49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 1re : suites arithmétiques et géométriques

À retenir : $u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$; $u_n = u_p \times q^{n-p}$, pas $(u_0 q)^n$. De u_0 à u_n : $n+1$ termes ; $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; somme géom. = 1er terme $\times \frac{1-q^N}{1-q}$ (N termes). Ex. : +4 % : ×1,04.

Ex. 1 ★☆☆ **Suite arithmétique : terme général et sommes** — (u_n) est la suite arithmétique définie pour tout entier naturel n, de raison $r = 3$, avec $u_1 = 7$.

a) Calcule u_0.

b) Léa écrit $u_n = 7 + 3n$. Calcule u_1 avec sa formule, puis donne la formule correcte de u_n.

c) Calcule u_{25}.

d) Combien de termes compte la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{25}$? Calcule cette somme.

e) Calcule $1 + 2 + \cdots + 40$.

f) Déduis-en $u_0 + u_1 + \cdots + u_{40}$, en écrivant chaque terme avec la formule de u_n.

Ex. 2 ★☆☆ **Suite géométrique : terme général, raison, somme** — (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison -3.

a) Calcule v_4 (attention aux parenthèses).

b) Tom écrit $v_n = (-15)^n$. Calcule $(-15)^2$ et v_2, puis corrige sa formule.

c) (w_n) est géométrique de raison positive, avec $w_2 = 12$ et $w_4 = 48$. Détermine sa raison q, puis w_0.

d) Un prix de 250 € augmente de 2,5 % par an. Par quel nombre est-il multiplié chaque année ? Donne le prix après 3 ans, au centime près.

e) Combien de termes compte la somme $7 + 7 \times 2 + 7 \times 2^2 + \cdots + 7 \times 2^9$? Calcule-la.

Ex. 3 ★★☆ **Vrai ou faux sur les suites de référence** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

a) « (u_n) est arithmétique de raison 5 et $u_3 = 2$. Alors $u_3 + u_4 + \cdots + u_{20} = 17 \times \frac{u_3 + u_{20}}{2}$. »

b) « Pour $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$, on a $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}$, donc (a_n) est géométrique. »

c) « La suite définie pour tout entier naturel n par $b_n = \frac{4^n}{3^{n+2}}$ est géométrique. »

Ex. 3 (suite)

d) « Toute suite géométrique de raison 0,8 est décroissante. »

Ex. 4 ★★☆ **Deux contrats de subvention à Nantes** — Une association nantaise choisit un contrat sur 10 ans. Contrat A : 2 000 € la 1re année, puis 150 € de plus chaque année. Contrat B : 2 000 € la 1re année, puis une hausse de 6 % par an. On note a_n et b_n les montants de l'année n, pour $n \geqslant 1$.

a) Exprime a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Calcule a_{10} et b_{10} (à l'euro près).

c) Calcule le total perçu sur les 10 ans avec chaque contrat (à l'euro près).

d) Quel contrat l'association doit-elle choisir sur 10 ans ? Justifie.

Ex. 5 ★★★ **Retrouver une suite géométrique à partir de deux termes** — (w_n) est une suite géométrique de raison q, définie pour tout entier naturel n. On sait que $w_3 = 40$, $w_7 = \frac{5}{2}$ et $w_4 < 0$.

a) Détermine les valeurs possibles de q, puis la raison q grâce à l'information $w_4 < 0$.

b) Calcule w_0, puis exprime w_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

c) Calcule w_1 et w_2. La suite (w_n) est-elle monotone ? Justifie.

d) Calcule la valeur exacte de $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_9$.

e) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$. Détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ en justifiant.

Ex. 6 ★★★ **Une suite ni arithmétique ni géométrique, décomposée** — Pour tout entier naturel n, on pose $t_n = 2n + 3^n$, $d_n = t_{n+1} - t_n$ et $e_n = d_n - 2$.

a) Calcule t_0, t_1, t_2 et t_3. Démontre que (t_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

b) Exprime d_n puis e_n en fonction de n.

c) Hugo calcule $\frac{e_1}{e_0} = 3$ et conclut que (e_n) est géométrique. Explique pourquoi cela ne suffit pas, puis démontre-le.

d) Exprime $S_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$ en fonction de n, puis calcule S_{10}.

e) Détermine la limite de (t_n), puis celle de (S_n). Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Ventes et capacité d'une coopérative bordelaise** — Une coopérative de jus de fruits de Bordeaux vend 800 litres le mois 1. Ensuite, ses ventes augmentent de 4 % chaque mois. Sa capacité de production vaut 1 000 litres le mois 1 et augmente de 20 litres chaque mois. On note v_n et c_n les ventes et la capacité du mois n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(a) Démontre que (v_n) est géométrique, puis exprime v_n en fonction de n.

(b) Exprime c_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 1$. Vérifie ta formule pour $n = 1$.

(c) Calcule le volume total vendu du mois 1 au mois 12, arrondi au litre.

