Terminale maths complémentaires / Suites numériques — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 1re : suites arithmétiques et géométriques, sens de variation*

Ex. 1 ★☆☆ **Terme général des suites arithmétiques et géométriques**

(a) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = 7 - 3n$.

(b) Le premier terme est v_1 : $v_n = v_1 + (n-1) \times 2{,}5$, donc $v_{20} = 4 + 19 \times 2{,}5 = 51{,}5$
(et non $4 + 20 \times 2{,}5$).

(c) $w_n = w_0 \times q^n$, donc $w_6 = 5 \times 2^6 = 320$.

(d) Le premier terme est t_1 : $t_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, donc $t_5 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{81}{81} = 1$.

(e) $a_8 = a_3 + 5r$, donc $5r = 25 - 10 = 15$ et $r = 3$.

(f) De u_4 à u_{30}, il y a $30 - 4 + 1 = 27$ termes.

Ex. 2 ★☆☆ **Pourcentages et sens de variation d'une suite géométrique**

(a) Augmenter de 6 %, c'est multiplier par $1 + \frac{6}{100}$, donc $q = 1{,}06$
(et non 0,06 ni 1,6).

(b) Diminuer de 6 %, c'est multiplier par $1 - \frac{6}{100}$, donc $q = 0{,}94$
(et non 0,06).

(c) $80 \times 1{,}03 \times 0{,}97 = 79{,}928$, soit environ 79,93 €. On ne revient pas à 80 €.

(d) Variation absolue : $676 - 650 = 26$ €. Variation relative : $\frac{26}{650} = 0{,}04$, soit +4 %.

(e) $u_{n+1} - u_n = -4 \times 1{,}2^n \times (1{,}2 - 1) = -0{,}8 \times 1{,}2^n$. Ce nombre est strictement négatif, donc (u_n) est strictement décroissante, bien que $q > 1$: c'est parce que $u_0 < 0$.

(f) $v_{n+1} - v_n = -2 \times 0{,}9^n \times (0{,}9 - 1) = 0{,}2 \times 0{,}9^n$. Ce nombre est strictement positif, donc (v_n) est strictement croissante, bien que $q < 1$.

Ex. 3 ★★☆ **Nature et variations : repère les erreurs**

(a) $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$: les écarts valent tous les deux 2. Mais $a_3 = 27 - 27 + 12 = 12$ et $a_3 - a_2 = 8 \neq 2$. La différence entre deux termes consécutifs n'est donc pas constante : (a_n) n'est pas arithmétique. Inès a tort, car trois termes ne prouvent rien.

Ex. 3 (suite)

(b) Pour tout n, $b_n > 0$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3 \times 2^{n+2}}{3 \times 2^{n+1}} = 2$. Ce quotient est constant, donc (b_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $b_0 = 3 \times 2 = 6$.

(c) Hugo a calculé $c_n + 1$. En réalité, on remplace n par $n+1$: $c_{n+1} = (n+1)^2 - 9(n+1) + 2 = n^2 + 2n + 1 - 9n - 9 + 2 = n^2 - 7n - 6$.
Donc $c_{n+1} - c_n = (n^2 - 7n - 6) - (n^2 - 9n + 2) = 2n - 8$.

(d) $2n - 8 \geqslant 0 \iff n \geqslant 4$.
Donc (c_n) est croissante à partir du rang 4. Pour $n \leqslant 3$, la différence est négative : la suite décroît de $c_0 = 2$ jusqu'à $c_4 = -18$
(on a d'ailleurs $c_5 = c_4 = -18$).

Ex. 4 ★★☆ **Médiathèque de Rodez : deux modèles d'adhérents**

(a) La variation absolue est constante : (a_n) est arithmétique de raison 150, donc $a_n = 2\,400 + 150n$. La variation relative est constante : (b_n) est géométrique de raison 1,05, donc $b_n = 2\,400 \times 1{,}05^n$.

(b) 2025 correspond à $n = 0$, donc 2032 correspond à $n = 7$. $a_7 = 2\,400 + 150 \times 7 = 3\,450$ et $b_7 = 2\,400 \times 1{,}05^7 \approx 3\,377$. En 2032, le modèle A donne davantage d'adhérents.

(c) $a_0 = 2\,400$, $a_1 = 2\,550$, $a_2 = 2\,700$. De 2025 à 2026 : $\frac{150}{2\,400} = 0{,}0625$, soit 6,25 %. De 2026 à 2027 : $\frac{150}{2\,550} \approx 0{,}0588$, soit environ 5,88 %. Le pourcentage n'est pas constant : le modèle A a une variation absolue constante, pas une variation relative constante.

