42 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 1re : suites arithmétiques et géométriques, sens de variation*

À retenir : Arithmétique : $u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$. Géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$; « +3 % » donne $q = 1{,}03$. De u_p à u_m : $m - p + 1$ termes. Sens : signe de $u_{n+1} - u_n$, avec $u_{n+1} \neq u_n + 1$.

Ex. 1 ★☆☆ **Terme général des suites arithmétiques et géométriques** — Donne les valeurs exactes.

a. (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -3. Exprime u_n en fonction de n.

b. (v_n) est arithmétique, avec $v_1 = 4$ et de raison 2,5. Calcule v_{20}.

c. (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = 5$ et de raison 2. Calcule w_6.

d. (t_n) est géométrique, avec $t_1 = 81$ et de raison $\frac{1}{3}$. Exprime t_n en fonction de n, puis calcule t_5.

e. (a_n) est arithmétique, avec $a_3 = 10$ et $a_8 = 25$. Détermine sa raison.

f. Combien de termes compte la liste $u_4, u_5, \dots, u_{30}$?

Ex. 2 ★☆☆ **Pourcentages et sens de variation d'une suite géométrique** — Dans les deux dernières questions, n désigne un entier naturel.

a. Une quantité augmente de 6 % par an. Donne la raison q de la suite géométrique qui la modélise.

b. Une quantité diminue de 6 % par an. Donne la raison q de la suite géométrique qui la modélise.

c. Un prix de 80 € augmente de 3 %, puis baisse de 3 %. Calcule le prix final, arrondi au centime.

d. Un loyer passe de 650 € à 676 €. Calcule la variation absolue, puis la variation relative en pourcentage.

e. Étudie le sens de variation de la suite définie par $u_n = -4 \times 1{,}2^n$.

f. Étudie le sens de variation de la suite définie par $v_n = -2 \times 0{,}9^n$.

Ex. 3 ★★☆ **Nature et variations : repère les erreurs** — Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = n^3 - 3n^2 + 4n$, $b_n = 3 \times 2^{n+1}$ et $c_n = n^2 - 9n + 2$.

a. Inès calcule a_0, a_1 et a_2, puis affirme que (a_n) est arithmétique. A-t-elle raison ? Justifie.

b. Montre que (b_n) est géométrique. Précise sa raison et son premier terme b_0.

Ex. 3 (suite)

c. Hugo écrit $c_{n+1} = n^2 - 9n + 3$. Corrige son erreur, puis calcule $c_{n+1} - c_n$.

d. Déduis-en le sens de variation de (c_n), en précisant le rang à partir duquel il est valable.

Ex. 4 ★★☆ **Médiathèque de Rodez : deux modèles d'adhérents** — En 2025, une médiathèque de Rodez compte 2 400 adhérents. Modèle A : 150 adhérents de plus chaque année. Modèle B : 5 % d'adhérents de plus chaque année. On note a_n et b_n les nombres d'adhérents de l'année $2025 + n$ selon chaque modèle. Arrondis les effectifs à l'unité et les pourcentages à 0,01 %.

a. Exprime a_n et b_n en fonction de n.

b. Quel rang n correspond à l'année 2032 ? Calcule a_n et b_n pour cette année.

c. Calcule la variation relative de a_n de 2025 à 2026, puis de 2026 à 2027. Le modèle A suit-il une évolution en pourcentage constante ? Justifie.

d. À la calculatrice, détermine la première année où le modèle B donne plus d'adhérents que le modèle A.

e. Chaque adhérent paie 12 € par an. Selon le modèle A, quelle somme totale la médiathèque encaisse-t-elle de 2027 à 2040 inclus ?

Ex. 5 ★★★ **Forage d'un puits à Millau** — À Millau, une entreprise fore un puits. Le 1er mètre coûte 120 €, et chaque mètre coûte 15 € de plus que le précédent. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note c_n le coût (en euros) du n-ième mètre : ainsi $c_1 = 120$. Donne les valeurs exactes.

a. Exprime c_n en fonction de n. Léa propose $c_n = 120 + 15n$. A-t-elle raison ? Justifie.

b. Calcule le coût total du forage du 11e au 30e mètre inclus.

c. Pour $n \geqslant 1$, on note S_n le coût total des n premiers mètres. Montre que $S_n = 7{,}5n^2 + 112{,}5n$.

d. Le budget est de 12 000 €. Quelle profondeur maximale, en mètres entiers, peut-on forer ? Justifie.

e. Pour $n \geqslant 1$, on pose $m_n = \frac{S_n}{n}$ (coût moyen d'un mètre). Étudie le sens de variation de (m_n).

Ex. 6 ★★★ **Une jeune entreprise de Brest : réduire le déficit** — En 2025, une jeune entreprise de Brest a un résultat de $-80\,000$ € (c'est un déficit). Modèle A : le déficit diminue de 12 % par an. Modèle B : le résultat augmente de $7\,000$ € par an. On note r_n (modèle A) et d_n (modèle B) le résultat en euros de l'année $2025+n$. Arrondis les montants à l'euro.

(a) Justifie que (r_n) est géométrique. Donne sa raison et exprime r_n en fonction de n.

(b) Malo affirme : « La raison est comprise entre 0 et 1, donc (r_n) est décroissante. » A-t-il raison ? Justifie par le calcul de $r_{n+1}-r_n$.

