{,}5 \times 8 = 2$; $b_2 = 6 - 0{,}5 \times 2 = 5$; $b_3 = 6 - 0{,}5 \times 5 = 3{,}5$; $b_4 = 6 - 0{,}5 \times 3{,}5 = 4{,}25$; $b_5 = 6 - 0{,}5 \times 4{,}25 = 3{,}875$. Sur la figure 2, on lit bien $b_1 = 2$, $b_2 = 5$ et $b_3 = 3{,}5$. L'escalier s'enroule autour du point où $\mathcal{D}$ coupe la droite $y = x$, d'abscisse 4.

(d) $b_{n+1} - 4 = 6 - 0{,}5b_n - 4 = 2 - 0{,}5b_n = -0{,}5(b_n - 4)$: à chaque étape, l'écart à 4 change de signe et est divisé par 2. $r_{n+1} - 3{,}5 = 7 - r_n - 3{,}5 = -(r_n - 3{,}5)$: l'écart change de signe mais garde la même taille, 2,5. Yanis a tort : une suite qui alterne autour d'une valeur peut quand même avoir une limite. On conjecture que (b_n) tend vers 4, alors que (r_n) n'a pas de limite.

(e) L'écart entre b_0 et 4 vaut 4, puis il est divisé par 2 à chaque rang : 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; 0,0625 ; 0,03125 ; 0,015625 au rang 8 ; 0,0078125 au rang 9. Contrôle : $b_8 = 4{,}015625$, dont l'écart à 4 est $\geqslant 0{,}01$, et $b_9 = 3{,}9921875$, dont l'écart est $< 0{,}01$. Le plus petit entier cherché est $n = 9$.

Ex. 51 ★★★ **Corriger un programme de seuil**

(a) $v_{10} = 4 + \frac{60}{12} = 9$; $v_{100} = 4 + \frac{60}{102} \approx 4{,}5882$; $v_{1\,000} = 4 + \frac{60}{1\,002} \approx 4{,}0599$. L'écart $v_n - 4 = \frac{60}{n+2}$ devient aussi petit qu'on veut quand n devient grand. On conjecture que (v_n) tend vers 4. C'est une conjecture : le tableau ne la démontre pas.

(b) $v_{n+1} - v_n = \frac{60}{n+3} - \frac{60}{n+2} = \frac{60(n+2) - 60(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{-60}{(n+2)(n+3)}$. Le dénominateur est strictement positif, donc $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante.

(c) Comme $n + 2 > 0$: $v_n < 4{,}1 \iff \frac{60}{n+2} < 0{,}1 \iff n + 2 > 600 \iff n > 598$, donc $n \geqslant 599$. Contrôle : $v_{598} = 4 + \frac{60}{600} = 4{,}1$, qui n'est pas strictement inférieur à 4,1 ; et $v_{599} = 4 + \frac{60}{601} \approx 4{,}0998 < 4{,}1$. Le plus petit entier cherché est 599.

(d) La boucle tourne tant que $v > 4{,}1$. Elle s'arrête au premier rang tel que $v_n \leqslant 4{,}1$. La suite est décroissante et $v_{597} = 4 + \frac{60}{599} \approx 4{,}1002 > 4{,}1$, alors que $v_{598} = 4{,}1$. L'appel renvoie donc 598. Ici, Python calcule `4 + 60/600` exactement égal à `4.1`, mais en général il faut se méfier des égalités entre flottants. Ce n'est pas le rang cherché, car $v_{598} = 4{,}1$ n'est pas strictement inférieur à 4,1. L'erreur : la négation de $v < 4{,}1$ est $v \geqslant 4{,}1$, pas $v > 4{,}1$. Ligne corrigée : `while v >= 4.1:`. L'appel renvoie alors 599.

(e) Au premier passage, `v` reçoit $v_0 = 34$ puis `n` devient 1. Ensuite, à chaque passage, `v` contient v_k et `n` vaut $k + 1$: le compteur a un cran d'avance. La boucle s'arrête quand `v` vaut $v_{599} < 4{,}1$, et `n` vaut alors 600. L'appel renvoie 600, soit 1 de trop. Correction : remettre `n = n + 1` avant le calcul de `v`, ou renvoyer `n - 1`.