(d) Tableau de valeurs à la calculatrice : $b_0 = a_0 = 2\,400$, puis $b_n < a_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant 9$; par exemple $a_9 = 3\,750$ et $b_9 \approx 3\,723$. En revanche, $a_{10} = 3\,900$ et $b_{10} \approx 3\,909$, donc $b_{10} > a_{10}$. Le rang 10 correspond à 2035 : c'est la première année où le modèle B dépasse le modèle A.

(e) De 2027 à 2040, les rangs vont de $n = 2$ à $n = 15$, ce qui fait $15 - 2 + 1 = 14$ termes. On a $a_2 = 2\,700$ et $a_{15} = 4\,650$, donc $a_2 + \ldots + a_{15} = 14 \times \frac{2\,700 + 4\,650}{2} = 51\,450$. La somme encaissée est donc $12 \times 51\,450 = 617\,400$ €.

Ex. 5 ★★★ **Forage d'un puits à Millau**

(a) Pour tout $n \geqslant 1$, $c_{n+1} - c_n = 15$: (c_n) est arithmétique de raison 15. Le premier terme est c_1 et non c_0, donc $c_n = c_1 + (n-1) \times 15 = 120 + 15n - 15 = 105 + 15n$. Léa n'a pas raison : sa formule donne $c_1 = 135$ au lieu de 120. Elle a utilisé la formule $u_n = u_0 + n \times r$ alors que la suite commence au rang 1.

(b) $c_{11} = 105 + 15 \times 11 = 270$ et $c_{30} = 105 + 15 \times 30 = 555$. De c_{11} à c_{30}, il y a $30 - 11 + 1 = 20$ termes. Coût total : $20 \times \frac{270+555}{2} = 20 \times 412{,}5 = 8\,250$. Forer du 11^{e} au 30^{e} mètre coûte 8 250 €.

(c) $S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ est une somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique. Donc $S_n = n \times \frac{c_1+c_n}{2} = n \times \frac{120+105+15n}{2} = \frac{225n+15n^2}{2} = 7{,}5n^2 + 112{,}5n$.

(d) (S_n) est croissante, puisque chaque mètre a un coût positif. $S_{33} = 7{,}5 \times 33^2 + 112{,}5 \times 33 = 8\,167{,}5 + 3\,712{,}5 = 11\,880 \leqslant 12\,000$ et $S_{34} = 7{,}5 \times 34^2 + 112{,}5 \times 34 = 8\,670 + 3\,825 = 12\,495 > 12\,000$. Avec 12 000 €, on peut donc forer au maximum 33 mètres.

(e) Pour tout $n \geqslant 1$, $m_n = \frac{7{,}5n^2+112{,}5n}{n} = 7{,}5n + 112{,}5$. Donc $m_{n+1} - m_n = 7{,}5(n+1) + 112{,}5 - 7{,}5n - 112{,}5 = 7{,}5 > 0$. La suite (m_n) est strictement croissante : le coût moyen d'un mètre augmente avec la profondeur. C'est même une suite arithmétique de raison 7,5.

Ex. 6 ★★★ **Une jeune entreprise de Brest : réduire le déficit**

(a) Diminuer le déficit de 12 %, c'est le multiplier par $1 - 0{,}12 = 0{,}88$, et le résultat aussi (il reste négatif). Donc pour tout n, $r_{n+1} = 0{,}88 \times r_n$: (r_n) est géométrique de raison $q = 0{,}88$ (et non 0,12) et de premier terme $r_0 = -80\,000$, l'année 2025 correspondant à $n = 0$. Ainsi $r_n = -80\,000 \times 0{,}88^n$.

(b) $r_{n+1} - r_n = -80\,000 \times 0{,}88^{n+1} + 80\,000 \times 0{,}88^n = -80\,000 \times 0{,}88^n \times (0{,}88 - 1) = 9\,600 \times 0{,}88^n$. Comme $0{,}88^n > 0$, on a $r_{n+1} - r_n > 0$ pour tout n. La suite (r_n) est strictement croissante. Malo a tort : $0 < q < 1$ donne une suite décroissante seulement si le premier terme est positif. Ici $r_0 < 0$.

Ex. 6 (suite)

(c) On cherche le plus petit n tel que $r_n > -20\,000$. À la calculatrice, $r_{10} = -80\,000 \times 0{,}88^{10} \approx -22\,280$ et $r_{11} = -80\,000 \times 0{,}88^{11} \approx -19\,606$. Comme (r_n) est croissante, le premier rang qui convient est $n = 11$. Le déficit passe sous 20 000 € pour la première fois en $2025 + 11 = 2036$.

