1. Rappels de 1re : suites arithmétiques et géométriques

Ex. 1 ★☆☆ **Suite arithmétique : terme général et sommes**

(a) $u_1 = u_0 + r$, donc $u_0 = u_1 - r = 7 - 3 = 4$.

(b) Avec sa formule, $u_1 = 7 + 3 = 10 \neq 7$: faux. Comme on part de u_1, il y a $n-1$ pas : $u_n = u_1 + (n-1)r = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$. On retrouve bien $u_0 + nr = 4 + 3n$.

(c) $u_{25} = 3 \times 25 + 4 = 79$.

(d) De u_0 à u_{25}, il y a $25 + 1 = 26$ termes. Somme $= 26 \times \frac{u_0 + u_{25}}{2} = 26 \times \frac{4 + 79}{2} = 1\,079$.

(e) $1 + 2 + \cdots + 40 = \frac{40 \times 41}{2} = 820$.

(f) $\sum_{k=0}^{40}(3k+4) = 3 \times (1 + 2 + \cdots + 40) + 4 \times 41 = 3 \times 820 + 164 = 2\,624$
(il y a 41 termes, donc 41 fois le 4).

Ex. 2 ★☆☆ **Suite géométrique : terme général, raison, somme**

(a) $v_4 = 5 \times (-3)^4 = 5 \times 81 = 405$.

(b) $(-15)^2 = 225$ mais $v_2 = 5 \times (-3)^2 = 45$. Seule la raison est élevée à la puissance n : $v_n = 5 \times (-3)^n$.

(c) $w_4 = w_2 \times q^2$, donc $q^2 = \frac{48}{12} = 4$, d'où $q = 2$ ou $q = -2$. Comme $q > 0$, $q = 2$. Puis $w_0 = \frac{w_2}{q^2} = \frac{12}{4} = 3$.

(d) Augmenter de 2,5 % revient à multiplier par $1 + \frac{2.5}{100} = 1{,}025$. Après 3 ans : $250 \times 1{,}025^3 \approx 269{,}2227$, soit environ 269,22 €.

(e) Les exposants vont de 0 à 9 : 10 termes. Somme $= 7 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 7 \times 1\,023 = 7\,161$.

Ex. 3 ★★☆ **Vrai ou faux sur les suites de référence**

(a) Faux. De u_3 à u_{20}, il y a $20 - 3 + 1 = 18$ termes, pas 17.
$u_{20} = u_3 + (20 - 3) \times 5 = 87$.
Donc la somme vaut $18 \times \frac{2 + 87}{2} = 801$, et non $17 \times \frac{89}{2} = 756{,}5$.

(b) Faux. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, mais $a_3 = \frac{9 + 3 + 2}{2} = 7 \neq 2 \times 4$. Deux quotients égaux ne suffisent pas : il faut $a_{n+1} = q \times a_n$ pour tout n. La suite n'est pas géométrique.

(c) Vrai. Pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3^{n+3}} = \frac{4}{3} \times \frac{4^n}{3^{n+2}} = \frac{4}{3}\,b_n$.
Donc (b_n) est géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $b_0 = \frac{1}{9}$.

Ex. 3 (suite)

(d) Faux. Contre-exemple : $c_n = -2 \times 0{,}8^n$. Pour tout n, $c_{n+1} - c_n = -2 \times 0{,}8^n \times (0{,}8 - 1) = 0{,}4 \times 0{,}8^n > 0$. Donc (c_n) est croissante : le sens dépend aussi du signe du premier terme.

Ex. 4 ★★☆ **Deux contrats de subvention à Nantes**

(a) (a_n) est arithmétique de raison 150 et part de a_1 : $a_n = 2\,000 + 150(n-1) = 150n + 1\,850$. Augmenter de 6 % revient à multiplier par 1,06 : (b_n) est géométrique de raison 1,06, donc $b_n = 2\,000 \times 1{,}06^{n-1}$.

(b) $a_{10} = 150 \times 10 + 1\,850 = 3\,350$ €. $b_{10} = 2\,000 \times 1{,}06^9 \approx 3\,379$ €.

(c) De a_1 à a_{10} : 10 termes. Total A $= 10 \times \frac{2\,000 + 3\,350}{2} = 26\,750$ €. Total B $= 2\,000 \times \frac{1 - 1{,}06^{10}}{1 - 1{,}06} \approx 26\,362$ €.

(d) Même si $b_{10} > a_{10}$, le total A (26 750 €) dépasse le total B (26 362 €). Sur 10 ans, l'association doit choisir le contrat A.

Ex. 5 ★★★ **Retrouver une suite géométrique à partir de deux termes**

(a) L'écart des indices est $7 - 3 = 4$, donc $w_7 = w_3 \times q^4$ et $q^4 = \frac{5/2}{40} = \frac{1}{16}$. Comme $q^2 \geqslant 0$, on a $q^2 = \frac{1}{4}$, donc $q = \frac{1}{2}$ ou $q = -\frac{1}{2}$. Or $w_4 = w_3 \times q = 40q < 0$, donc $q < 0$. Conclusion : $q = -\frac{1}{2}$.

(b) $w_3 = w_0 \times q^3$, donc $w_0 = \frac{40}{(-1/2)^3} = \frac{40}{-1/8} = -320$. Seule la raison est élevée à la puissance n : pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times q^n = -320 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) $w_1 = -320 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 160$ et $w_2 = 160 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -80$. On a $w_0 < w_1$ mais $w_1 > w_2$: la suite n'est ni croissante ni décroissante. Comme $q < 0$, les termes changent de signe à chaque rang. Conclusion : (w_n) n'est pas monotone.

(d) De w_0 à w_9, il y a 10 termes. Le premier terme vaut -320, donc $S = -320 \times \frac{1 - (-1/2)^{10}}{1 - (-1/2)} = -320 \times \frac{1023}{1024} \times \frac{2}{3} = -\frac{1705}{8} = -213{,}125$.

(e) S_n compte $n + 1$ termes, donc $S_n = -320 \times \frac{1 - (-1/2)^{n+1}}{3/2} = -\frac{640}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Par produit et somme de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\frac{640}{3}$.

Ex. 6 ★★★ **Une suite ni arithmétique ni géométrique, décomposée**

(a) $t_0 = 0+1 = 1$, $t_1 = 2+3 = 5$, $t_2 = 4+9 = 13$, $t_3 = 6+27 = 33$. On a $t_1 - t_0 = 4$ et $t_2 - t_1 = 8$. Ces différences ne sont pas égales, donc (t_n) n'est pas arithmétique. On a $\frac{t_1}{t_0} = 5$ et $\frac{t_2}{t_1} = \frac{13}{5}$. Ces quotients ne sont pas égaux, donc (t_n) n'est pas géométrique.

(b) Pour tout entier naturel n : $d_n = 2(n+1) + 3^{n+1} - 2n - 3^n = 2 + 3^n(3-1) = 2 + 2\times 3^n$. On en déduit $e_n = 2\times 3^n$.

(c) Un quotient de deux termes ne vérifie la relation qu'aux rangs 0 et 1. Il faut l'établir pour tout n. Pour tout entier naturel n : $e_{n+1} = 2\times 3^{n+1} = 3\times(2\times 3^n) = 3\,e_n$. Conclusion : (e_n) est géométrique, de raison 3 et de premier terme $e_0 = 2$.

(d) La somme S_n compte $n+1$ termes. $S_n = 2(0+1+\cdots+n) + (1+3+\cdots+3^n)$, donc $S_n = 2\times\frac{n(n+1)}{2} + 1\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}$. Ainsi $S_n = n(n+1) + \frac{3^{n+1}-1}{2}$. Pour $n=10$: $S_{10} = 110 + \frac{177\,147-1}{2} = 110 + 88\,573 = 88\,683$.

(e) Comme $3>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$. Tous les termes t_k sont positifs, donc $S_n \geqslant t_n$ pour tout n. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Ex. 7 ★★★ **Ventes et capacité d'une coopérative bordelaise**

(a) Augmenter de 4 % revient à multiplier par $1+\frac{4}{100} = 1{,}04$. Pour tout entier $n\geqslant 1$: $v_{n+1} = v_n + 0{,}04\,v_n = 1{,}04\,v_n$.
Donc (v_n) est géométrique, de raison 1,04 et de premier terme $v_1 = 800$. Comme le premier terme est v_1, l'exposant est $n-1$: $v_n = 800\times 1{,}04^{\,n-1}$.

(b) (c_n) est arithmétique de raison 20 et de premier terme $c_1 = 1\,000$. On ajoute donc 20 seulement $n-1$ fois. Pour tout entier $n\geqslant 1$: $c_n = 1\,000 + 20(n-1) = 980 + 20n$. Vérification : $c_1 = 980+20 = 1\,000$.