(f) La boucle devient `while v >= s:`. Pour tout n, $v_n - 4 = \frac{60}{n+2} > 0$, donc $v_n > 4$. Si $s \leqslant 4$, alors $v_n > s$ pour tout n. La condition reste toujours vraie et le programme tourne sans fin, même si on conjecture que la suite tend vers 4. Si $s > 4$: $v_n < s \iff \frac{60}{n+2} < s - 4 \iff n + 2 > \frac{60}{s-4}$. Cette inégalité est vraie pour n assez grand, donc la boucle s'arrête. Conclusion : l'appel `seuil(s)` s'arrête si et seulement si $s > 4$.

Ex. 52 ★★★ **Trois conjectures trop rapides**

(a) $p_{100} = 0{,}02 \times 10\,000 - 300 + 120 = 20$ et $p_{1\,000} = 0{,}02 \times 1\,000\,000 - 3\,000 + 120 = 17\,120$. Comme $p_{1\,000} > p_{50}$, la suite n'est pas décroissante. Avec des termes aussi grands, elle ne semble pas tendre vers $-\infty$. Jade a tort : ses valeurs de n n'étaient pas assez grandes.

Ex. 52 **(suite)**

(b) $0{,}02(n-75)^2+7{,}5 = 0{,}02(n^2-150n+5\,625)+7{,}5 = 0{,}02n^2-3n+112{,}5+7{,}5 = p_n$. Si $n \geqslant 75$, alors $0 \leqslant n-75 < n-74$. La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, donc $(n-75)^2 < (n-74)^2$, c'est-à-dire $p_n < p_{n+1}$. La suite (p_n) est donc croissante à partir du rang 75. De plus, $p_n \geqslant 7{,}5 > 0$ pour tout n, avec $p_{75} = 7{,}5$: tous les termes sont strictement positifs.

(c) $p_n > 10\,000 \iff (n-75)^2 > \frac{10\,000-7{,}5}{0{,}02} = 499\,625$. Si $n \leqslant 75$, alors $(n-75)^2 \leqslant 75^2 = 5\,625$: c'est impossible. Pour $n \geqslant 75$, il faut $n-75 > \sqrt{499\,625} \approx 706{,}84$, soit $n-75 \geqslant 707$, donc $n \geqslant 782$. Contrôle : $p_{781} = 0{,}02 \times 706^2 + 7{,}5 = 9\,976{,}22$ et $p_{782} = 0{,}02 \times 707^2 + 7{,}5 = 10\,004{,}48$. Le plus petit entier est 782. Le même calcul marche pour n'importe quel seuil fixé : les termes finissent par dépasser tout nombre. On conjecture que (p_n) tend vers $+\infty$.

(d) $q_0 = 9$; $q_1 = 2-9 = -7$; $q_2 = 4+9 = 13$; $q_3 = 6-9 = -3$; $q_{1\,000} = 2\,000+9 = 2\,009$; $q_{1\,001} = 2\,002-9 = 1\,993$. La suite n'est pas monotone : $q_1 < q_0 < q_2$. Comme $(-1)^n \geqslant -1$, on a $9 \times (-1)^n \geqslant -9$, donc $q_n \geqslant 2n-9$. Or $2n-9$ finit par dépasser n'importe quel nombre. Par exemple, pour $n \geqslant 5\,005$, $2n-9 \geqslant 10\,001$, donc $q_n > 10\,000$. Hugo a tort : (q_n) descend et remonte, mais ses termes finissent par dépasser tout nombre fixé. On conjecture que (q_n) tend vers $+\infty$. Une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante.

(e) Pour $n \geqslant 1$: $t_n = \frac{n^2\left(7-\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(\frac{5}{n^2}-2\right)} = \frac{7-\frac{4}{n}}{\frac{5}{n^2}-2}$. Quand n devient grand, $\frac{4}{n}$ et $\frac{5}{n^2}$ deviennent aussi proches de 0 qu'on veut. On conjecture donc que (t_n) tend vers $\frac{7}{-2} = -3{,}5$. Contrôle : $t_{1\,000} = \frac{6\,996\,000}{-1\,999\,995} \approx -3{,}4980$, ce qui confirme la conjecture.