(d) Ce programme doit afficher le premier mois où les ventes dépassent la capacité :

```
n = 1
v = 800
c = 1000
while v <= c:
    n = n + 1
    v = v * 0.04
    c = c + 20
print(n)
```

Corrige la ligne fausse, puis donne la valeur affichée et interprète-la.

2. *Limites : opérations et formes indéterminées*

À retenir : Une forme indéterminée ($\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$) n'est pas un résultat. Je factorise par le terme dominant, en haut et en bas, ou j'utilise la quantité conjuguée. Ex. : $\frac{n+2}{3n} = \frac{1+\frac{2}{n}}{3} \to \frac{1}{3}$.

Ex. 8 ★☆☆ **Opérations sur les limites** — Chaque suite est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Détermine sa limite en citant l'opération utilisée (somme, produit ou quotient).

(a) $u_n = 4 - \dfrac{7}{\sqrt{n}}$

(b) $v_n = (2 - n^2) \times \left(-3 + \dfrac{1}{n}\right)$

(c) $w_n = \dfrac{-6}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$

(d) $t_n = 3 - 2 \times 0{,}6^n$

(e) $r_n = \dfrac{\sqrt{n} + 2}{5 - \frac{1}{n}}$

Ex. 9 ★☆☆ **Lever une forme indéterminée** — Chaque suite est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Nomme la forme indéterminée, lève-la, puis donne la limite.

(a) $a_n = -2n^3 + 5n^2 + 1$

(b) $b_n = \dfrac{5n^2 + 2n}{1 - 4n^2}$

(c) $c_n = \dfrac{4n + 1}{n^2 + 3}$

Ex. 9 (suite)

(d) $d_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$

(e) $e_n = \dfrac{3^n - 4^n}{4^n + 1}$

(f) $f_n = \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n}}$

Ex. 10 ★★☆ **Les raisonnements d'Inès** — Les suites sont définies pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Inès a calculé trois limites. Pour chaque calcul, dis si la conclusion et le raisonnement sont justes. Si besoin, écris le bon raisonnement.

(a) Inès écrit : « $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{+\infty}{+\infty} = 1$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Inès écrit : « $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - 3\sqrt{n}) = +\infty - \infty = 0$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Inès écrit : « $\frac{1}{n} \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(4n - 1) \times \frac{1}{n}\right] = 0$. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux sur les opérations** — (u_n) et (v_n) sont deux suites définies pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie. Si elle est fausse, donne un contre-exemple.

(a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et si $v_n > 0$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et si $v_n \neq 0$ pour tout n, alors $\frac{1}{v_n}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

(c) Une suite divergente tend forcément vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

(d) Si (u_n) et (v_n) tendent toutes les deux vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Ex. 12 ★★★ **Racine, paramètre et signe** — Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

(a) Quelle forme indéterminée obtiens-tu en calculant directement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$? Lève-la avec la quantité conjuguée, puis donne la limite ℓ de (u_n).

(b) Soit b un réel et $v_n = \sqrt{n^2 + n} - bn$. Justifie que $v_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - b\right)$, puis donne la limite de (v_n) selon les valeurs de b.

(c) Compare $n^2 + n$ et $(n + \ell)^2$, où ℓ est la limite trouvée à la question 1. Déduis-en le signe de $u_n - \ell$ pour tout $n \geqslant 1$.

(d) On pose $w_n = \frac{u_n}{u_n - \ell}$. Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ en justifiant soigneusement.

Ex. 13 ★★★ **Des puissances qui se disputent** — Toutes les suites sont définies pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

(a) On pose $a_n = 5^n - 2^n$. Quelle forme indéterminée obtiens-tu ? Factorise par 5^n et déduis-en $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Quelle forme obtiens-tu directement pour $b_n = \frac{2^{n+1}+3\times5^n}{5^n-2^n}$? Détermine la limite de (b_n).

(c) On pose $c_n = \frac{0{,}4^n}{0{,}5^n}$ et $d_n = \frac{0{,}5^n}{0{,}4^n}$. Quelle forme obtiens-tu directement ? Calcule ces deux limites, puis conclus sur cette forme.

(d) On pose $e_n = \frac{(-5)^n+2^n}{5^n-2^n}$. Démontre que la suite (e_n) n'a pas de limite.

Ex. 14 ★★★ **Un quotient sous la loupe** — Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{3n^2-n}{2n^2+5}$.

(a) Quelle forme indéterminée obtiens-tu en calculant directement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$? Lève-la, puis détermine la limite ℓ de (u_n).

(b) On pose $v_n = u_n - \ell$. Écris v_n sous la forme d'un seul quotient, puis déduis-en le signe de v_n.

(c) Quelle forme obtiens-tu en calculant directement la limite de $n \times v_n$? Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n$.

(d) Détermine la limite de $t_n = (5-n)\left(u_n - \frac{7}{2}\right)$.

3. *Comparaison et théorème des gendarmes*

À retenir : Limite infinie : une seule inégalité suffit ($u_n \geqslant v_n$ et $v_n \to +\infty$). Limite finie : il faut deux bornes de même limite (gendarmes), par exemple $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. Une suite bornée peut diverger. Enfin, $u_n < 3$ donne seulement $\ell \leqslant 3$.