(c) De v_1 à v_{12}, il y a 12 termes. Le premier vaut 800, donc la somme vaut $800\times\frac{1-1{,}04^{12}}{1-1{,}04} = 20\,000\,(1{,}04^{12}-1) \approx 12\,020{,}64$. La coopérative vend environ 12 021 litres sur les 12 premiers mois.

(d) La ligne fausse est `v = v * 0.04`. Avec elle, v diminue et la boucle ne s'arrête jamais. Il faut écrire `v = v * 1.04`. Le programme corrigé affiche 12. En effet, $v_{11} \approx 1\,184{,}2 \leqslant c_{11} = 1\,200$, alors que $v_{12} \approx 1\,231{,}6 > c_{12} = 1\,220$. Conclusion : au mois 12, les ventes dépassent la capacité de production pour la première fois.

2. *Limites : opérations et formes indéterminées*

Ex. 8 ★★☆ **Opérations sur les limites**

(a) $\sqrt{n}\to+\infty$, donc $\frac{7}{\sqrt{n}}\to 0$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

(b) $2-n^2\to-\infty$ et $-3+\frac{1}{n}\to -3<0$. Par produit (règle des signes : $-\infty\times(-3)$), $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(c) Le numérateur vaut $-6<0$. Le dénominateur tend vers 0 et il est strictement positif. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

(d) $-1<0{,}6<1$, donc $0{,}6^n\to 0$. Par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 3$.

(e) $\sqrt{n}+2\to+\infty$ et $5-\frac{1}{n}\to 5>0$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$.

Ex. 9 ★★☆ **Lever une forme indéterminée**

(a) Forme « $-\infty+\infty$ ». $a_n = n^3\left(-2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$. $n^3\to+\infty$ et la parenthèse tend vers -2. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(b) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » : le numérateur tend vers $+\infty$, le dénominateur vers $-\infty$. On factorise par n^2 en haut et en bas : $b_n = \frac{5+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2}-4}$. Le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers -4. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\frac{5}{4}$.

(c) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». $c_n = \frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{4+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}$. Le numérateur tend vers 4, le dénominateur vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

(d) Forme « $\infty-\infty$ ». Avec la quantité conjuguée, $d_n = \frac{(n^2+6n)-n^2}{\sqrt{n^2+6n}+n} = \frac{6n}{n\left(\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1\right)} = \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}$. Le dénominateur tend vers 2. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 3$.

(e) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » (et « $\infty-\infty$ » au numérateur). On factorise par 4^n en haut et en bas : $e_n = \frac{0{,}75^n-1}{1+0{,}25^n}$. Comme $0<0{,}75<1$ et $0<0{,}25<1$, $0{,}75^n\to 0$ et $0{,}25^n\to 0$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = -1$.

(f) Forme « $\frac{0}{0}$ ». On multiplie le numérateur et le dénominateur par n : $f_n = \frac{1+\frac{3}{n}}{2}$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \frac{1}{2}$.

Ex. 10 ★★☆ **Les raisonnements d'Inès**

(a) La conclusion est juste, mais le raisonnement est faux : « $\frac{\infty}{\infty}$ » est une forme indéterminée, ce n'est pas 1. Le bon raisonnement : $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}\to 0$, donc par somme la limite vaut 1.

Ex. 10 **(suite)**

(b) Elle a tort : « $\infty - \infty$ » est indéterminée. Pour $n \geqslant 1$, $n - 3\sqrt{n} = n\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)$. Or $n \to +\infty$ et la parenthèse tend vers 1. Par produit, la limite vaut $+\infty$.

(c) Elle a tort : $4n - 1 \to +\infty$, donc on a une forme « $\infty \times 0$ », qui est indéterminée. En développant, $(4n-1) \times \frac{1}{n} = 4 - \frac{1}{n}$. Par somme, la limite vaut 4, et non 0.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux sur les opérations**

(a) Vrai. Le numérateur tend vers $3 > 0$. Le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif. Par quotient (règle des signes), $\frac{u_n}{v_n} \to +\infty$.

(b) Faux. Prenons $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$: $v_n \to 0$ car $|v_n| = \frac{1}{n}$. Mais $\frac{1}{v_n} = (-1)^n \times n$ vaut -1, 2, -3, 4… Une infinité de termes sont négatifs, donc elle ne tend pas vers $+\infty$. Une infinité de termes sont positifs, donc elle ne tend pas vers $-\infty$. Conclusion : $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ n'a pas de limite.

(c) Faux. La suite $w_n = 2 + (-1)^n$ vaut 3 si n est pair et 1 si n est impair. Elle ne converge pas, donc elle diverge. Pourtant elle ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$: elle n'a pas de limite.

(d) Faux : « $\frac{\infty}{\infty}$ » est une forme indéterminée. Par exemple, $u_n = 3n$ et $v_n = n$ tendent vers $+\infty$, mais $\frac{u_n}{v_n} = 3$ pour tout n. La limite vaut donc 3, et non 1.

Ex. 12 ★★★ **Racine, paramètre et signe**

(a) $n^2 + n \to +\infty$, donc $\sqrt{n^2+n} \to +\infty$. De plus, $n \to +\infty$: on obtient la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Comme $\sqrt{n^2+n} + n > 0$, on a $u_n = \frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$. C'est encore « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $n > 0$, $\sqrt{n^2+n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$, donc $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$. Or $1 + \frac{1}{n} \to 1$, donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$ et le dénominateur tend vers 2. Par quotient, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

(b) Pour $n \geqslant 1$, $\sqrt{n^2+n} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ car $n > 0$.
Donc $v_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - b\right)$. La parenthèse tend vers $1 - b$. Si $b < 1$, alors $1 - b > 0$ et $n \to +\infty$: par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Si $b > 1$, alors $1 - b < 0$: par produit (règle des signes), $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Si $b = 1$, on obtient « $+\infty \times 0$ », une forme indéterminée. Mais dans ce cas $v_n = u_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$. Conclusion : (v_n) converge seulement pour $b = 1$, et sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

Ex. 12 **(suite)**

(c) $(n + \frac{1}{2})^2 = n^2 + n + \frac{1}{4} > n^2 + n$. Les deux nombres sont positifs et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $\sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $u_n < \frac{1}{2}$.
Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n - \ell < 0$.

(d) D'après la question 3, $u_n - \ell \neq 0$, donc w_n est bien défini. Le numérateur tend vers $\frac{1}{2} > 0$. Le dénominateur $u_n - \frac{1}{2}$ tend vers 0 en restant strictement négatif (question 3) : il tend vers 0^-. Ce n'est pas une forme indéterminée, mais il faut le signe. Par quotient (règle des signes), $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

Ex. 13 ★★★ **Des puissances qui se disputent**

(a) $5 > 1$ et $2 > 1$, donc $5^n \to +\infty$ et $2^n \to +\infty$: on obtient la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $a_n = 5^n\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$. Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$, donc la parenthèse tend vers 1. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(b) Pour $n \geqslant 1$, $5^n > 2^n$, donc le dénominateur n'est pas nul. Le numérateur et le dénominateur (question 1) tendent vers $+\infty$: c'est la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On divise en haut et en bas par 5^n : $b_n = \frac{2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}$. Or $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$, donc le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 3$.

(c) $0 < 0{,}4 < 1$ et $0 < 0{,}5 < 1$, donc $0{,}4^n \to 0$ et $0{,}5^n \to 0$: on obtient la forme « $\frac{0}{0}$ » pour les deux suites. Or $c_n = \left(\frac{0{,}4}{0{,}5}\right)^n = 0{,}8^n$ et $0 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. De même, $d_n = 1{,}25^n$ et $1{,}25 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$. La même forme « $\frac{0}{0}$ » mène ici à deux résultats différents : c'est bien une forme indéterminée, pas un résultat.

(d) On divise par 5^n : $e_n = \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}$. Pour $n = 2p$ pair, $e_{2p} = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{2p}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2p}}$, qui tend vers 1. Pour $n = 2p+1$ impair, $e_{2p+1} = \frac{-1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{2p+1}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2p+1}}$, qui tend vers -1. Si (e_n) avait une limite (finie ou infinie), ses termes de rang pair et ceux de rang impair tendraient tous vers cette limite : on aurait $1 = -1$, ce qui est absurde. Conclusion : (e_n) diverge et n'a pas de limite.

Ex. 14 ★★★ **Un quotient sous la loupe**

(a) Le numérateur est de la forme « $+\infty - \infty$ ». Comme $3n^2 - n = n^2\left(3 - \frac{1}{n}\right)$, il tend vers $+\infty$. Le dénominateur tend aussi vers $+\infty$: on a la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ », qui n'est pas un résultat. On factorise par n^2 en haut et en bas : $u_n = \frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n^2}}$. Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 2. Par quotient, $\ell = \frac{3}{2}$.