(c) Avec le modèle A, en quelle année le déficit devient-il inférieur à $20\,000$ € pour la première fois ? Justifie.

(d) Exprime d_n en fonction de n. Lequel des deux modèles a une variation absolue constante ? une variation relative constante ? Justifie.

(e) L'entreprise est bénéficiaire quand son résultat est strictement positif. Selon chaque modèle, en quelle année l'est-elle pour la première fois ? Justifie.

2. *Limite d'une suite : opérations et formes indéterminées*

À retenir : « $+\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ » ne sont pas des résultats : je factorise par le terme dominant et je nomme la règle. Ex. : $\frac{3n^2+1}{n^2-2}=\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}\to 3$ par quotient.

Ex. 7 ★☆☆ **Automatismes : limites par opérations** — Chaque suite est définie pour tout entier $n\geqslant 1$. Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en nommant la règle utilisée (par somme, par produit, par quotient).

(a) $u_n=3+\dfrac{1}{n}$ (b) $u_n=1-5n^2$

(c) $u_n=\sqrt{n}+n^2$ (d) $u_n=\dfrac{7}{n^2+1}$

(e) $u_n=\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\times\sqrt{n}$ (f) $u_n=4-\dfrac{3}{\sqrt{n}}$

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : forme indéterminée ou pas ?** — Chaque suite est définie pour tout entier $n\geqslant 1$. Calcule la limite de chaque morceau. Si tu obtiens une forme indéterminée, dis laquelle ; sinon, donne la limite en nommant la règle.

(a) $u_n=-n^2-\sqrt{n}$ (b) $u_n=n^2-\sqrt{n}$

(c) $u_n=\dfrac{1}{n}\times n^2$ (d) $u_n=\dfrac{5+\frac{1}{n}}{n}$

(e) $u_n=\dfrac{n+2}{n^2+1}$ (f) $u_n=\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\times n^3$

(g) $u_n=\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

Ex. 9 ★★☆ **Lever une forme indéterminée** — Chaque suite est définie pour tout entier $n\geqslant 1$ et conduit à une forme indéterminée. Lève-la en factorisant ou en développant, puis donne la limite en nommant la règle.

(a) Détermine la limite de $a_n=\frac{6n^2+n-1}{3n^2-4}$.

(b) Détermine la limite de $b_n=4n^2-n^3$.

(c) Détermine la limite de $c_n=\frac{8n+3}{2n^2+n}$.

(d) Détermine la limite de $d_n=\sqrt{n}-3n$ en factorisant par n.

(e) Détermine la limite de $e_n=\frac{2}{n}\times(5n-1)$.

Ex. 10 ★★☆ **Conjecture trop rapide et erreur sur « $\infty-\infty$ »** — Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n\geqslant 0$ par $u_n=n^2-30n$. Inès calcule quelques premiers termes à la calculatrice et conjecture que (u_n) tend vers $-\infty$.

(a) Calcule u_1, u_5 et u_{10}.

(b) Calcule u_{40} et u_{100}. Que penses-tu de la conjecture d'Inès ? Justifie.

(c) Malo écrit : « $n^2\to+\infty$ et $30n\to+\infty$, donc $u_n\to 0$ car $\infty-\infty=0$ ». Explique son erreur.

(d) Pour $n\geqslant 1$, factorise u_n par n^2, puis détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en nommant la règle.

(e) Sam affirme : « (u_n) tend vers l'infini, donc elle converge ». Corrige sa phrase.

Ex. 11 ★★★ **Vrai ou faux sur les opérations et les formes indéterminées** — Toutes les suites sont définies pour tout entier $n\geqslant 1$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie. Une affirmation générale fausse se réfute par un contre-exemple. Nomme chaque règle utilisée.

(a) « Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(b) « La suite définie par $a_n=\frac{n^2+1}{n}-n$ est convergente, bien que $\frac{n^2+1}{n}$ et n tendent vers $+\infty$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) « Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=0$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) « La suite définie par $b_n=\frac{4n-3n^3}{n^2+6}$ tend vers $+\infty$, car son numérateur a le plus grand degré. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Proportion d'abonnés payants d'une application** — Une application de cours de guitare a été lancée à Rennes. n mois après son lancement ($n\geqslant 1$), elle compte $t_n=500n^2+2000$ utilisateurs, dont $p_n=300n^2+40n$ abonnés payants. On note $r_n=\frac{p_n}{t_n}$ la proportion d'abonnés payants. Arrondis à 0,001 sauf mention contraire.

(a) Calcule r_1 et r_{10}.

Ex. 12 (suite)

(b) On note $N_n = t_n - p_n$ le nombre d'utilisateurs non payants. Exprime N_n en fonction de n, puis détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} N_n$.

(c) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$. La suite (r_n) est-elle convergente ? Interprète le résultat.

(d) On considère le programme :

```
n = 1
r = (300*n**2 + 40*n)/(500*n**2 + 2000)
while r < 0.59:
    n = n + 1
    r = (300*n**2 + 40*n)/(500*n**2 + 2000)
print(n)
```

Quelle valeur affiche-t-il ? Justifie avec deux valeurs de r_n arrondies à 0,0001.

(e) L'équipe affirme : « r_n reste toujours inférieur à sa limite ℓ ». Vrai ou faux ? Justifie en étudiant le signe de $r_n - \ell$.