Ex. 15 ★☆☆ **Limites infinies par comparaison** — Pour chaque suite définie pour tout entier naturel n, détermine sa limite à l'aide d'une minoration ou d'une majoration justifiée.

(a) $u_n = n^2 + (-1)^n$

(b) $u_n = -3n + \sin n$

(c) $u_n = \sqrt{n} - 2\cos n$

(d) $u_n = n(4 + \cos n)$

(e) $u_n = 5 - 2n + 3 \times (-1)^n$

Ex. 16 ★☆☆ **Encadrer puis appliquer les gendarmes** — Pour chaque suite, encadre u_n par deux suites de même limite, puis détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ pour tout entier naturel n.

(b) $u_n = \frac{n+\cos n}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(c) $u_n = \frac{5-\sin n}{n^2+4}$ pour tout entier naturel n.

Ex. 16 (suite)

(d) $u_n = \frac{4n-\cos n}{2n+1}$ pour tout entier naturel n.

(e) $u_n = 7 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Ex. 17 ★★☆ **Vrai ou faux sur les inégalités et les limites** — Dans chaque cas, dis si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifie : cite un théorème si elle est vraie, donne un contre-exemple si elle est fausse.

(a) Si $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$, alors (u_n) converge, car $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

(b) Si (u_n) converge vers ℓ et si $u_n > \frac{5n}{n+3}$ pour tout entier naturel n, alors $\ell \geqslant 5$.

(c) Si $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$, alors (u_n) converge.

(d) Si $2 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{5}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 10$, alors (u_n) converge vers 2.

Ex. 18 ★★☆ **Trois erreurs dans la copie de Maëlle** — Maëlle a rédigé les trois raisonnements ci-dessous. Pour chacun, repère l'erreur, explique-la, puis écris une correction complète.

(a) Pour $b_n = \frac{2+\sin n}{1-n}$ $(n \geqslant 2)$, elle écrit : « $1 \leqslant 2 + \sin n \leqslant 3$, donc $\frac{1}{1-n} \leqslant b_n \leqslant \frac{3}{1-n}$. »

(b) Pour $c_n = \frac{\cos n}{n+3}$, elle écrit : « $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, donc $(\cos n)$ converge. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. »

(c) Pour $e_n = n\,(1 + (-1)^n)$, elle écrit : « $e_n \leqslant 2n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$. »

Ex. 19 ★★★ **Une somme de n termes prise en tenaille** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{2n}{n^2+2} + \cdots + \frac{2n}{n^2+n}$. Cette somme compte n termes de la forme $\frac{2n}{n^2+k}$, avec k entier allant de 1 à n.

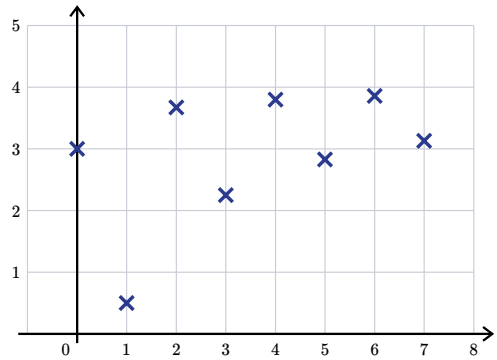
(a) Calcule les valeurs exactes de S_1 et de S_2.

(b) Soit $n \geqslant 1$ et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Encadre $\frac{2n}{n^2+k}$ par deux quotients qui ne dépendent que de n. Justifie chaque étape.

(c) Déduis-en un encadrement de S_n par deux suites dont tu simplifieras l'écriture.

(d) Démontre que la suite (S_n) converge et détermine sa limite.

Ex. 20 ★★★ **Une suite qui oscille : conjecturer puis démontrer** — Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{4n+3\times(-1)^n}{n+1}$. Le nuage ci-dessous représente les points $(n\,;u_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 7$.



(a) Par lecture du nuage, conjecture le comportement de la suite (u_n) lorsque n devient grand.

(b) Encadre u_n par deux suites dont tu détermineras les limites, puis démontre ta conjecture.

(c) Démontre que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement inférieur à la limite trouvée à la question précédente.

(d) Lina affirme : « Si une suite convergente vérifie $u_n < M$ pour tout n, alors sa limite est strictement inférieure à M. » Ta suite confirme-t-elle cette affirmation ? Justifie.

(e) Détermine le plus petit entier N tel que $u_n \geqslant 3$ pour tout entier $n \geqslant N$. Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Bornée, minorée, encadrée : bien choisir son théorème** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $b_n = n^2 - 5n\cos n$.

(a) Démontre que $b_n \geqslant n^2 - 5n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, puis déduis-en la limite de (b_n).

(b) Détermine la limite de la suite $\left(\frac{b_n}{n^2}\right)$. Justifie.

(c) Démontre que $b_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant 6$.

(d) Pour tout entier $n \geqslant 6$, on pose $f_n = \frac{3-\cos n}{b_n}$. Encadre f_n en justifiant le sens des inégalités, puis détermine sa limite.