(b) $v_n = \frac{3n^2-n}{2n^2+5} - \frac{3}{2} = \frac{2(3n^2-n)-3(2n^2+5)}{2(2n^2+5)} = \frac{-2n-15}{4n^2+10}$. Le numérateur est strictement négatif et le dénominateur strictement positif. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n < 0$.

(c) Par somme, $v_n \to \ell - \ell = 0$, et $n \to +\infty$: nv_n est de la forme « $+\infty \times 0$ », qui est indéterminée. On a $nv_n = \frac{-2n^2-15n}{4n^2+10} = -\frac{2+\frac{15}{n}}{4+\frac{10}{n^2}}$ après factorisation par n^2. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

(d) Par somme, $5 - n \to -\infty$ et $u_n - \frac{7}{2} \to \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2$. Il n'y a pas de forme indéterminée. Par produit (règle des signes), « $-\infty \times (-2)$ » donne $+\infty$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

3. *Comparaison et théorème des gendarmes*

Ex. 15 ★☆☆ **Limites infinies par comparaison**

(a) $(-1)^n \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant n^2 - 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) $\sin n \leqslant 1$, donc $u_n \leqslant -3n + 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n+1) = -\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(c) $\cos n \leqslant 1$, donc $-2\cos n \geqslant -2$ (on multiplie par $-2 < 0$, le sens change) et $u_n \geqslant \sqrt{n} - 2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-2) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) $\cos n \geqslant -1$, donc $4 + \cos n \geqslant 3$. En multipliant par $n \geqslant 0$, on obtient $u_n \geqslant 3n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(e) $(-1)^n \leqslant 1$, donc $3 \times (-1)^n \leqslant 3$ et $u_n \leqslant 8 - 2n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(8-2n) = -\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Ex. 16 ★★☆ **Encadrer puis appliquer les gendarmes**

(a) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $n + 2 > 0$, donc $-\frac{1}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+2}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) $n - 1 \leqslant n + \cos n \leqslant n + 1$ et $n > 0$, donc $1 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Les deux bornes tendent vers 1. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(c) Comme $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, on a $4 \leqslant 5 - \sin n \leqslant 6$. De plus, $n^2 + 4 > 0$, donc $\frac{4}{n^2+4} \leqslant u_n \leqslant \frac{6}{n^2+4}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(d) $-1 \leqslant -\cos n \leqslant 1$, donc $\frac{4n-1}{2n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{4n+1}{2n+1}$ (on divise par $2n + 1 > 0$). Or $\frac{4n+1}{2n+1} = \frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \to 2$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(e) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $\sqrt{n} > 0$, donc $7 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 7 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Les deux bornes tendent vers 7. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 7$.

Ex. 17 ★★☆ **Vrai ou faux sur les inégalités et les limites**

(a) Faux. Prenons $u_n = n^2$. Pour $n \geqslant 1$, on a $n^2 \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{n}$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: (u_n) diverge. Une minoration par une suite qui converge ne dit rien de la convergence.

(b) Vrai. Pour $n \geqslant 1$, $\frac{5n}{n+3} = \frac{5}{1+\frac{3}{n}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n}{n+3} = 5$. Les deux suites convergent et $u_n > \frac{5n}{n+3}$ pour tout n. Par passage à la limite, l'inégalité devient large : $\ell \geqslant 5$.

(c) Faux. Les bornes ont des limites différentes (0 et 1) : le théorème des gendarmes ne s'applique pas. Prenons $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$: $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair. On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant 1 \leqslant \frac{n+1}{n}$, mais (u_n) n'a pas de limite : elle diverge.

(d) Vrai. Les suites $\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ et $\left(2 + \frac{5}{n}\right)$ convergent toutes les deux vers 2, et l'encadrement est vrai à partir du rang 10. D'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 2.

Ex. 18 ★★☆ **Trois erreurs dans la copie de Maëlle**

(a) Pour $n \geqslant 2$, on a $1 - n < 0$: quand on divise par un nombre négatif, le sens des inégalités change. L'encadrement correct est $\frac{3}{1-n} \leqslant b_n \leqslant \frac{1}{1-n}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Ex. 18 **(suite)**

(b) Une suite bornée ne converge pas forcément : les bornes -1 et 1 sont différentes, donc on ne peut rien conclure. De plus, $(\cos n)$ n'a pas de limite, donc la règle du quotient ne s'applique pas. Correction : comme $n+3>0$, on a $-\frac{1}{n+3} \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{n+3}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

(c) Le théorème de comparaison exige une minoration $e_n \geqslant v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Une majoration par une suite qui tend vers $+\infty$ ne prouve rien. Ici, $e_n = 2n$ si n est pair et $e_n = 0$ si n est impair. Une infinité de termes valent 0, donc (e_n) ne tend pas vers $+\infty$. Les termes de rang pair, eux, ne restent pas proches d'un réel fixé. La suite (e_n) n'a donc pas de limite : elle diverge.

Ex. 19 ★★★ **Une somme de n termes prise en tenaille**

(a) $S_1 = \frac{2}{1+1} = 1$ et $S_2 = \frac{4}{5} + \frac{4}{6} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{22}{15}$.

(b) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $n^2+1 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+n$, et ces nombres sont strictement positifs. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$. On multiplie par $2n>0$, ce qui conserve le sens : $\frac{2n}{n^2+n} \leqslant \frac{2n}{n^2+k} \leqslant \frac{2n}{n^2+1}$.

(c) S_n est la somme de n termes, et chacun vérifie l'encadrement précédent. En additionnant ces n inégalités : $n \times \frac{2n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant n \times \frac{2n}{n^2+1}$, soit $\frac{2n}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \frac{2n^2}{n^2+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(d) On a $\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc cette suite tend vers 2. De même, $\frac{2n^2}{n^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}}$ tend vers 2. Les deux suites qui encadrent S_n ont la même limite 2. D'après le théorème des gendarmes, (S_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

Ex. 20 ★★★ **Une suite qui oscille : conjecturer puis démontrer**

(a) Les points semblent osciller : un terme sur deux se trouve plus haut que le suivant. Ils se resserrent pourtant autour de la valeur 4. On conjecture que (u_n) converge vers 4.

(b) Pour tout n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $-3 \leqslant 3\times(-1)^n \leqslant 3$. On ajoute $4n$: $4n-3 \leqslant 4n+3\times(-1)^n \leqslant 4n+3$. On divise par $n+1>0$, ce qui conserve le sens : $\frac{4n-3}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{4n+3}{n+1}$. Pour $n \geqslant 1$, $\frac{4n-3}{n+1} = \frac{4-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ tend vers 4. De même, $\frac{4n+3}{n+1}$ tend vers 4. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$, et la conjecture est démontrée.

Ex. 20 **(suite)**

(c) $4-u_n = \frac{4(n+1)-4n-3\times(-1)^n}{n+1} = \frac{4-3\times(-1)^n}{n+1}$. Comme $(-1)^n \leqslant 1$, on a $4-3\times(-1)^n \geqslant 1 > 0$. De plus, $n+1>0$.
Donc $4-u_n>0$, c'est-à-dire $u_n<4$ pour tout entier naturel n.

(d) Non. Ici, $u_n<4$ pour tout entier naturel n et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$: la limite n'est pas strictement inférieure à 4, donc l'affirmation de Lina est fausse. Par passage à la limite, une inégalité stricte devient seulement large : $u_n < M$ donne $\ell \leqslant M$.

(e) D'après la question c, $u_n \geqslant 3 \iff \frac{4-3\times(-1)^n}{n+1} \leqslant 1 \iff 4-3\times(-1)^n \leqslant n+1$. Si n est pair, on obtient $1 \leqslant n+1$: c'est toujours vrai. Si n est impair, on obtient $7 \leqslant n+1$, soit $n \geqslant 6$, donc $n \geqslant 7$. Ainsi, $u_n \geqslant 3$ pour tout $n \geqslant 6$. En revanche, $u_5 = \frac{17}{6} < 3$. Le plus petit entier qui convient est donc $N = 6$.

Ex. 21 ★★★ **Bornée, minorée, encadrée : bien choisir son théorème**

(a) On a $\cos n \leqslant 1$. On multiplie par $-5n<0$, ce qui change le sens : $-5n\cos n \geqslant -5n$. On ajoute n^2 : $b_n \geqslant n^2-5n = n(n-5)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-5) = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-5) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

(b) Pour $n \geqslant 1$, $\frac{b_n}{n^2} = 1 - \frac{5\cos n}{n}$. Comme $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ et $\frac{5}{n}>0$, on a $-\frac{5}{n} \leqslant \frac{5\cos n}{n} \leqslant \frac{5}{n}$, donc $1-\frac{5}{n} \leqslant \frac{b_n}{n^2} \leqslant 1+\frac{5}{n}$. Les deux bornes tendent vers 1. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n^2} = 1$. La seule minoration de la question a ne suffisait pas : il fallait aussi une majoration de même limite.