3. *Limite de q^n et des suites géométriques*

À retenir : Si $0 < q < 1$, $q^n \to 0$; si $q > 1$, $q^n \to +\infty$ (même $1{,}02^n$) ; si $q = 1$, $q^n = 1$. Pour $u_0 \times q^n$, le signe de u_0 compte. Avec plusieurs puissances, factorise par la plus grande : $4^n - 3^n = 4^n\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

Ex. 13 ★☆☆ **Automatismes : limite de q^n** — Détermine la limite de chaque suite. Écris d'abord la suite sous la forme q^n si besoin, puis écris la condition sur q.

(a) $0{,}7^n$ (b) $\dfrac{3^n}{4^n}$ (c) $2^n \times 0{,}5^n$

(d) $1{,}01^n$ (e) $\dfrac{1}{0{,}25^n}$ (f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Ex. 14 ★☆☆ **Automatismes : suites géométriques et pourcentages** — Justifie chaque limite en citant la règle du cours (limite de q^n avec la condition sur q, produit, somme).

(a) Une quantité baisse de 12 % chaque année. Donne la raison q associée, puis la limite de q^n.

(b) Un capital augmente de 0,5 % chaque mois. Donne la raison q associée, puis la limite de q^n.

(c) Détermine la limite de $u_n = -2 \times 1{,}3^n$.

(d) Détermine la limite de $v_n = 5 - 3 \times 0{,}8^n$.

(e) Détermine la limite de $w_n = 7 \times 1{,}1^n + 2$.

(f) Compare la limite de $0{,}9^n$ et celle de $0{,}9 \times n$.

Ex. 15 ★★☆ **Vrai ou faux : puissances et formes indéterminées** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie par un calcul et une règle du cours.

(a) « La suite $\left(\frac{0{,}6^n}{0{,}4^n}\right)$ tend vers 0, car $0{,}6^n$ et $0{,}4^n$ tendent tous les deux vers 0. »

Ex. 15 (suite)

(b) « $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1$, car le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$. »

(c) « La suite $u_n = 2^n - 3 \times 6^n$ tend vers $+\infty$, car 2^n et 6^n tendent tous les deux vers $+\infty$. »

(d) « La suite $v_n = \frac{3\times5^n - 2^n}{5^n + 1}$ converge vers 3. »

Ex. 16 ★★☆ **Deux modèles pour une harde de cerfs** — Dans une réserve des Vosges, on estime le nombre de cerfs n années après 2025. Modèle A : $a_n = 800 \times 1{,}03^n$. Modèle B : $b_n = 1500 - 700 \times 0{,}9^n$. Arrondis les effectifs à l'unité.

(a) Quel pourcentage d'évolution annuelle le modèle A traduit-il ? Calcule a_{10}.

(b) Détermine la limite de (a_n). Interprète-la dans le contexte.

(c) Détermine la limite de (b_n). Interprète-la dans le contexte.

(d) Résous l'inéquation $a_n > 1500$ à l'aide de la fonction ln. Donne le plus petit entier n qui convient.

(e) Ben affirme : « À long terme, le modèle A prévoit plus de cerfs que le modèle B. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 17 ★★★ **Quand deux puissances font la course** — On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5^n - 4^n$. Arrondis à 10^{-2} si besoin.

(a) Calcule u_1 et u_2. Mathis affirme : « $5^n - 4^n = 1^n = 1$ pour tout n ». A-t-il raison ? Justifie.

(b) Donne les limites de 5^n et de 4^n. Explique pourquoi elles ne suffisent pas pour obtenir directement la limite de (u_n).

(c) Montre que, pour tout n, $u_n = 5^n\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$. Déduis-en la limite de (u_n).

(d) On pose $t_n = \frac{u_n}{5^{n+1}}$. Écris t_n à l'aide de $\left(\frac{4}{5}\right)^n$, puis détermine la limite de (t_n).

(e) Détermine par le calcul, avec ln, le plus petit entier n tel que $4^n \leqslant 0{,}01 \times 5^n$.

Ex. 18 ★★★ **Audience d'un podcast : stabilisation ou explosion ?** — Chloé lance un podcast à Rennes. Elle compare deux modèles du nombre d'auditeurs n mois après le lancement. Modèle 1 : $p_n = 2000 \times 1{,}02^n$. Modèle 2 : $r_n = 6000 - 4000 \times 0{,}85^n$. Arrondis les effectifs à l'unité.

(a) Quelle évolution mensuelle en pourcentage le modèle 1 traduit-il ? Arthur affirme : « 1,02 est proche de 1, donc l'audience va presque se stabiliser ». A-t-il raison ? Justifie.

(b) Calcule r_0, puis détermine la limite de (r_n). Interprète ce résultat pour l'audience.

(c) Pour calculer r_{12}, Arthur remplace $0{,}85^{12}$ par $0{,}85 \times 12$. Explique son erreur, puis calcule r_{12}.

(d) On pose $d_n = r_n - p_n$. Détermine la limite de (d_n) et interprète-la en comparant les deux modèles.

Ex. 18 **(suite)**

(e) Recopie et complète le programme pour qu'il affiche le plus petit n tel que $p_n > 6000$. Donne ce n.

```
n = 0
p = 2000
while ...:
    n = n + 1
    p = ...
print(n)
```

4. *Comparaison et théorème des gendarmes*

À retenir : Limite infinie : une seule inégalité, dans le bon sens ($u_n \geqslant v_n$ et $v_n \to +\infty$). Limite finie : deux bornes de même limite (gendarmes). $u_n < 3$ pour tout n donne $\lim u_n \leqslant 3$. Multiplier par un négatif change le sens.