4. *Limite de q^n et somme des termes d'une suite géométrique*

À retenir : $q^n \to +\infty$ si $q > 1$; $q^n \to 0$ si $-1 < q < 1$; $1^n = 1$; pas de limite si $q \leqslant -1$. $1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, de limite $\frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$. Plusieurs puissances : je factorise par la plus grande base.

Ex. 22 ★☆☆ **Lire la limite de q^n** — Pour chaque suite définie pour tout entier naturel n, détermine sa limite si elle existe. Justifie en citant la valeur de q.

(a) $a_n = 0{,}99^n$

(b) $b_n = (-0{,}5)^n$

(c) $c_n = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)^n$

(d) $d_n = -2 \times 1{,}3^n$

(e) $e_n = (-2)^n$

(f) $f_n = (-1)^n$

(g) $g_n = -\frac{3}{0{,}8^n}$

Ex. 23 ★★☆ **Sommes géométriques et leurs limites** — Pour chaque somme, écris-la en fonction de n avec la formule de la somme géométrique, puis déduis-en sa limite.

(a) $A_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$

(b) $B_n = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

(c) $C_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(d) $D_n = 0{,}7 + 0{,}7^2 + \cdots + 0{,}7^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$

(e) $E_n = 2 + 2 \times 0{,}9 + 2 \times 0{,}9^2 + \cdots + 2 \times 0{,}9^n$

Ex. 24 ★★☆ **Plusieurs puissances : corriger puis factoriser** — Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 3 \times 2^n - 5^n$. Léna écrit : « $2^n \to +\infty$ et $5^n \to +\infty$, donc les deux termes se compensent et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. »

(a) Explique pourquoi le raisonnement de Léna n'est pas valable.

(b) Factorise u_n par 5^n, puis déduis-en la limite de (u_n).

(c) Détermine la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 3\times 4^n}$.

(d) Malo affirme : « $\frac{(-5)^n}{4^n}$ tend vers $-\infty$ car $-5 < -4$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Démontrer que q^n tend vers $+\infty$ (Bernoulli)** — Soit q un réel tel que $q > 1$; on pose $a = q - 1$. On admet l'inégalité de Bernoulli : pour tout entier naturel n, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

(a) Justifie que $a > 0$, puis détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + na)$.

(b) Démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ en citant le théorème utilisé.

(c) On prend $q = 1{,}02$. À l'aide de l'inégalité, détermine un entier N tel que $1{,}02^n \geqslant 10$ pour tout $n \geqslant N$.

(d) Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. En appliquant la question 2 à $q = \frac{1}{r}$, démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$.

Ex. 26 ★★★ **Vrai ou faux sur les puissances et les sommes** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie : démonstration si elle est vraie, contre-exemple ou calcul si elle est fausse.

(a) « La suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est géométrique de raison $1 + \frac{1}{n} > 1$, donc elle tend vers $+\infty$. »

Ex. 26 **(suite)**

(b) « Pour tout réel $q > 0$, la suite (q^n) est monotone. »

(c) « Si la suite (q^n) converge, alors sa limite est 0. »

(d) « Pour tout réel q tel que $-1 < q < 1$, la suite définie par $S_n = 1 + q + \cdots + q^n$ est croissante. »

(e) « Pour tout réel q tel que $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(q + q^2 + \cdots + q^n\right) = \frac{1}{1-q}$. »

Ex. 27 ★★★ **La balle qui rebondit** — Inès lâche une balle de 3 m de haut. À chaque rebond, elle remonte à 60 % de sa hauteur précédente. On note $h_0 = 3$ et h_n la hauteur (en m) après le n-ième rebond. Quand la balle touche le sol pour la $(n+1)$-ième fois, elle a parcouru $D_n = h_0 + 2\left(h_1 + \cdots + h_n\right)$ mètres.

(a) Justifie que la suite (h_n) est géométrique. Exprime h_n en fonction de n, puis détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n$.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$. Exprime S_n en fonction de n.

(c) Déduis-en une expression de D_n en fonction de n, puis la limite de la suite (D_n).

(d) Ben affirme : « Si on attend assez longtemps, la balle parcourt une distance aussi grande qu'on veut. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Complète la ligne 4 de ce programme pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $D_n \geqslant 11{,}9$, puis donne la valeur affichée.

```
h = 3
D = 3
n = 0
while ..........:
    n = n + 1
    h = 0.6 * h
    D = D + 2 * h
print(n)
```

Ex. 28 ★★★ **D'après le bac : sommes de puissances de 2 et de 4** — Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ et $T_n = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n$.

(a) Exprime S_n et T_n en fonction de n.

(b) Détermine la limite de la suite $(S_n - T_n)$.

(c) Détermine la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{T_n}\right)$, puis celle de la suite $\left(\frac{S_n^2}{T_n}\right)$.

(d) Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose $R_n = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Exprime R_n en fonction de n, puis déduis-en la limite de (R_n).

5. *Suites monotones bornées, convergence et seuil*

À retenir : Croissante et majorée (ou décroissante et minorée) ⇒ converge, mais la limite n'est pas forcément la borne : $3 - \frac{2}{n+1} \leqslant 5$ tend vers 3. Croissante non majorée ⇒ $+\infty$. Seuil : le while teste la négation.