Ex. 52 **(suite)**

(f) $s_{11} = -5+\frac{1}{12} \approx -4{,}9167$; $s_{101} = -5+\frac{1}{102} \approx -4{,}9902$; $s_{1\,001} = -5+\frac{1}{1\,002} \approx -4{,}9990$. Les termes de rang pair se rapprochent de 5 et ceux de rang impair de -5. La suite ne se rapproche d'aucun réel. Elle ne tend pas non plus vers l'infini, puisque $-5 < s_n \leqslant 6$. Zoé a tort : (s_n) n'a pas de limite. Erreur commune : Zoé et Jade ont conclu à partir de valeurs mal choisies (toutes paires pour Zoé, trop petites pour Jade). Un tableau de valeurs suggère une conjecture, il ne la démontre jamais.

Ex. 53 ★★★ **Le dallage de Camille**

(a) $c_n = (n+1)(n+4) = n^2+5n+4$. Si on retire le contour, il reste $n-1$ rangées de $n+2$ dalles. Donc $b_n = (n-1)(n+2) = n^2+n-2$. Il y a donc $c_n - b_n = 4n+6$ dalles noires. Vérification : le dallage numéro 1 a 2 rangées de 5 dalles. Toutes ses dalles sont sur le contour : 10 dalles noires, et on a bien $4 \times 1 + 6 = 10$.

(b) $c_n \leqslant 10\,000 \iff n^2+5n-9\,996 \leqslant 0$. $\Delta = 25+39\,984 = 40\,009$. Les racines sont $\frac{-5-\sqrt{40\,009}}{2} \approx -102{,}511$ et $\frac{-5+\sqrt{40\,009}}{2} \approx 97{,}511$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc il faut $n \leqslant 97$. Contrôle : $c_{97} = 98 \times 101 = 9\,898 \leqslant 10\,000$ et $c_{98} = 99 \times 102 = 10\,098 > 10\,000$. Le plus grand dallage possible est le numéro 97.

(c) $w_{10} = \frac{9\times12}{11\times14} = \frac{108}{154} \approx 0{,}70130$; $w_{100} = \frac{99\times102}{101\times104} \approx 0{,}96135$; $w_{1\,000} = \frac{999\times1\,002}{1\,001\times1\,004} \approx 0{,}99601$. On conjecture que (w_n) tend vers 1. En effet, $w_n = \frac{n^2+n-2}{n^2+5n+4}$ est un quotient de polynômes de même degré. Le rapport des coefficients de n^2 vaut $\frac{1}{1} = 1$.

(d) Comme $c_n > 0$: $w_n > 0{,}99 \iff n^2+n-2 > 0{,}99(n^2+5n+4) \iff 0{,}01n^2-3{,}95n-5{,}96 > 0 \iff n^2-395n-596 > 0$. $\Delta = 156\,025+2\,384 = 158\,409$. Les racines sont environ $-1{,}503$ et $\frac{395+\sqrt{158\,409}}{2} \approx 396{,}503$. Le trinôme est positif à l'extérieur des racines et $n \geqslant 1$, donc il faut $n \geqslant 397$. Contrôle : $w_{396} = \frac{395\times398}{397\times400} \approx 0{,}98999 \leqslant 0{,}99$ et $w_{397} = \frac{396\times399}{398\times401} \approx 0{,}99001 > 0{,}99$. Le plus petit entier est 397.

(e) On écrit `while w <= s:`, la négation de $w_n > s$. On écrit ensuite `w = (n**2 + n - 2)/(n**2 + 5*n + 4)`, qui calcule $w_n = \frac{b_n}{c_n}$ pour la nouvelle valeur de `n`, puis `return n`. L'initialisation `w = 0` convient : elle correspond à $n = 1$, car $w_1 = \frac{0\times3}{2\times5} = 0$. Le compteur et le terme sont donc bien accordés au départ. Ensuite, chaque passage augmente n puis calcule w_n. D'après la question précédente, `seuil(0.99)` doit renvoyer 397.

(f) Faux. Le nombre de dalles noires, $4n+6$, finit par dépasser n'importe quel nombre : il tend vers $+\infty$. Leur proportion vaut $\frac{4n+6}{n^2+5n+4} = 1-w_n$. On a par exemple $\frac{4\,006}{1\,005\,004} \approx 0{,}00399$ pour $n = 1\,000$. Comme on conjecture que (w_n) tend vers 1, on conjecture que cette proportion tend vers 0. Le total de dalles grandit bien plus vite que le nombre de dalles noires.