Ex. 19 ★☆☆ **Automatismes : encadrer un terme qui oscille** — Les suites sont définies pour tout entier $n \geqslant 1$. Nomme le théorème utilisé pour chaque limite.

(a) Complète l'encadrement $\ldots \leqslant -5\cos n \leqslant \ldots$, valable pour tout entier n.

(b) Encadre $\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$, puis détermine sa limite.

(c) Majore $t_n = -n^2 - 3\cos n$, puis détermine sa limite.

(d) Encadre $3 + (-1)^n$. Déduis-en un encadrement de $p_n = \dfrac{3+(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$, puis sa limite.

(e) Montre que $z_n = 3n + 2\cos n \geqslant 3n - 2$, puis détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Ex. 20 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur les comparaisons** — (u_n) désigne une suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$. Justifie chaque réponse : nomme une règle si c'est vrai, donne un contre-exemple si c'est faux.

(a) Si $u_n \geqslant n^2 - 4n$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Vrai ou faux ?

(b) Si $u_n \leqslant n^2$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Vrai ou faux ?

(c) Si $u_n < 3$ pour tout n et si (u_n) converge, alors sa limite est strictement inférieure à 3. Vrai ou faux ?

(d) Si $1 \leqslant u_n \leqslant 6$ pour tout n, alors (u_n) converge. Vrai ou faux ?

(e) Si $u_n \leqslant 7 - 2n$ pour tout $n \geqslant 100$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Vrai ou faux ?

(f) Si (u_n) converge vers ℓ et si $u_n \geqslant 2$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geqslant 2$. Vrai ou faux ?

Ex. 21 ★★☆ **Gendarmes et forme indéterminée** — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \dfrac{6n+5\sin n}{2n+3}$.

(a) Justifie que, pour tout n, $\dfrac{6n-5}{2n+3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{6n+5}{2n+3}$.

(b) Détermine la limite de chacune des deux bornes de cet encadrement.

(c) Déduis-en la limite de la suite (u_n).

(d) Écris $3 - u_n$ sous la forme d'un seul quotient, puis montre que $u_n < 3$ pour tout n.

(e) Hugo affirme : « La majoration $u_n \leqslant \dfrac{6n+5}{2n+3}$ suffisait pour trouver la limite. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 22 ★★☆ **Comparaison : corriger un raisonnement** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = n^2 - 3n \times (-1)^n$. Malik écrit : « $(-1)^n \geqslant -1$, donc $-3n \times (-1)^n \geqslant 3n$, donc $u_n \geqslant n^2 + 3n$. »

(a) Repère l'erreur de Malik, puis écris une minoration correcte de u_n.

(b) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 3n)$, puis déduis-en la limite de (u_n).

(c) Calcule u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle croissante ? Justifie.

(d) Pour $n \geqslant 1$, on pose $w_n = 4\sin n - \sqrt{n}$. Montre que $w_n \leqslant 4 - \sqrt{n}$, puis détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

(e) Détermine un rang à partir duquel on est sûr que $w_n < 0$.

Ex. 23 ★★★ **Abonnés avec fluctuations : gendarmes et seuil** — Une application de covoiturage lancée à Rennes compte u_n milliers d'abonnés n mois après son lancement. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 20 - 15 \times 0{,}7^n + \dfrac{2\sin n}{n+1}$. Le terme en sinus traduit des fluctuations. Arrondis à 10^{-3} si nécessaire.

(a) Calcule u_0 et u_1.

(b) Justifie que, pour tout $n \geqslant 0$, $20 - 15 \times 0{,}7^n - \dfrac{2}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 20 - 15 \times 0{,}7^n + \dfrac{2}{n+1}$.

(c) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en nommant chaque règle, puis interprète ce résultat dans le contexte.

(d) Nina écrit : « Pour tout n, $u_n < 20 + \dfrac{2}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < 20$. » Justifie son inégalité, puis corrige sa conclusion.

(e) Détermine par le calcul avec ln le plus petit entier N tel que $15 \times 0{,}7^N \leqslant 0{,}5$. Justifie ensuite que $u_n \geqslant 19$ pour tout $n \geqslant N$.

Ex. 24 ★★★ **Comparer, encadrer… ou ne pas conclure** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 3n - 5 + 4\cos n$, $w_n = (-1)^n \times \frac{n}{n+2}$ et $z_n = (n^2 - 10n)(2 + \cos n)$. Arrondis à 10^{-2} si nécessaire.

(a) Yanis écrit : « $\cos n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant 3n - 1$, qui tend vers $+\infty$;
Donc $v_n \to +\infty$. » Explique pourquoi il ne peut pas conclure.

(b) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ par une justification correcte.

(c) Zoé obtient $-\frac{n}{n+2} \leqslant w_n \leqslant \frac{n}{n+2}$. Calcule les limites des deux bornes. Peut-elle conclure avec le théorème des gendarmes ? Justifie.

(d) Calcule w_{100} et w_{101}. Que peux-tu conjecturer sur la suite (w_n) ?

(e) Compare z_5 à $5^2 - 10 \times 5$. Montre que $z_n \geqslant n^2 - 10n$ pour $n \geqslant 10$, puis détermine la limite de (z_n).