Ex. 29 ★☆☆ **Sens de variation par la différence** — Pour chaque suite définie pour tout entier naturel n, étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs et déduis-en son sens de variation.

(a) $a_n = n^2 + 4n - 1$

(b) $b_n = \dfrac{9}{n+2}$

(c) $c_n = \dfrac{2n+1}{n+4}$

(d) $d_n = 7 \times 0{,}6^n + 2$

(e) $e_0 = 3$ et $e_{n+1} = e_n - n^2 - 1$

(f) $h_n = n - \sqrt{n}$
(utilise la quantité conjuguée pour $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$)

Ex. 30 ★☆☆ **Que permet de conclure le théorème ?** — Chaque suite est définie pour tout entier naturel n. Réponds en citant le théorème ou le résultat utilisé.

(a) $u_n = 2 - 3 \times 0{,}4^n$ est croissante. Justifie que $u_n \leqslant 4$, conclus, puis calcule sa limite : vaut-elle 4 ?

(b) $w_n = 4 - \frac{6}{n+2}$ est croissante. Lou affirme qu'elle tend vers $+\infty$. A-t-elle raison ? Justifie.

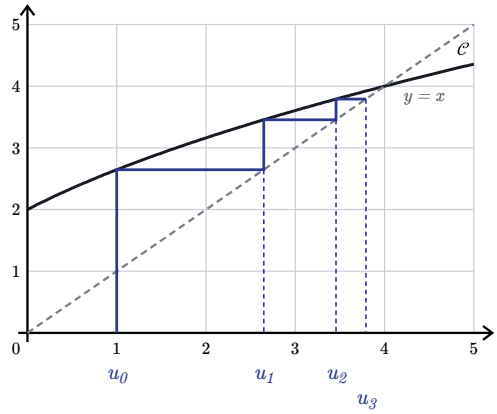
(c) $t_n = 2 + \frac{3}{n+1}$ est décroissante et positive. Justifie qu'elle converge, puis calcule sa limite : vaut-elle 0 ?

(d) $s_n = 3 + (-1)^n$ vérifie $2 \leqslant s_n \leqslant 4$. Converge-t-elle ? Justifie.

(e) (r_n) est croissante et, pour tout réel A, il existe un rang N tel que $r_N > A$. Déduis-en sa limite.

(f) (p_n) est décroissante et $p_n \geqslant -2$ pour tout n. Que peux-tu affirmer sur sa limite ?

Ex. 31 ★★☆ **Escalier, convergence et faux majorant** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x+4}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.



(a) Lis des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 sur le graphique. Conjecture le sens de variation de (u_n).

(b) On admet que, pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 5$. Démontre que (u_n) converge.

(c) Hugo affirme : « la suite est majorée par 5, donc sa limite vaut 5 ». Avec la continuité de f, détermine la limite ℓ et conclus.

(d) Vrai ou faux ? « Toute suite décroissante et majorée par 5 converge. » Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Le programme de seuil d'Élise** — On définit (w_n) par $w_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1}=w_n+2n+3$. Élise veut le premier rang n tel que $w_n>A$:

```
def seuil(A):
    n = 0
    w = 1
    while w > A:
        w = w + 2*n + 3
        n = n + 1
    return n + 1
```

(a) Démontre que (w_n) est croissante, puis que $w_n\geqslant 1+3n$ pour tout entier naturel n.

(b) Déduis-en la limite de (w_n), puis justifie que, pour tout réel A, un tel rang existe.

(c) Que renvoie `seuil(500)` tel qu'il est écrit ? Repère ses deux erreurs et corrige-les.

(d) À la calculatrice, détermine ce que renvoie le programme corrigé pour $A=500$.

(e) Ben applique le programme corrigé à la suite croissante $v_n=7-\frac{5}{n+2}$, avec $A=8$. Que se passe-t-il ? Justifie.

Ex. 33 ★★★ **Une suite homographique et deux seuils** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{4x+3}{x+2}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

(a) Étudie les variations de f sur $[0\,;+\infty[$, puis démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

(b) Déduis-en que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis justifie que $\frac{3}{2}\leqslant\ell\leqslant\frac{19}{6}$.

(c) En utilisant la continuité de f, détermine la valeur de ℓ.

(d) Justifie qu'il existe un rang à partir duquel $u_n>2{,}99$, puis détermine le plus petit de ces rangs en calculant les termes.

(e) Noé cherche le premier rang tel que $u_n>3{,}2$ avec une boucle `while u <= 3.2`. Que se passe-t-il ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Deux sommes croissantes, deux destins** — Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\frac{1}{2^0+1}+\frac{1}{2^1+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $T_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(a) Démontre que la suite (S_n) est croissante.

(b) En comparant $\frac{1}{2^k+1}$ et $\frac{1}{2^k}$ pour $k\geqslant 1$, démontre que pour tout entier naturel n, $S_n\leqslant\frac{3}{2}$.