(c) D'après la question a, $b_n \geqslant n(n-5)$. Pour $n \geqslant 6$, on a $n>0$ et $n-5 \geqslant 1 > 0$, donc $n(n-5)>0$. Ainsi, $b_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant 6$.

(d) Pour tout n, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, donc $2 \leqslant 3-\cos n \leqslant 4$. Pour $n \geqslant 6$, $b_n>0$ (question c) : on divise sans changer le sens, et $\frac{2}{b_n} \leqslant f_n \leqslant \frac{4}{b_n}$. Cet encadrement est donc valable à partir du rang 6. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = 0$, donc les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$.

4. Limite de q^n et somme des termes d'une suite géométrique

Ex. 22 ★☆☆ **Lire la limite de q^n**

(a) $-1 < 0{,}99 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
(et pas 1 : même proche de 1, la raison est strictement inférieure à 1).

(b) $-1 < -0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$
(les termes changent de signe mais se rapprochent de 0).

(c) $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$ donc $c_n = 1^n = 1$ pour tout n : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.

(d) $1{,}3 > 1$ donc $1{,}3^n \to +\infty$; on multiplie par $-2 < 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty$.

(e) $-2 \leqslant -1$: e_n change de signe à chaque rang ($e_{2k} = 4^k \to +\infty$, $e_{2k+1} = -2 \times 4^k \to -\infty$), donc (e_n) n'a pas de limite.

(f) f_n vaut 1 pour n pair et -1 pour n impair : (f_n) n'a pas de limite. Attention, $q = -1$ n'est pas dans le cas $-1 < q < 1$.

(g) $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$ donc $g_n = -3 \times 1{,}25^n$; $1{,}25 > 1$ donc $1{,}25^n \to +\infty$, et comme $-3 < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = -\infty$.

Ex. 23 ★☆☆ **Sommes géométriques et leurs limites**

(a) $A_n = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$. Comme $3 > 1$, $3^{n+1} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$.

(b) La somme commence à $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ et compte $n-1$ termes : $B_n = \frac{1}{25}\left(1 + \frac{1}{5} + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right) = \frac{1}{25} \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{20}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right)$. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \frac{1}{20}$.

(c) Raison $q = -\frac{1}{3}$: $C_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$. Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \frac{3}{4}$.

(d) La somme commence à $0{,}7^1$ et compte n termes : $D_n = 0{,}7\left(1 + 0{,}7 + \cdots + 0{,}7^{n-1}\right) = 0{,}7 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} = \frac{7}{3}\left(1 - 0{,}7^n\right)$. Comme $-1 < 0{,}7 < 1$, $0{,}7^n \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = \frac{7}{3}$.

(e) $E_n = 2 \times \frac{1-0{,}9^{n+1}}{1-0{,}9} = 20\left(1 - 0{,}9^{n+1}\right)$. Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, $0{,}9^{n+1} \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = 20$.

Ex. 24 ★★☆ **Plusieurs puissances : corriger puis factoriser**

(a) $3 \times 2^n \to +\infty$ et $5^n \to +\infty$: la différence est une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On ne peut pas conclure directement, et rien ne permet d'affirmer que la limite vaut 0.

(b) $u_n = 5^n\left(3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)$. Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$, donc la parenthèse tend vers -1. Comme $5 > 1$, $5^n \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(c) On factorise numérateur et dénominateur par 5^n : $v_n = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{4}{5}\right)^n}$. Comme $\frac{2}{5}$ et $\frac{4}{5}$ sont dans $]-1;1[$, le numérateur et le dénominateur tendent vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

(d) Non. $\frac{(-5)^n}{4^n} = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ avec $q = -1{,}25 \leqslant -1$. Les termes changent de signe à chaque rang et leur valeur absolue tend vers $+\infty$. La suite n'a donc pas de limite, ni $-\infty$ ni $+\infty$.

Ex. 25 ★★☆ **Démontrer que q^n tend vers $+\infty$ (Bernoulli)**

(a) $q > 1$ donc $a = q - 1 > 0$. Ainsi $na \to +\infty$ (produit de $n \to +\infty$ par le réel $a > 0$), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + na) = +\infty$.

(b) Pour tout entier naturel n, $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + na) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(c) Ici $a = 0{,}02$, donc $1{,}02^n \geqslant 1 + 0{,}02n$. Or $1 + 0{,}02n \geqslant 10 \iff n \geqslant 450$.
Donc $N = 450$ convient : pour tout $n \geqslant 450$, $1{,}02^n \geqslant 10$.
(Ce n'est pas forcément le plus petit rang.)

(d) Comme $0 < r < 1$, $q = \frac{1}{r} > 1$. D'après la question 2, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = +\infty$. Or, pour tout entier naturel n, $r^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n}$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$.

Ex. 26 ★★★ **Vrai ou faux sur les puissances et les sommes**

(a) Faux. $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{9}{4}$, $u_3 = \frac{64}{27}$, donc $\frac{u_2}{u_1} = \frac{9}{8}$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{256}{243} \neq \frac{9}{8}$: le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant. (u_n) n'est donc pas géométrique. Le résultat sur q^n suppose que q est un réel fixe, pas un nombre $1 + \frac{1}{n}$ qui dépend de n. Le raisonnement n'est pas valable. On admet d'ailleurs que (u_n) converge vers un réel proche de 2,718.

Ex. 26 (suite)

(b) Vrai. Pour tout entier naturel n, $q^{n+1}-q^n=q^n(q-1)$, avec $q^n>0$. Cette différence a donc le signe de $q-1$, qui ne dépend pas de n. Si $q\geqslant 1$, (q^n) est croissante ; si $0<q\leqslant 1$, elle est décroissante. Dans tous les cas, (q^n) est monotone.

(c) Faux. Contre-exemple : $q=1$. Pour tout entier naturel n, $1^n=1$: la suite (1^n) est constante, donc elle converge vers $1\neq 0$.

(d) Faux. Contre-exemple : $q=-0{,}4$, qui vérifie $-1<q<1$. On a $S_0=1$ et $S_1=1-0{,}4=0{,}6<S_0$: (S_n) n'est pas croissante. En général, $S_{n+1}-S_n=q^{n+1}$, qui change de signe à chaque rang quand $q<0$.

(e) Faux. Contre-exemple : $q=\frac{1}{4}$. La somme commence à q^1 et compte n termes : $q+\cdots+q^n=q\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{4}\times\frac{1-(1/4)^n}{3/4}=\frac{1-(1/4)^n}{3}$. Comme $-1<\frac{1}{4}<1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n\to 0$: la limite vaut $\frac{1}{3}$, alors que $\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}$. En général, la limite vaut $\frac{q}{1-q}$.

Ex. 27 ★★★ La balle qui rebondit

(a) Pour tout entier naturel n, $h_{n+1}=0{,}6\times h_n$: (h_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $h_0=3$. Donc $h_n=3\times 0{,}6^n$. Comme $-1<0{,}6<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}6^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$.

(b) La somme commence à $h_1=1{,}8$ et compte n termes, de raison 0,6 : $S_n=1{,}8\times\frac{1-0{,}6^n}{1-0{,}6}=4{,}5\,(1-0{,}6^n)$.

(c) $D_n=3+2\times 4{,}5\,(1-0{,}6^n)=12-9\times 0{,}6^n$. Comme $-1<0{,}6<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}6^n=0$. Par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}D_n=12$. La suite (D_n) converge vers 12.

(d) Non. Pour tout entier naturel n, $9\times 0{,}6^n>0$, donc $D_n<12$. La distance totale parcourue reste toujours inférieure à 12 m. Elle augmente à chaque rebond mais ne dépasse jamais 12 m : Ben a tort.

(e) Ligne 4 : `while D < 11.9:`. La boucle s'arrête dès que $D_n\geqslant 11{,}9$. On a $D_8=12-9\times 0{,}6^8\approx 11{,}849<11{,}9$ et $D_9=12-9\times 0{,}6^9\approx 11{,}909\geqslant 11{,}9$. Le programme affiche donc 9.

Ex. 28 ★★★ D'après le bac : sommes de puissances de 2 et de 4

(a) S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 : $S_n=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1$. De même, $T_n=\frac{1-4^{n+1}}{1-4}=\frac{4^{n+1}-1}{3}$.

Ex. 28 (suite)

(b) $S_n-T_n=2^{n+1}-\frac{4^{n+1}}{3}-\frac{2}{3}$. Or $2^{n+1}\to+\infty$ et $4^{n+1}\to+\infty$: c'est une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ». On factorise par la plus grande base : $S_n-T_n=4^{n+1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}$. Comme $-1<\frac{1}{2}<1$, la parenthèse tend vers $-\frac{1}{3}$. Comme $4>1$, $4^{n+1}\to+\infty$. Par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-T_n)=-\infty$.