5. *Suites arithmético-géométriques : suite auxiliaire et modèle*

À retenir : $u_{n+1} = au_n + b$: $\ell = a\ell + b$, $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a, $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$. Si $0 < a < 1$, $u_n \to \ell$ quel que soit u_0. Ex. : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$ donne $\ell = 6$. Piège : $u_n \neq u_0 a^n + b$.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : traduire, équilibre et suite auxiliaire** — Dans chaque item, ℓ désigne la valeur de la suite constante solution et $v_n = u_n - \ell$ la suite auxiliaire. Donne des valeurs exactes.

(a) Chaque mois, un stock u_n perd 12 % puis reçoit 300 unités. Écris u_{n+1} en fonction de u_n.

(b) Chaque mois, un stock u_n reçoit 300 unités puis perd 12 %. Écris u_{n+1} sous la forme $au_n + b$.

(c) Calcule ℓ pour la relation $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 8$.

(d) Vrai ou faux ? La suite constante égale à 25 vérifie $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 5$. Justifie.

(e) On sait que $\ell = 30$ pour la relation $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 9$. Avec $u_0 = 10$, calcule v_0.

(f) Pour $u_{n+1} = 1{,}25u_n + 10$, calcule ℓ puis écris v_n en fonction de u_n, sans parenthèses.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : forme explicite, limite et variations** — Les suites sont définies pour tout entier naturel n. Donne des valeurs exactes.

(a) La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 50$ est géométrique de raison 0,8, avec $v_0 = 30$. Exprime u_n en fonction de n.

(b) On a $u_0 = 50$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 10$. Sofia propose $u_n = 50 \times 0{,}5^n + 10$. Calcule u_2 de deux façons. A-t-elle raison ?

(c) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour $u_n = 12 - 5 \times 0{,}4^n$.

Ex. 26 (suite)

(d) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ pour $w_n = -3 + 2 \times 1{,}1^n$.

(e) On a $u_n = 60 - 15 \times 0{,}9^n$. Étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis donne le sens de variation de (u_n).

(f) Deux suites vérifient $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 40$: l'une a $u_0 = 100$, l'autre $u_0 = 300$. Vrai ou faux ? Elles n'ont pas la même limite. Justifie.

Ex. 27 ★★☆ **Les abonnés de la newsletter de Nora** — Le 1er janvier 2026, la newsletter de Nora compte 1 200 abonnés. Chaque mois, 10 % des abonnés se désinscrivent et 450 nouveaux s'inscrivent. On note u_n le nombre d'abonnés n mois après le 1er janvier 2026, avec $u_0 = 1\,200$.

(a) Justifie que $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 450$, puis calcule u_1.

(b) On pose $v_n = u_n - 4\,500$. En partant de $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,500$, démontre que (v_n) est géométrique. Précise sa raison et v_0.

(c) Exprime u_n en fonction de n. Donne le nombre d'abonnés au bout de 12 mois, arrondi à l'unité.

(d) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Nora affirme qu'elle dépassera un jour 5 000 abonnés. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 28 ★★☆ **Un étang près de Dijon : deux modèles de pollution** — Le 1er janvier 2026, un étang près de Dijon contient 900 kg de polluant. Chaque année, une usine en rejette 60 kg et une station en élimine 25 %. Modèle A : élimination puis rejet. Modèle B : rejet puis élimination. On note a_n et b_n les quantités (en kg) en $2026 + n$, avec $a_0 = b_0 = 900$.

(a) Écris la relation de récurrence de chaque modèle sous la forme $u_{n+1} = au_n + b$, puis calcule a_1 et b_1.

(b) Calcule la valeur d'équilibre ℓ_A du modèle A et la valeur d'équilibre ℓ_B du modèle B.

(c) À l'aide de la suite auxiliaire $w_n = b_n - \ell_B$, exprime b_n en fonction de n.

(d) Détermine la limite et le sens de variation de (b_n).

(e) Un technicien affirme : « Avec 2 000 kg au départ, le modèle B se stabiliserait plus haut. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 29 ★★★ **Le traitement de Malik : équilibre, seuil et dose** — Malik est hospitalisé à Rennes. Au départ, son sang contient 5 mg d'un médicament. Toutes les 6 heures, son organisme élimine 30 % du médicament présent, puis une infirmière lui injecte 3 mg. On note u_n la quantité (en mg) après n périodes de 6 heures, avec $u_0 = 5$. Arrondis les quantités au millième.

(a) Justifie que $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 3$, puis calcule u_1 et u_2.

(b) Détermine la valeur ℓ de la suite constante solution pour (u_n). Démontre ensuite que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique et donne v_0.

Ex. 29 (suite)

(c) Déduis-en u_n en fonction de n et contrôle ta formule avec u_2. Étudie ensuite le sens de variation de (u_n) et sa limite.

(d) Le traitement est efficace dès que la quantité dépasse 9,9 mg. Détermine par le calcul (avec ln) le nombre minimal de périodes nécessaires, puis la durée en heures.

(e) Le médecin veut que la quantité se stabilise à 12 mg, avec la même élimination de 30 % toutes les 6 heures. Quelle dose d faut-il injecter ? Justifie.

Ex. 30 ★★★ **La population de Saint-Flour : formule, erreur et seuil** — Le 1er janvier 2026, la commune de Saint-Flour compte 6 000 habitants. Chaque année, 4 % des habitants quittent la commune et 150 personnes viennent s'y installer. On note u_n la population au 1er janvier de l'année $2026 + n$, avec $u_0 = 6\,000$. Arrondis les effectifs à l'unité.