(c) Zoé affirme : « (S_n) est croissante, donc elle tend vers $+\infty$. » A-t-elle raison ? Justifie, puis encadre la limite éventuelle.

(d) On pose $w_n=2-S_n$. Démontre que (w_n) est décroissante et minorée par 0. Sa limite vaut-elle 0 ? Justifie.

(e) Sami pense que (T_n), croissante elle aussi, converge. Démontre que $T_n\geqslant\sqrt{n}$ pour tout $n\geqslant 1$, puis conclus.

Ex. 35 ★★★ **Par l'absurde, puis le programme de Maël** — Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$. Maël veut le premier rang n tel que $u_n>A$ et écrit :

```
def seuil(A):
    n = 1
    u = 1
    while u > A:
        u = u + 1/u
        n = n + 1
    return n
```

(a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 1$, puis démontre que (u_n) est croissante.

(b) Raisonne par l'absurde : si (u_n) était majorée, que vérifierait sa limite ? Déduis-en $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

(c) Démontre que $u_{n+1}^2\geqslant u_n^2+2$, puis que $u_n^2\geqslant 2n+1$ pour tout entier naturel n. Déduis-en un rang à partir duquel $u_n>10$.

(d) Que renvoie `seuil(10)` avec le programme de Maël ? Corrige ses erreurs.

Ex. 35 **(suite)**

(e) Justifie que le programme corrigé s'arrête pour tout réel A, puis donne la valeur renvoyée par `seuil(10)`.

6. *Suites arithmético-géométriques : suite auxiliaire*

À retenir : $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a \neq 1$: $\ell = \frac{b}{1-a}$; $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a et $u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$. Ex. : $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1$ donne $\ell = 2$. Piège : $u_n \neq u_0\,a^n + b$.

Ex. 36 ★☆☆ **Trouver le point fixe** — Pour chaque relation, valable pour tout entier naturel n, détermine le réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.

(a) $u_{n+1} = 0{,}75\,u_n + 5$.

(b) $u_{n+1} = 3\,u_n - 14$.

(c) $u_{n+1} = -0{,}5\,u_n + 9$.

(d) $u_{n+1} = \frac{2}{3}\,u_n - 4$.

(e) Vérifie que $\ell = 16$ convient pour la relation $u_{n+1} = 0{,}25\,u_n + 12$.

(f) Explique pourquoi la relation $u_{n+1} = u_n + 7$ n'admet aucun réel ℓ de ce type.

Ex. 37 ★☆☆ **Formule explicite et limite** — Pour chaque suite, définie pour tout entier naturel n : détermine ℓ, exprime u_n en fonction de n, puis donne la limite de (u_n) si elle existe.

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 4$.

(b) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 3$.

(c) $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = -0{,}8\,u_n + 9$.

(d) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4\,u_n - 6$.

(e) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = -2\,u_n + 9$.

(f) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -3\,u_n + 4$.

Ex. 38 ★★☆ **La suite auxiliaire de Malik** — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 90$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 16$.

(a) Calcule u_1 et u_2.

(b) Malik pose $v_n = u_n + 40$. Calcule v_0, v_1, v_2 et justifie que (v_n) n'est pas géométrique.

(c) On pose $w_n = u_n - 40$. Démontre que (w_n) est géométrique ; précise sa raison et w_0.

(d) Malik écrit ensuite $u_n = 90 \times 0{,}6^n + 40$. A-t-il raison ? Justifie avec $n = 1$, puis corrige.

(e) Déduis-en la limite de la suite (u_n).

Ex. 39 ★★☆ **Les abonnés de la newsletter de Nadia** — Le 1er janvier 2026, la newsletter de Nadia compte 1 000 abonnés. Chaque mois, 15 % des abonnés se désinscrivent, puis 240 nouveaux s'inscrivent. On note u_n le nombre d'abonnés n mois plus tard, donc $u_0 = 1\,000$.

(a) Calcule u_1 et u_2, puis exprime u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

(b) Inès affirme : « On ajoute 240 abonnés chaque mois, donc (u_n) est arithmétique de raison 240. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Détermine le réel ℓ qui vérifie la relation obtenue quand on remplace u_n et u_{n+1} par ℓ. Démontre ensuite que la suite définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

(d) Exprime u_n en fonction de n, déduis-en la limite de (u_n) et interprète-la.

(e) Complète ce programme pour qu'il affiche le nombre de mois au bout duquel la newsletter atteint au moins 1 400 abonnés, et donne ce nombre.

```
u = 1000
n = 0
while ...:
    u = ...
    n = n + 1
print(n)
```

Ex. 40 ★★★ **Les truites de l'étang de Saint-Clair** — Au 1er mars 2026, l'étang de Saint-Clair compte 2 000 truites. Chaque année, 20 % des truites disparaissent, puis l'association de pêche en relâche 300. On note u_n le nombre de truites au 1er mars de l'année $2026 + n$: $u_0 = 2\,000$. On accepte des valeurs non entières.

(a) Justifie que $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 300$ pour tout entier naturel n. Théo écrit $u_n = 0{,}8^n \times 2\,000 + 300$: teste sa formule pour $n = 2$, puis conclus.