(c) $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3(2^{n+1}-1)}{4^{n+1}-1}$. On divise le numérateur et le dénominateur par $4^{n+1}\neq 0$: $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$. Comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont dans $]-1;1[$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{T_n}=0$. De même, $\frac{S_n^2}{T_n}=\frac{3(4^{n+1}-2\times 2^{n+1}+1)}{4^{n+1}-1}=\frac{3\left(1-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n^2}{T_n}=3$.

(d) R_n est la somme de $n-2$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$, de premier terme $\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$. Donc $R_n=\frac{8}{125}\times\frac{1-(2/5)^{n-2}}{1-2/5}=\frac{8}{75}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}\right)$. Comme $-1<\frac{2}{5}<1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}\to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=\frac{8}{75}$.

5. *Suites monotones bornées, convergence et seuil*

Ex. 29 ★☆☆ Sens de variation par la différence

(a) $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+4(n+1)-1-(n^2+4n-1)=2n+5>0$: (a_n) est strictement croissante.

(b) $b_{n+1}-b_n=\frac{9}{n+3}-\frac{9}{n+2}=\frac{9(n+2)-9(n+3)}{(n+2)(n+3)}=\frac{-9}{(n+2)(n+3)}<0$: (b_n) est strictement décroissante.

(c) $c_{n+1}-c_n=\frac{2n+3}{n+5}-\frac{2n+1}{n+4}=\frac{(2n^2+11n+12)-(2n^2+11n+5)}{(n+4)(n+5)}=\frac{7}{(n+4)(n+5)}>0$: (c_n) est strictement croissante.

(d) $d_{n+1}-d_n=7\times 0{,}6^n\times(0{,}6-1)=-2{,}8\times 0{,}6^n<0$: (d_n) est strictement décroissante.

(e) $e_{n+1}-e_n=-(n^2+1)<0$: (e_n) est strictement décroissante.

(f) $h_{n+1}-h_n=1-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Comme $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geqslant 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqslant 1$, donc $h_{n+1}-h_n\geqslant 0$: (h_n) est croissante (avec $h_0=h_1=0$).

Ex. 30 ★☆☆ Que permet de conclure le théorème ?

(a) $3\times 0{,}4^n>0$, donc $u_n<2\leqslant 4$. (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Comme $-1<0{,}4<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}4^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2\neq 4$: un majorant n'est pas forcément la limite.

Ex. 30 **(suite)**

(b) Non. $\frac{6}{n+2} > 0$, donc $w_n < 4$: (w_n) est croissante et majorée, donc elle converge. En fait, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{n+2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 4$. Être croissante ne suffit pas pour tendre vers $+\infty$.

(c) (t_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, donc $\ell = 2$: ce n'est pas 0.

(d) Non. $s_n = 4$ si n est pair et $s_n = 2$ si n est impair. Si (s_n) convergeait vers L, alors $s_{n+1} - s_n$ tendrait vers $L - L = 0$, or $|s_{n+1} - s_n| = 2$ pour tout n : (s_n) diverge. Bornée n'implique pas convergente (le théorème exige en plus la monotonie).

(e) Aucun réel A n'est un majorant : (r_n) est croissante et non majorée, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$.

(f) (p_n) est décroissante et minorée par -2, donc elle converge vers une limite ℓ telle que $-2 \leqslant \ell \leqslant p_0$. On ne sait pas si $\ell = -2$.

Ex. 31 ★★☆ **Escalier, convergence et faux majorant**

(a) On lit $u_1 \approx 2{,}6$, $u_2 \approx 3{,}5$, $u_3 \approx 3{,}8$: on conjecture que (u_n) est croissante.

(b) Pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$: (u_n) est croissante. Elle est majorée par 5. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite ℓ, avec $1 \leqslant \ell \leqslant 5$.

(c) f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $f(\ell) = \ell : \sqrt{3\ell+4} = \ell$. Comme $\ell \geqslant 1$, cela équivaut à $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, soit $(\ell-4)(\ell+1) = 0$.
Donc $\ell = 4$ (car $-1 < 1$). Hugo a tort : la limite vaut 4 et non 5 ($f(5) = \sqrt{19} \neq 5$).

(d) Faux. Contre-exemple : $v_n = 2 - n$ est décroissante et $v_n \leqslant 2 \leqslant 5$ pour tout n, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Le théorème exige « décroissante et minorée » (ou « croissante et majorée »).

Ex. 32 ★★☆ **Le programme de seuil d'Élise**

(a) $w_{n+1} - w_n = 2n + 3 \geqslant 3 > 0$: (w_n) est strictement croissante. En additionnant les n écarts de w_0 à w_n, chacun au moins égal à 3 : $w_n - w_0 \geqslant 3n$, donc $w_n \geqslant 1 + 3n$.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+3n) = +\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Ainsi, pour tout réel A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang : le seuil existe.

Ex. 32 **(suite)**

(c) $w = 1$ et $1 > 500$ est faux : la boucle ne tourne pas et la fonction renvoie $0 + 1 = 1$. Erreur 1 : la condition du while doit être la négation de « $w_n > A$ », soit `while w <= A:`. Erreur 2 : à la sortie, `n` est déjà le rang de `w`, il faut `return n`.

(d) $w_{21} = 484 \leqslant 500$ et $w_{22} = 529 > 500$: le programme corrigé renvoie 22.

(e) Pour tout n, $\frac{5}{n+2} > 0$, donc $v_n < 7 < 8$: la condition `v <= 8` reste toujours vraie, et la boucle ne s'arrête jamais. Le seuil 8 n'est jamais atteint, car (v_n) converge vers $7 < 8$.

Ex. 33 ★★★ **Une suite homographique et deux seuils**

(a) $f(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$, donc $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Soit $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ». Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{3}{2}$, donc $P(0)$ est vraie. Hérédité : si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, comme f est croissante, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$, c'est-à-dire $\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{19}{6}$. Or $0 \leqslant \frac{3}{2}$ et $\frac{19}{6} \leqslant 4$, donc $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(b) D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 4 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. L'hérédité montre que, pour tout entier naturel n, $\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{19}{6}$. Par passage à la limite dans ces inégalités, $\frac{3}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{19}{6}$. En particulier, $\ell < 4$: la limite n'est pas le majorant 4.

(c) On a $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, donc $\ell \in [0\,;4]$. Comme f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $f(\ell) = \ell$, d'où $4\ell + 3 = \ell^2 + 2\ell$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, c'est-à-dire $(\ell-3)(\ell+1) = 0$. Comme $\ell \geqslant 0$, on obtient $\ell = 3$.

(d) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, l'intervalle ouvert $]2{,}99\,;3{,}01[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang : ce rang existe. On calcule $u_2 = \frac{18}{7}$, $u_3 = \frac{93}{32} \approx 2{,}906$, $u_4 = \frac{468}{157} \approx 2{,}981$, $u_5 = \frac{2343}{782} \approx 2{,}996$. Comme la suite est croissante, $u_n > 2{,}99$ pour tout $n \geqslant 5$. Le plus petit rang est 5.

(e) La boucle ne s'arrête jamais. En effet, $u_n \leqslant 3$ pour tout n : sinon il existerait p tel que $u_p > 3$ et, comme la suite est croissante, $u_n \geqslant u_p$ pour tout $n \geqslant p$, donc $\ell \geqslant u_p > 3$, ce qui est absurde. La condition `u <= 3.2` reste donc toujours vraie : le seuil 3,2, au-delà de la limite, n'est jamais atteint.

Ex. 34 ★★★ **Deux sommes croissantes, deux destins**

(a) Pour tout entier naturel n, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}+1} > 0$. Donc la suite (S_n) est croissante.

(b) Pour $k \geqslant 1$, $2^k + 1 > 2^k > 0$, donc $\frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k}$. En additionnant de $k = 1$ à $k = n$: $S_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Par la somme des termes d'une suite géométrique, $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Donc $S_n \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{3}{2}$ (pour $n = 0$, $S_0 = \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}$). Conclusion : pour tout entier naturel n, $S_n \leqslant \frac{3}{2}$.

(c) Zoé a tort. (S_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. Comme elle est croissante, $\ell \geqslant S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, et par passage à la limite dans $S_n \leqslant \frac{3}{2}$, on a $\ell \leqslant \frac{3}{2}$.
Donc $\frac{5}{6} \leqslant \ell \leqslant \frac{3}{2}$: être croissante n'implique pas de tendre vers $+\infty$.

(d) $w_{n+1} - w_n = -(S_{n+1} - S_n) < 0$, donc (w_n) est décroissante. De plus, $w_n \geqslant 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$: (w_n) est minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge, vers $2 - \ell \geqslant \frac{1}{2}$. Sa limite ne vaut donc pas 0 : un minorant n'est pas forcément la limite.

(e) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$, donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. T_n est une somme de n termes, donc $T_n \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Sami a tort : (T_n) est croissante mais non majorée, et elle diverge vers $+\infty$.