(a) Justifie que $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 150$, puis détermine la valeur ℓ de la suite constante solution.

(b) Démontre que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique. Déduis-en u_n en fonction de n, puis estime la population en 2036.

(c) Lucas écrit $u_n = 6\,000 \times 0{,}96^n + 150$ et affirme : « ma formule est juste, je retrouve bien u_1 ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) Étudie le sens de variation de (u_n) et sa limite, puis interprète ces résultats pour la commune.

(e) Complète la condition de la boucle pour que le programme affiche le premier rang n tel que $u_n < 4\,500$. Détermine la valeur affichée, puis l'année correspondante.

```
u = 6000
n = 0
while ........ :
    u = 0.96*u + 150
    n = n + 1
print(n)
```

6. *Suites $u_{n+1} = f(u_n)$: représentation en escalier*

À retenir : Trace $\mathcal{C}_f$ et $y = x$: les termes se lisent sur l'axe des abscisses. Résoudre $f(x) = x$ donne la limite conjecturée ($0{,}5x + 1 = x$ donne 2), sans la prouver. f croissante n'entraîne pas (u_n) croissante : étudie le signe de $f(u_n) - u_n$.

Ex. 31 ★☆☆ **Automatismes : premiers termes et valeur d'équilibre** — Les questions sont indépendantes. Arrondis à 10^{-3} si nécessaire.

(a) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$: calcule u_1 (valeur exacte), puis u_2 et u_3 à la calculatrice.

Ex. 31 (suite)

(b) Pour $f(x) = \sqrt{3x + 4}$, résous l'équation $f(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$.

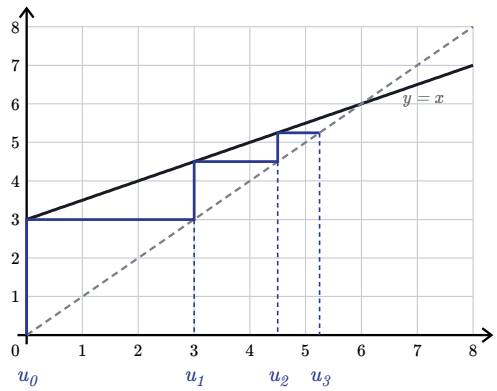
(c) $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 3$: donne la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, nomme le type de cette suite et calcule la valeur c pour laquelle la suite constante égale à c vérifie cette relation.

(d) Pour $f(x) = x^2 - 4x + 6$, combien de points d'intersection la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $y = x$ ont-elles ? Donne leurs abscisses.

(e) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -0{,}4u_n + 7$: la construction donne-t-elle un escalier ou une spirale ? Justifie.

(f) $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2+1}$: étudie le sens de variation de (u_n).

Ex. 32 ★★☆ **Lire un escalier** — On considère $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$. Le graphique montre la courbe de $f : x \mapsto 0{,}5x + 3$, la droite $y = x$ et la construction des premiers termes.



(a) Lis u_1 et u_2 sur le graphique. Sur quel axe les lis-tu ?

(b) Vérifie ces lectures par le calcul, puis calcule u_3.

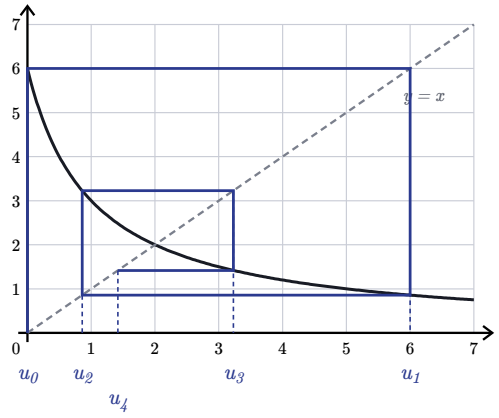
(c) L'escalier monte-t-il ou descend-il ? Quelle conjecture fais-tu sur le sens de variation de (u_n) ?

(d) Lis l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite, puis retrouve-la en résolvant $f(x) = x$.

(e) Inès affirme : « Le graphique prouve que (u_n) converge vers cette abscisse. » A-t-elle raison ? Justifie.

(f) Avec la même fonction f et $u_0 = 8$, calcule u_1 et u_2. L'escalier monte-t-il ou descend-il ?

Ex. 33 ★★☆ **Une spirale, puis un nuage** — On considère $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n+1}$, soit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{6}{x+1}$ sur $[0\,;+\infty[$. Arrondis à 10^{-3}.



(a) À la calculatrice, calcule u_1, u_2, u_3 et u_4.

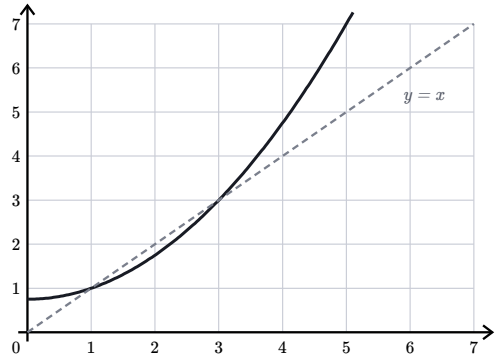
(b) La construction ci-dessus est-elle un escalier ou une spirale ? Explique pourquoi à l'aide des variations de f.