(b) Détermine le réel ℓ tel que $\ell = 0{,}8\,\ell + 300$. On pose $v_n = u_n - \ell$: démontre que (v_n) est géométrique et précise sa raison.

(c) Calcule v_0, puis exprime u_n en fonction de n. Déduis-en $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et interprète ce résultat.

(d) Complète la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie le premier rang n tel que $u_n < 1\,550$. Donne ce rang et l'année correspondante.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 2000
    while ..... :
        n = n + 1
        u = .....
    return n
```

Ex. 41 ★★★ **Le bon décalage de Hugo et Léna** — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 52$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}25\,u_n - 15$.

(a) Calcule u_1 et u_2. Hugo affirme que la suite définie par $v_n = u_n - 40$ est géométrique. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 41 **(suite)**

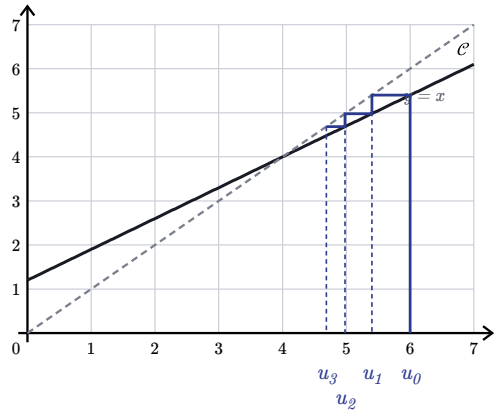
(b) Détermine le réel ℓ tel que $\ell = 1{,}25\,\ell - 15$, puis démontre que la suite définie par $t_n = u_n - \ell$ est géométrique.

(c) Léna écrit $t_0 = u_0 + \ell$. Corrige son erreur, puis exprime u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

(d) Détermine la limite de la suite (u_n). Justifie.

(e) Vrai ou faux : « Avec la même relation, la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quelle que soit la valeur de u_0. » Justifie.

Ex. 42 ★★★ **La perfusion de Sofia** — À l'instant 0, Sofia a 6 mg d'un médicament dans le sang. Chaque heure, son organisme élimine 30 % de la quantité présente, puis une perfusion en apporte 1,2 mg. On note u_n la quantité (en mg) après n heures : $u_0 = 6$. On a tracé la courbe de $f : x \mapsto 0{,}7x + 1{,}2$ et la droite $y = x$.



(a) Justifie que $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 1{,}2$ pour tout entier naturel n. Explique pourquoi la relation $u_{n+1} = 0{,}7\,(u_n + 1{,}2)$ ne convient pas.

(b) À l'aide de la figure, conjecture le sens de variation de (u_n) et sa limite éventuelle.

(c) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Déduis-en que la suite (u_n) converge.

(d) On note ℓ la limite de (u_n). En utilisant la fonction f, détermine ℓ. Justifie.

(e) Le médecin veut que la quantité se stabilise vers 5 mg. On garde $u_0 = 6$ et l'élimination de 30 %, avec un apport de p mg par heure. Détermine p.

7. *Suites $u_{n+1} = f(u_n)$: limite et point fixe*

À retenir : Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$. On prouve d'abord la convergence, puis on garde la solution située dans l'intervalle des termes. f croissante ne rend pas (u_n) croissante.

Ex. 43 ★☆☆ **Choisir la limite parmi les points fixes** — Dans chaque cas, la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est continue là où se trouvent les termes. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. Détermine ℓ.

(a) $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 2$.

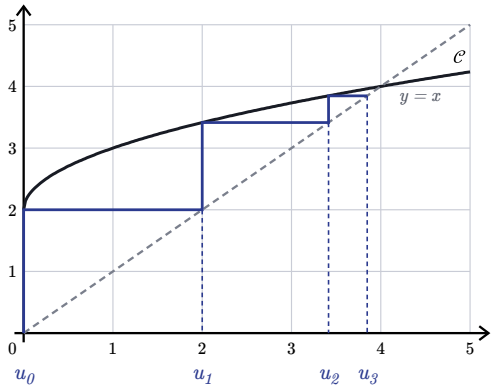
(b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{4} + \dfrac{3}{4}$. On admet que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n.

(c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$. On admet que $u_n > 0$ pour tout n.

(d) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. On admet que $u_n > 0$ pour tout n.

(e) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3}{9}$. On admet que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n.

Ex. 44 ★☆☆ **Lire un escalier, puis calculer** — On pose $f(x) = \sqrt{x} + 2$, $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. La figure montre la courbe $\mathcal{C}$ de f, la droite d'équation $y = x$ et l'escalier qui va de u_0 à u_3.



(a) Calcule les valeurs exactes de u_1 et de u_2.

(b) Les termes u_1, u_2, u_3 se lisent-ils sur la courbe ou sur l'axe des abscisses ? Lis une valeur approchée de u_3, puis contrôle-la par le calcul.

(c) Conjecture le sens de variation de (u_n) et sa limite.

(d) Résous l'équation $f(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$.

(e) Élise affirme : « $f(4) = 4$, donc (u_n) converge vers 4. » Son raisonnement est-il valable ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Vrai ou faux sur les suites récurrentes** — Dans tout l'exercice, (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie par une démonstration ou un contre-exemple.

(a) « Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors la suite (u_n) est croissante. »

(b) « Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si (u_n) converge, alors (u_n) est monotone. »

(c) « Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et si $u_1 \geqslant u_0$, alors (u_n) est croissante. »

Ex. 45 **(suite)**

(d) f est définie sur $[0\,;1]$ par $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{x}{2}$ si $x>0$, et $u_0=1$. « (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $f(\ell)=\ell$. »

Ex. 46 ★★☆ **Méthode complète et seuil** — On pose $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$. On note $f(x)=\sqrt{3x+4}$ sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$. On admet que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 5$.

(a) Calcule u_1 et u_2.

(b) Justifie que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis donne un encadrement de ℓ.

(c) Justifie que $\ell=\sqrt{3\ell+4}$.

(d) Mia élève au carré, trouve $\ell=4$ ou $\ell=-1$ et conclut : « deux limites possibles ». Corrige-la et conclus.

(e) Remplace les pointillés pour que le programme affiche le plus petit n tel que $4-u_n$ soit strictement inférieur à 0,01, puis donne la valeur affichée.