Ex. 35 ★★★ **Par l'absurde, puis le programme de Maël**

(a) Soit $P(n)$: « $u_n \geqslant 1$ ». Initialisation : $u_0 = 1 \geqslant 1$. Hérédité : si $u_n \geqslant 1$, alors $\frac{1}{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > u_n \geqslant 1$. Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$. Ensuite, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ car $u_n \geqslant 1 > 0$: la suite (u_n) est croissante.

(b) Supposons (u_n) majorée. Elle est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de convergence monotone. Comme $u_n \geqslant 1$, on a $\ell \geqslant 1$. La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, soit $\frac{1}{\ell} = 0$, ce qui est impossible.
Donc (u_n) n'est pas majorée. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Ex. 35 **(suite)**

(c) $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geqslant u_n^2 + 2$. Par récurrence : $u_0^2 = 1 = 2 \times 0 + 1$; si $u_n^2 \geqslant 2n + 1$, alors $u_{n+1}^2 \geqslant 2n + 3 = 2(n + 1) + 1$.
Donc pour tout n, $u_n^2 \geqslant 2n + 1$, et comme $u_n > 0$, $u_n \geqslant \sqrt{2n+1}$. Pour $n \geqslant 50$, $2n + 1 \geqslant 101 > 100$, donc $u_n > 10$: le rang 50 convient.

(d) Au départ, $u = 1$ et la condition `u > 10` est fausse : on n'entre pas dans la boucle et `seuil(10)` renvoie 1. Il y a deux erreurs. D'abord, la condition du `while` doit être la négation de « $u_n > A$ » : `while u <= A:`. Ensuite, le compteur doit valoir le rang du terme `u`, donc `n = 0` au départ, puisque $u_0 = 1$.

(e) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, pour tout réel A il existe un rang à partir duquel $u_n > A$. La condition `u <= A` finit donc par devenir fausse, et la boucle s'arrête. En exécutant le programme corrigé : $u_{48} \approx 9{,}984$ et $u_{49} \approx 10{,}084$, donc `seuil(10)` renvoie 49.

6. *Suites arithmético-géométriques : suite auxiliaire*

Ex. 36 ★☆☆ **Trouver le point fixe**

(a) $\ell = 0{,}75\ell + 5 \iff 0{,}25\ell = 5 \iff \ell = 20$.

(b) $\ell = 3\ell - 14 \iff -2\ell = -14 \iff \ell = 7$.

(c) $\ell = -0{,}5\ell + 9 \iff 1{,}5\ell = 9 \iff \ell = 6$.

(d) $\ell = \frac{2}{3}\ell - 4 \iff \frac{1}{3}\ell = -4 \iff \ell = -12$.

(e) $0{,}25 \times 16 + 12 = 4 + 12 = 16$: on a bien $\ell = 0{,}25\ell + 12$ pour $\ell = 16$.

(f) $\ell = \ell + 7 \iff 0 = 7$, ce qui est impossible. Ici $a = 1$: la suite n'est pas arithmético-géométrique, c'est une suite arithmétique de raison 7.

Ex. 37 ★☆☆ **Formule explicite et limite**

(a) $\ell = \frac{4}{1-0{,}5} = 8$ et $u_0 - \ell = 2 - 8 = -6$, donc $u_n = 8 - 6 \times 0{,}5^n$. Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$.

(b) $\ell = \frac{3}{1-2} = -3$ et $u_0 - \ell = 1 - (-3) = 4$, donc $u_n = -3 + 4 \times 2^n$. Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $4 > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) $\ell = \frac{9}{1+0{,}8} = 5$ et $u_0 - \ell = 5$, donc $u_n = 5 + 5 \times (-0{,}8)^n$. Comme $-1 < -0{,}8 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}8)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

Ex. 37 **(suite)**

(d) $\ell = \frac{-6}{1-4} = 2$ et $u_0 - \ell = -2$, donc $u_n = 2 - 2 \times 4^n$. Comme $4 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $-2 < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(e) $\ell = \frac{9}{1+2} = 3 = u_0$, donc $u_0 - \ell = 0$ et $u_n = 3 + 0 \times (-2)^n = 3$. La suite est constante, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

(f) $\ell = \frac{4}{1+3} = 1$ et $u_0 - \ell = 4$, donc $u_n = 1 + 4 \times (-3)^n$. Pour n pair, $u_n = 1 + 4 \times 9^{n/2}$, qui tend vers $+\infty$. Pour n impair, $u_n = 1 - 4 \times 3^n$, qui tend vers $-\infty$. Les termes de rang pair et ceux de rang impair n'ont pas la même limite, donc (u_n) n'a pas de limite.

Ex. 38 ★★☆ **La suite auxiliaire de Malik**

(a) $u_1 = 0{,}6 \times 90 + 16 = 70$ et $u_2 = 0{,}6 \times 70 + 16 = 58$.

(b) $v_0 = 130$, $v_1 = 110$, $v_2 = 98$. Or $\frac{v_1}{v_0} = \frac{11}{13} \approx 0{,}846$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{98}{110} \approx 0{,}891$. Ces quotients sont différents, donc (v_n) n'est pas géométrique : ajouter 40 n'est pas le bon décalage.

(c) Le point fixe vérifie $\ell = 0{,}6\ell + 16 \iff 0{,}4\ell = 16 \iff \ell = 40$: le décalage est donc le bon. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0{,}6u_n + 16 - 40 = 0{,}6u_n - 24 = 0{,}6(u_n - 40) = 0{,}6\,w_n$.
Donc (w_n) est géométrique de raison 0,6, avec $w_0 = 90 - 40 = 50$.

(d) Non. Sa formule donne $90 \times 0{,}6 + 40 = 94 \neq 70 = u_1$. On a $w_n = 50 \times 0{,}6^n$, donc $u_n = w_n + 40 = 40 + 50 \times 0{,}6^n$. Vérification : $40 + 50 \times 0{,}6 = 70$.

(e) Comme $-1 < 0{,}6 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n = 0$. Par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40$. La suite (u_n) converge vers 40.

Ex. 39 ★★☆ **Les abonnés de la newsletter de Nadia**

(a) $u_1 = 1\,000 - 0{,}15 \times 1\,000 + 240 = 850 + 240 = 1\,090$ et $u_2 = 0{,}85 \times 1\,090 + 240 = 1\,166{,}5$. Perdre 15 % revient à multiplier par 0,85, puis on ajoute 240 : $u_{n+1} = 0{,}85\,u_n + 240$.

(b) Non. $u_1 - u_0 = 1\,090 - 1\,000 = 90$ et $u_2 - u_1 = 1\,166{,}5 - 1\,090 = 76{,}5$. Ces différences ne sont pas égales et ne valent pas 240.
Donc (u_n) n'est pas arithmétique : les 15 % de désinscriptions s'appliquent chaque mois avant l'ajout des 240 abonnés.

Ex. 39 **(suite)**

(c) $\ell = 0{,}85\ell + 240 \iff 0{,}15\ell = 240 \iff \ell = 1\,600$. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,600 = 0{,}85u_n + 240 - 1\,600 = 0{,}85u_n - 1\,360 = 0{,}85(u_n - 1\,600) = 0{,}85\,v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison 0,85, avec $v_0 = 1\,000 - 1\,600 = -600$.

(d) $v_n = -600 \times 0{,}85^n$, donc $u_n = v_n + 1\,600 = 1\,600 - 600 \times 0{,}85^n$. Comme $-1 < 0{,}85 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\,600$. À long terme, le nombre d'abonnés se stabilise autour de 1 600.

(e) On écrit `while u < 1400:` et `u = 0.85*u + 240`. Le programme affiche 7 : $u_6 \approx 1\,373{,}71 < 1\,400$ et $u_7 \approx 1\,407{,}65 \geqslant 1\,400$. La newsletter atteint 1 400 abonnés au bout de 7 mois.

Ex. 40 ★★★ **Les truites de l'étang de Saint-Clair**

(a) Perdre 20 % revient à multiplier par $1 - 0{,}2 = 0{,}8$, puis on ajoute les 300 truites relâchées : $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 300$. Ainsi $u_1 = 0{,}8 \times 2\,000 + 300 = 1\,900$ et $u_2 = 0{,}8 \times 1\,900 + 300 = 1\,820$. Avec la formule de Théo : $0{,}8^2 \times 2\,000 + 300 = 1\,280 + 300 = 1\,580 \neq 1\,820$. Sa formule est donc fausse : (u_n) n'est pas géométrique et on ne peut pas « ajouter 300 à la fin ».

(b) $\ell = 0{,}8\,\ell + 300 \iff 0{,}2\,\ell = 300 \iff \ell = 1\,500$. Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,500 = 0{,}8\,u_n + 300 - 1\,500 = 0{,}8\,u_n - 1\,200 = 0{,}8\,(u_n - 1\,500) = 0{,}8\,v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison 0,8.