(c) Résous $f(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$, puis énonce une conjecture sur la limite de (u_n).

(d) Léo affirme : « $u_1 > u_0$, donc la suite est croissante. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Représente le nuage des points $(n\,;u_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 4$. Sur quel axe lit-on u_n dans le nuage ? Et dans la spirale ?

Ex. 34 ★★☆ **Même fonction, deux premiers termes** — Soit $f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}75$ sur $[0\,;+\infty[$, une fonction croissante sur cet intervalle. On étudie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 2$, puis avec $u_0 = 4$. Donne des valeurs exactes.



(a) Pour $u_0 = 2$, puis pour $u_0 = 4$, calcule u_1 et u_2.

(b) Résous $f(x) = x$, puis étudie le signe de $f(x) - x$ sur $[0\,;+\infty[$.

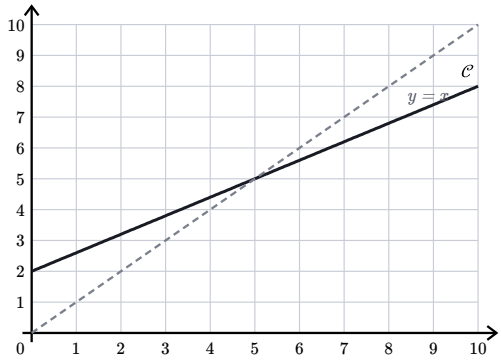
(c) Tom affirme : « f est croissante, donc (u_n) est croissante quel que soit u_0. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Pour $u_0 = 2$, on admet que $1 < u_n < 3$ pour tout n. Déduis-en le sens de variation de (u_n), construis l'escalier sur le graphique et conjecture la limite.

Ex. 34 (suite)

(e) Pour $u_0 = 4$, on admet que $u_n > 3$ pour tout n. Déduis-en le sens de variation de (u_n) et conjecture son comportement à l'aide du graphique.

Ex. 35 ★★★ **Un traitement en escalier** — Chaque jour, le corps de Malo élimine 40 % du médicament présent dans son sang, puis il reçoit une dose de 2 mg. On note u_n la quantité (en mg) au bout de n jours, avec $u_0 = 10$: $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 0{,}6x + 2$. Arrondis à 10^{-2}.



(a) Sur le graphique, construis u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses. Donne une valeur approchée de chacun.

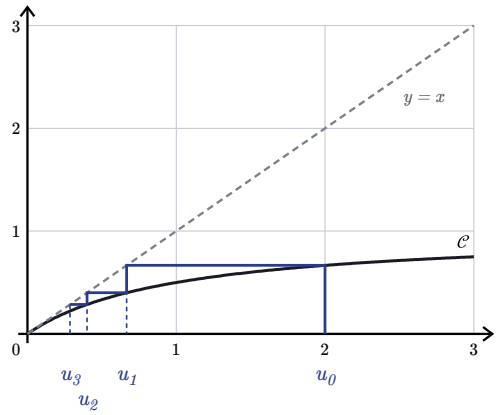
(b) Conjecture le sens de variation et la limite de (u_n). Calcule l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $y = x$.

(c) On pose $v_n = u_n - \ell$, où ℓ est l'abscisse calculée à la question précédente. Montre que (v_n) est géométrique, exprime u_n en fonction de n, puis démontre que (u_n) est décroissante.

(d) Malo affirme : « La quantité baisse chaque jour, donc elle finira par passer sous 4 mg. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Détermine la limite de (u_n). À l'aide de ln, détermine ensuite à partir de combien de jours la quantité dépasse sa limite de moins de 0,01 mg.

Ex. 36 ★★★ **Une suite qui s'écrase sur 0** — On considère $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$, soit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $[0\,;+\infty[$. On admet que $u_n > 0$ pour tout n. Le graphique montre $\mathcal{C}_f$, la droite $y = x$ et l'escalier jusqu'à u_3.



(a) Kenza affirme : « Ce graphique est le nuage des points $(n\,;u_n)$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Conjecture le sens de variation et la limite de (u_n). Justifie la valeur de la limite en résolvant $f(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Exprime $u_{n+1} - u_n$ sous la forme d'un seul quotient. Démontre ensuite le sens de variation de (u_n).

(d) On pose $w_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montre que (w_n) est arithmétique. Déduis-en u_n en fonction de n, puis la limite de (u_n).

(e) Complète les pointillés pour que le programme affiche le plus petit n tel que $u_n < 0{,}001$. Retrouve ce n par le calcul.

```
n = 0
u = 2
while ..........:
    n = n + 1
    u = ..........
print(n)
```

7. *Somme géométrique et recherche de seuil*

À retenir : $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$: $n+1$ termes. Si $0 < q < 1$, $u_0 + \cdots + u_n$ tend vers $\dfrac{u_0}{1-q}$. Seuil : $0{,}5^n < 0{,}01 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5}$ car $\ln 0{,}5 < 0$. Le while teste le contraire de ce qu'on cherche.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : sommes géométriques et leurs limites** — Donne les valeurs exactes, ou arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

(a) Calcule $S = 1 + 0{,}65 + 0{,}65^2 + \cdots + 0{,}65^9$.

(b) (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison 1,5. Calcule $u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.

(c) Pour tout entier naturel n, $w_n = 3 \times 2^n$. Calcule $w_1 + w_2 + \cdots + w_6$.