```
from math import sqrt
u = 0
n = 0
while ... :
    u = sqrt(3*u + 4)
    n = n + 1
print(n)
```

Ex. 47 ★★★ **Suite décroissante : trois erreurs à corriger** — On considère la suite (u_n) définie par $u_0=10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$. On note f la fonction définie sur $[-6\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+6}$. Elle est croissante sur cet intervalle.

(a) Calcule u_1. Tom affirme : « f est croissante, donc (u_n) est croissante. » A-t-il raison ? Justifie.

(b) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 10$.

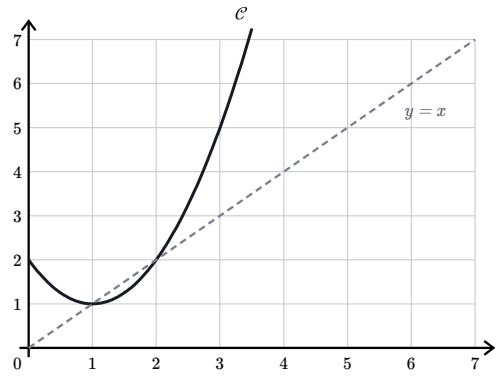
(c) Déduis-en que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis justifie que $\ell=\sqrt{\ell+6}$.

(d) Lina écrit : « $\ell^2=\ell+6$ donne $\ell=-2$ ou $\ell=3$; la suite décroît, donc $\ell=-2$. » Repère son erreur, puis détermine ℓ.

(e) Hugo veut afficher le plus petit entier n tel que $u_n-\ell\leqslant 10^{-3}$. Son programme affiche 0. Explique pourquoi, corrige ses deux erreurs, puis donne la valeur affichée.

```
from math import sqrt
L = -2
u = 10
n = 0
while u - L < 0.001:
    u = sqrt(u + 6)
    n = n + 1
print(n)
```

Ex. 48 ★★★ **Deux points fixes, deux destins** — On pose $f(x)=x^2-2x+2$ pour tout réel x, puis $u_0=\frac{3}{2}$, $v_0=\frac{5}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ et $v_{n+1}=f(v_n)$. La figure montre la courbe $\mathcal{C}$ de f et la droite d'équation $y=x$.



(a) Vérifie que $f(x)=(x-1)^2+1$, déduis-en le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$, puis résous l'équation $f(x)=x$.

(b) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 2$.

(c) Déduis-en que (u_n) converge, puis détermine sa limite en justifiant ton choix parmi les solutions trouvées à la question 1.

(d) Sur la figure, construis v_1 et v_2 sur l'axe des abscisses, puis conjecture le comportement de (v_n).

(e) Inès affirme : « f a des points fixes, donc (v_n) converge. » A-t-elle raison ? Justifie en démontrant ta conjecture.

Ex. 49 ★★★ **Les truites d'un lac** — Dans un lac, on modélise le nombre de truites, en milliers, l'année $2026+n$ par u_n, avec $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{8u_n}{u_n+3}$. On note f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{8x}{x+3}$.

(a) Vérifie que $f(x)=8-\frac{24}{x+3}$, déduis-en le sens de variation de f, puis démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 6$.

(b) Déduis-en que (u_n) converge, détermine sa limite ℓ et interprète-la dans le contexte.

(c) On pose, pour tout entier naturel n, $w_n=\frac{1}{u_n}$ et $t_n=w_n-\frac{1}{\ell}$. Démontre que (t_n) est géométrique, puis précise sa raison et t_0.

(d) Déduis-en l'expression de u_n en fonction de n, puis retrouve la limite de (u_n) sans utiliser le théorème du point fixe.

(e) À l'aide de la calculatrice, détermine à partir de quelle année le lac compte plus de 4 900 truites.