(c) $v_0 = u_0 - 1\,500 = 500$.
Donc $v_n = 500 \times 0{,}8^n$ et, comme $u_n = v_n + 1\,500$, on a $u_n = 1\,500 + 500 \times 0{,}8^n$ pour tout entier naturel n.
Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$, donc par opérations sur les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\,500$. À long terme, la population de truites se stabilise autour de 1 500.

(d) On complète par `while u >= 1550 :` et `u = 0.8 * u + 300`. La fonction renvoie 11 : $u_{10} = 1\,500 + 500 \times 0{,}8^{10} \approx 1\,553{,}7 \geqslant 1\,550$ et $u_{11} \approx 1\,542{,}9 < 1\,550$.
L'étang compte donc moins de 1 550 truites pour la première fois au 1er mars 2037.

Ex. 41 ★★★ **Le bon décalage de Hugo et Léna**

(a) $u_1 = 1{,}25 \times 52 - 15 = 50$ et $u_2 = 1{,}25 \times 50 - 15 = 47{,}5$. Alors $v_0 = 12$, $v_1 = 10$, $v_2 = 7{,}5$. Or $\frac{v_1}{v_0} = \frac{5}{6}$ et $\frac{v_2}{v_1} = 0{,}75$: ces quotients sont différents, donc (v_n) n'est pas géométrique. Hugo a tort : 40 n'est pas le bon décalage (en effet $v_{n+1} = 1{,}25\,u_n - 55 = 1{,}25\,(u_n - 44)$).

(b) $\ell = 1{,}25\,\ell - 15 \iff -0{,}25\,\ell = -15 \iff \ell = 60$. Pour tout entier naturel n : $t_{n+1} = u_{n+1} - 60 = 1{,}25\,u_n - 75 = 1{,}25\,(u_n - 60) = 1{,}25\,t_n$.
Donc (t_n) est géométrique de raison 1,25.

(c) La suite auxiliaire est $t_n = u_n - \ell$, donc $t_0 = u_0 - 60 = 52 - 60 = -8$ (et non 112). Ainsi $t_n = -8 \times 1{,}25^n$ et, comme $u_n = t_n + 60$, on obtient $u_n = 60 - 8 \times 1{,}25^n$ pour tout entier naturel n.

(d) Comme $1{,}25 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}25^n = +\infty$. Comme $-8 < 0$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} (-8 \times 1{,}25^n) = -\infty$, puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

(e) Faux. De la même façon, $u_n = 60 + (u_0 - 60) \times 1{,}25^n$. Contre-exemples : si $u_0 = 60$, la suite est constante égale à 60 ; si $u_0 = 70$, $u_n = 60 + 10 \times 1{,}25^n$ et, comme $10 > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La limite dépend du signe de $u_0 - 60$.

Ex. 42 ★★★ **La perfusion de Sofia**

(a) Éliminer 30 % revient à multiplier par 0,7 ; la perfusion vient ensuite, donc on ajoute 1,2 après : $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 1{,}2$. La relation $0{,}7\,(u_n + 1{,}2)$ appliquerait aussi l'élimination à la dose perfusée, ce qui inverse l'ordre des opérations : elle donnerait $0{,}7 \times 7{,}2 = 5{,}04$ au lieu de $u_1 = 5{,}4$.

(b) Sur la figure, $u_0 = 6$, $u_1 = 5{,}4$, $u_2 \approx 5$, $u_3 \approx 4{,}7$: l'escalier descend. On conjecture que (u_n) est décroissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$, soit 4.

(c) Soit $P(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ». Initialisation : $u_1 = 5{,}4$ et $0 \leqslant 5{,}4 \leqslant 6$, donc $P(0)$ est vraie. Hérédité : si $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, on multiplie par $0{,}7 > 0$: $0 \leqslant 0{,}7\,u_{n+1} \leqslant 0{,}7\,u_n$, puis on ajoute 1,2 : $1{,}2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, donc $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Ex. 42 (suite)

(d) On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine) et (u_n) converge vers ℓ, donc $f(\ell) = \ell$: $0{,}7\,\ell + 1{,}2 = \ell \iff 0{,}3\,\ell = 1{,}2 \iff \ell = 4$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$: la conjecture est confirmée.

(e) Ici $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + p$. Le point fixe est $m = \frac{p}{0{,}3}$ et $w_n = u_n - m$ vérifie $w_{n+1} = 0{,}7\,u_n + p - m = 0{,}7\,(u_n - m) = 0{,}7\,w_n$ (car $p = 0{,}3\,m$).
Donc $u_n = m + (6 - m) \times 0{,}7^n$ et, comme $-1 < 0{,}7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = m$. On veut $\frac{p}{0{,}3} = 5$, d'où $p = 1{,}5$: il faut perfuser 1,5 mg par heure.

7. *Suites $u_{n+1} = f(u_n)$: limite et point fixe*

Ex. 43 ★☆☆ **Choisir la limite parmi les points fixes**

(a) $f(x) = 0{,}6x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\ell = 0{,}6\ell + 2$. On obtient $0{,}4\ell = 2$, d'où $\ell = 5$.

(b) f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\ell = \frac{\ell^2}{4} + \frac{3}{4}$. On obtient $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$, soit $(\ell - 1)(\ell - 3) = 0$. Comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, par passage à la limite $1 \leqslant \ell \leqslant 2$. On élimine 3 : $\ell = 1$.

(c) Comme $u_n > 0$, on a $\ell \geqslant 0$. Or f est continue sur $]-1\,;+\infty[$, donc $\ell = \frac{6}{\ell+1}$. On obtient $\ell^2 + \ell - 6 = 0$, soit $(\ell - 2)(\ell + 3) = 0$. Comme $\ell \geqslant 0$, $\ell = 2$.

(d) On a $\ell \geqslant 0$, et f est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc $\ell = \frac{\ell}{1+\ell}$. On obtient $\ell + \ell^2 = \ell$, soit $\ell^2 = 0$: $\ell = 0$.

(e) f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\ell = \frac{\ell^3}{9}$. On obtient $\ell(\ell^2 - 9) = 0$, soit $\ell \in \{-3\,;0\,;3\}$. Comme $0 \leqslant \ell \leqslant 2$, $\ell = 0$.

Ex. 44 ★☆☆ **Lire un escalier, puis calculer**

(a) $u_1 = \sqrt{0} + 2 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} + 2$.

(b) Ils se lisent sur l'axe des abscisses : la droite $y = x$ ramène chaque image sur cet axe. On lit $u_3 \approx 3{,}8$. Le calcul le confirme : $u_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + 2 \approx 3{,}85$.

(c) On conjecture que (u_n) est croissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite, environ 4.

(d) Il faut résoudre $\sqrt{x} = x - 2$. On doit donc avoir $x \geqslant 2$. En élevant au carré : $x = x^2 - 4x + 4$, soit $x^2 - 5x + 4 = 0$, c'est-à-dire $(x - 1)(x - 4) = 0$. On élimine 1, qui est inférieur à 2 ($f(1) = 3$). La seule solution est $x = 4$.

Ex. 44 **(suite)**

(e) Non. Sa conclusion rejoint la conjecture, mais son argument ne suffit pas : un point fixe ne prouve pas la convergence. Il faut d'abord démontrer que (u_n) converge, par exemple parce qu'elle est croissante et majorée. Ensuite seulement, comme f est continue en ℓ, on aura $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 4$.

Ex. 45 ★★☆ **Vrai ou faux sur les suites récurrentes**

(a) Faux. Prenons $f(x) = 0{,}5x + 1$, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, et $u_0 = 6$. Alors $u_1 = 4 < u_0$, donc (u_n) n'est pas croissante. Le sens de variation dépend de la position de u_1 par rapport à u_0.

(b) Faux. Prenons $f(x) = -0{,}5x + 3$, continue sur $\mathbb{R}$, et $u_0 = 0$. Alors $u_1 = 3$ et $u_2 = 1{,}5$: $u_1 > u_0$ mais $u_2 < u_1$, donc (u_n) n'est pas monotone. Pourtant, elle converge. Posons $v_n = u_n - 2$. On a $v_{n+1} = -0{,}5u_n + 1 = -0{,}5(u_n - 2) = -0{,}5\,v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $-0{,}5$, avec $v_0 = -2$. Ainsi $u_n = 2 - 2 \times (-0{,}5)^n$. Comme $-1 < -0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}5)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(c) Vrai. On note $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ». $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse. Si $u_{k+1} \geqslant u_k$, alors, f étant croissante, $f(u_{k+1}) \geqslant f(u_k)$, soit $u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$. Par récurrence, (u_n) est croissante.

(d) Faux. Par récurrence, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ pour tout n : c'est vrai pour $n = 0$, et si $u_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k > 0$, alors $u_{k+1} = \frac{u_k}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} > 0$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, (u_n) converge vers 0. Or $f(0) = 1 \neq 0$. Le théorème ne s'applique pas ici : f n'est pas continue en 0.