Ex. 37 (suite)

(d) Combien de termes compte la somme $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{11}$? Calcule-la.

(e) Détermine la limite de $S_n = 1 + 0{,}25 + 0{,}25^2 + \cdots + 0{,}25^n$.

(f) (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison 0,4. Détermine la limite de $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Ex. 38 ★★☆ **Automatismes : trouver un seuil avec ln** — Résous par le calcul avec le logarithme népérien, puis vérifie à la calculatrice avec les rangs $n-1$ et n. Arrondis les quotients à 10^{-2} ; pour les vérifications, garde assez de décimales pour conclure.

(a) Trouve le plus petit entier naturel n tel que $0{,}85^n < 0{,}02$.

(b) Trouve le plus petit entier naturel n tel que $1{,}03^n > 2$.

(c) Trouve le plus petit entier naturel n tel que $1\,500 \times 0{,}92^n \leqslant 40$.

(d) Trouve le plus petit entier naturel n tel que $1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99$.

(e) Lina écrit : « $0{,}7^n < 0{,}05 \iff n < \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7}$ ». Corrige son erreur, puis donne le plus petit n.

Ex. 39 ★★☆ **L'épargne de Noé** — Noé verse 50 € le 1er mois, puis chaque mois 4 % de plus que le mois précédent : au mois k ($k \geqslant 1$), il verse $v_k = 50 \times 1{,}04^{k-1}$ €. On note $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ le total versé au bout de n mois. Arrondis les montants au centime et les quotients à 10^{-2}.

(a) Combien de termes compte S_n ? Montre que $S_n = 1\,250 \times (1{,}04^n - 1)$.

(b) Calcule le total versé au bout d'un an.

(c) Écris une fonction Python `seuil()`, avec une boucle while, qui renvoie le premier mois où le total versé atteint 3 000 €.

(d) Trouve ce mois par le calcul, puis vérifie-le avec les deux rangs voisins.

(e) Le 1er versement a lieu en janvier 2027. En quel mois de quelle année le total atteint-il 3 000 € ?

Ex. 40 ★★☆ **Rebonds d'une balle : vrai ou faux ?** — Une balle est lâchée de 3 m de haut. Après chaque rebond, elle remonte à 60 % de sa hauteur précédente. On note $h_n = 3 \times 0{,}6^n$ la hauteur (en m) après n rebonds ($h_0 = 3$) et $T_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$. Arrondis les quotients à 10^{-2} et les hauteurs à 10^{-4} m. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) « Pour tout entier naturel n, $T_n = 3 \times \dfrac{1-0{,}6^n}{1-0{,}6}$. »

(b) « La hauteur passe sous 1 cm pour la première fois au 12e rebond. »

(c) « La suite (T_n) converge vers 7,5. »

Ex. 40 **(suite)**

(d) « Ce programme renvoie le premier rang n tel que $T_n \geqslant 8$. »

```
def rebonds():
    n = 0
    h = 3
    T = 3
    while T < 8:
        n = n + 1
        h = 0.6 * h
        T = T + h
    return n
```

Ex. 41 ★★★ **La carrière de granit** — Une carrière près de Limoges extrait 40 000 t de granit en 2026, puis 6 % de moins chaque année. On note $u_n = 40\,000 \times 0{,}94^n$ la quantité extraite (en tonnes) l'année $2026 + n$, et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. La réserve est de 600 000 t. Arrondis les tonnages à la tonne et les quotients à 10^{-2}.

(a) Exprime S_n en fonction de n, puis calcule la quantité totale extraite de 2026 à 2035 inclus.

(b) Détermine la limite de la suite (S_n) en justifiant, puis interprète-la dans le contexte.

(c) Détermine par le calcul, avec ln, le plus petit entier n tel que $S_n \geqslant 600\,000$. Vérifie avec S_{n-1} et S_n, puis donne l'année d'épuisement de la réserve.

(d) L'exploitant garde $u_0 = 40\,000$ mais veut que le total extrait ne dépasse jamais 600 000 t. Quelle baisse annuelle minimale doit-il choisir ? Arrondis à 0,01 %.

Ex. 42 ★★★ **Le programme de plantation de Yanis** — Une association d'Annecy plante 900 arbres l'année 1 (en 2027), puis chaque année 10 % d'arbres de moins que l'année précédente. L'année k ($k \geqslant 1$) correspond à $2026 + k$, et on y plante $a_k = 900 \times 0{,}9^{k-1}$ arbres. On note $P_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Arrondis à 10^{-2}.

(a) Exprime P_n en fonction de n, puis vérifie ta formule en calculant P_3 de deux façons.

(b) Pour trouver le premier rang où $P_n \geqslant 8\,000$, Yanis écrit le programme ci-dessous, qui renvoie 1. Explique pourquoi.

```
def seuil():
    n = 1
    a = 900
    P = 0
    while P >= 8000:
        a = 0.9 * a
        P = P + a
        n = n + 1
    return n
```

(c) Le programme contient deux autres erreurs. Repère-les et écris un programme correct.

(d) Calcule P_{20} et P_{21} à la calculatrice. En quelle année l'objectif de 8 000 arbres est-il atteint ?

(e) L'association veut avoir planté 8 000 arbres dès 2040, avec la même baisse de 10 % par an. Combien d'arbres doit-elle planter au minimum l'année 1 ?