Ex. 46 ★★☆ **Méthode complète et seuil**

(a) $u_1 = \sqrt{3 \times 0 + 4} = 2$ et $u_2 = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

(b) D'après l'encadrement admis, (u_n) est croissante et majorée par 5. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. Par passage à la limite dans $0 \leqslant u_n \leqslant 5$, on obtient $0 \leqslant \ell \leqslant 5$.

(c) f est continue sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$, comme composée de fonctions continues, donc continue en $\ell \geqslant 0$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que (u_n) converge vers ℓ, on a $f(\ell) = \ell$, soit $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$.

(d) Une suite convergente n'a qu'une seule limite. De plus, $\ell^2 = 3\ell + 4$ donne $(\ell - 4)(\ell + 1) = 0$, mais -1 n'appartient pas à $[0\,;5]$ (et une racine carrée est positive) : on l'élimine. On vérifie que $\sqrt{16} = 4$. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Ex. 46 **(suite)**

(e) On complète avec `while 4 - u >= 0.01:`. Le programme affiche 7 : $u_6 \approx 3{,}982$ et $u_7 \approx 3{,}993$.

Ex. 47 ★★★ **Suite décroissante : trois erreurs à corriger**

(a) $u_1 = \sqrt{10 + 6} = 4$.
Donc $u_1 < u_0$ et la suite n'est pas croissante : Tom a tort. Que f soit croissante ne donne pas le sens de variation de (u_n). C'est la comparaison de u_0 et de u_1, propagée par récurrence, qui le fixe. Ici, la suite est décroissante.

(b) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$ ». Initialisation : $u_1 = 4$, donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 10$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : soit k un entier tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Les réels 0, u_{k+1}, u_k et 10 sont dans $[-6\,;+\infty[$, où f est croissante.
Donc $f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(10)$, soit $\sqrt{6} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$. Comme $0 \leqslant \sqrt{6}$ et $4 \leqslant 10$, on obtient $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(c) D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant 10$. La fonction f est continue sur $[-6\,;+\infty[$, donc en ℓ. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, le théorème du point fixe donne $f(\ell) = \ell$, soit $\ell = \sqrt{\ell + 6}$.

(d) En élevant au carré, on obtient $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, soit $(\ell - 3)(\ell + 2) = 0$. Cette équation ne donne que des candidats. La décroissance ne permet pas de « prendre la plus petite » solution. Or $\ell \geqslant 0$ d'après l'encadrement (et une racine carrée est positive) : -2 est exclu. D'ailleurs, $\sqrt{-2 + 6} = 2 \neq -2$. En revanche, $\sqrt{3 + 6} = 3$. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Ex. 47 **(suite)**

(e) Avec `L = -2`, on a `u - L` $= 12$ au départ. La condition `u - L < 0.001` est fausse, donc la boucle ne tourne jamais et le programme affiche 0. Il y a deux erreurs. D'abord, la limite est 3, pas -2. Ensuite, la boucle doit tourner tant que le seuil n'est pas atteint, c'est-à-dire tant que `u - L > 0.001`.

```
from math import sqrt
L = 3
u = 10
n = 0
while u - L > 0.001:
    u = sqrt(u + 6)
    n = n + 1
print(n)
```

Le programme corrigé affiche 5 : $u_4 - 3 \approx 0{,}0045$ et $u_5 - 3 \approx 0{,}0007$. Le plus petit entier cherché est donc $n = 5$.

Ex. 48 ★★★ **Deux points fixes, deux destins**

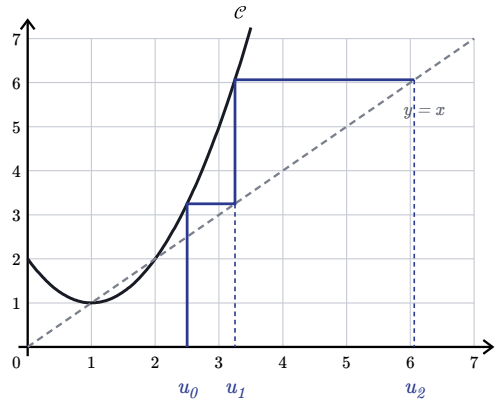
(a) $(x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2 = f(x)$. Sur $[1\,;+\infty[$, $x - 1$ est positif et croissant, donc son carré est croissant : f est croissante sur $[1\,;+\infty[$. Ensuite, $f(x) = x \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)(x-2) = 0 \iff x = 1$ ou $x = 2$.

(b) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$ ». Initialisation : $u_1 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, donc $1 \leqslant \frac{5}{4} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant 2$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : soit k un entier tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Comme f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, on a $f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(2)$, soit $1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. La fonction f est un polynôme, donc elle est continue en ℓ, et $f(\ell) = \ell$: $\ell = 1$ ou $\ell = 2$. Les deux candidats sont dans $[1\,;2]$, donc l'encadrement ne suffit pas. C'est le sens de variation qui tranche : la suite décroît, donc $u_n \leqslant u_1 = \frac{5}{4}$ pour tout $n \geqslant 1$. Par passage à la limite, $\ell \leqslant \frac{5}{4}$. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Ex. 48 **(suite)**

(d) $v_1 = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{13}{4} = 3{,}25$ et $v_2 = f\left(\frac{13}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 1 = \frac{97}{16} \approx 6{,}06$. On part de v_0 sur l'axe des abscisses. On monte verticalement jusqu'à $\mathcal{C}$, puis on va horizontalement jusqu'à la droite $y = x$. On redescend enfin sur l'axe des abscisses : on y lit v_1, et on recommence pour v_2.



Conjecture : (v_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

Ex. 48 **(suite)**

(e) Par récurrence, $v_n \geqslant \frac{5}{2}$ pour tout n. En effet, $v_0 = \frac{5}{2}$, et si $v_k \geqslant \frac{5}{2}$, la croissance de f sur $[1\,;+\infty[$ donne $v_{k+1} \geqslant f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{13}{4} \geqslant \frac{5}{2}$. Ensuite, $v_{n+1} - v_n = v_n^2 - 3v_n + 2 = (v_n - 1)(v_n - 2) > 0$ car $v_n \geqslant \frac{5}{2}$: (v_n) est croissante. Raisonnons par l'absurde et supposons que (v_n) converge vers ℓ. Alors $\ell \geqslant \frac{5}{2}$, et comme f est continue, $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 1$ ou $\ell = 2$: c'est absurde. Donc (v_n) diverge. Si elle était majorée, étant croissante, elle convergerait. Elle est donc croissante et non majorée, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Inès a tort : l'existence d'un point fixe ne prouve pas la convergence.

Ex. 49 ★★★ **Les truites d'un lac**

(a) $8 - \frac{24}{x+3} = \frac{8x+24-24}{x+3} = \frac{8x}{x+3} = f(x)$. Sur $[0\,;+\infty[$, $x + 3$ est strictement positif et croissant, donc $\frac{24}{x+3}$ est décroissant : f est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$ ». Initialisation : $u_1 = \frac{8}{4} = 2$, donc $1 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 6$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : soit k un entier tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Comme f est croissante, $f(1) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(6)$, soit $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{16}{3}$. D'où $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 6$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Ex. 49 **(suite)**

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant 6$. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc en ℓ, et $f(\ell) = \ell : 8\ell = \ell^2 + 3\ell$, soit $\ell(\ell - 5) = 0$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 5$. Comme $\ell \geqslant 1$, on élimine 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$. À long terme, la population se stabilise vers 5 000 truites.

(c) Comme $u_n \geqslant 1 > 0$, w_n est bien défini. On a $w_{n+1} = \frac{u_n+3}{8u_n} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3}{8}w_n + \frac{1}{8}$. Avec $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{5}$, on obtient $t_{n+1} = \frac{3}{8}w_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} = \frac{3}{8}w_n - \frac{3}{40} = \frac{3}{8}\left(w_n - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{8}t_n$. La suite (t_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{8}$ et de premier terme $t_0 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

(d) Pour tout n, $t_n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{8}\right)^n$, donc $w_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^n = \frac{1+4\left(\frac{3}{8}\right)^n}{5}$. On en déduit $u_n = \frac{5}{1+4\left(\frac{3}{8}\right)^n}$. Comme $-1 < \frac{3}{8} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$. Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{1} = 5$.

(e) La suite (u_n) est croissante. À la calculatrice, $u_5 = \frac{5}{1+4\left(\frac{3}{8}\right)^5} \approx 4{,}856 < 4{,}9$ et $u_6 \approx 4{,}945 > 4{,}9$.
Donc $u_n > 4{,}9$ pour tout $n \geqslant 6$. Conclusion : le lac compte plus de 4 900 truites à partir de l'année $2026 + 6 = 2032$.