(d) Le résultat augmente de 7 000 € par an : $d_{n+1} = d_n + 7\,000$. Donc (d_n) est arithmétique de raison 7 000 et de premier terme $d_0 = -80\,000$, d'où $d_n = -80\,000 + 7\,000n$. Modèle B : la variation absolue est constante (+7 000 € par an), mais pas la variation relative : $\frac{d_1}{d_0} = \frac{-73\,000}{-80\,000} = 0{,}9125$ alors que $\frac{d_2}{d_1} = \frac{-66\,000}{-73\,000} \approx 0{,}904$. Modèle A : $\frac{r_{n+1}}{r_n} = 0{,}88$ pour tout n, donc la variation relative est constante (-12 % du déficit chaque année). En revanche, la variation absolue $r_{n+1} - r_n = 9\,600 \times 0{,}88^n$ n'est pas constante (9 600 puis 8 448). Conclusion : B a une variation absolue constante, A une variation relative constante.

(e) Modèle B : $d_n > 0 \iff 7\,000n > 80\,000 \iff n > \frac{80}{7} \approx 11{,}43$. Le plus petit entier qui convient est $n = 12$ ($d_{11} = -3\,000$ et $d_{12} = 4\,000$) : l'entreprise est bénéficiaire en $2025 + 12 = 2037$. Modèle A : pour tout n, $0{,}88^n > 0$, donc $r_n = -80\,000 \times 0{,}88^n < 0$. Le résultat reste toujours négatif : l'entreprise n'est jamais bénéficiaire, même si son déficit diminue chaque année.

2. *Limite d'une suite : opérations et formes indéterminées*

Ex. 7 ★★★ **Automatismes : limites par opérations**

(a) $\frac{1}{n} \to 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3 + 0 = 3$.

(b) $n^2 \to +\infty$, donc $-5n^2 \to -\infty$ par produit ($-5 < 0$), puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(c) $\sqrt{n} \to +\infty$ et $n^2 \to +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) $n^2 + 1 \to +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(e) $2 + \frac{1}{n} \to 2$ et $\sqrt{n} \to +\infty$, donc par produit ($2 > 0$) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(f) $\sqrt{n} \to +\infty$, donc $\frac{3}{\sqrt{n}} \to 0$ par quotient, puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : forme indéterminée ou pas ?**

(a) $-n^2 \to -\infty$ et $-\sqrt{n} \to -\infty$: pas de FI (« $-\infty - \infty$ » n'est pas indéterminé), par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(b) $n^2 \to +\infty$ et $-\sqrt{n} \to -\infty$: forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Il faut transformer l'expression.

(c) $\frac{1}{n} \to 0$ et $n^2 \to +\infty$: forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

(d) Le numérateur tend vers 5, le dénominateur vers $+\infty$: pas de FI, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(e) Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

(f) $2 - \frac{1}{n} \to 2$ et $n^3 \to +\infty$: pas de FI, par produit ($2 > 0$) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(g) $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n^2} \to 0$: forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Ex. 9 ★★☆ **Lever une forme indéterminée**

(a) En factorisant par n^2 en haut et en bas : $a_n = \frac{n^2\left(6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{4}{n^2}}$. Le numérateur tend vers 6 et le dénominateur vers 3, donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$. Même degré : c'est le rapport des coefficients dominants.

(b) $4n^2 \to +\infty$ et $-n^3 \to -\infty$: forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise par le terme de plus haut degré : $b_n = n^3\left(\frac{4}{n} - 1\right)$. Comme $\frac{4}{n} \to 0$, la parenthèse tend vers -1 par somme ; comme $n^3 \to +\infty$, par produit ($-1 < 0$) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$.

(c) $c_n = \frac{n\left(8+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{8+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}$. Le quotient tend vers 4 et $\frac{1}{n} \to 0$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

(d) $d_n = n\left(\frac{\sqrt{n}}{n} - 3\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 3\right)$. On a $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, donc la parenthèse tend vers -3 par somme ; comme $n \to +\infty$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty$.

(e) On développe : $e_n = \frac{10n}{n} - \frac{2}{n} = 10 - \frac{2}{n}$. Comme $\frac{2}{n} \to 0$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 10$: la forme « $0 \times \infty$ » donnait ici une limite finie.

Ex. 10 ★★☆ **Conjecture trop rapide et erreur sur « $\infty - \infty$ »**

(a) $u_1 = 1 - 30 = -29$; $u_5 = 25 - 150 = -125$; $u_{10} = 100 - 300 = -200$.

(b) $u_{40} = 1\,600 - 1\,200 = 400$ et $u_{100} = 10\,000 - 3\,000 = 7\,000$. Les termes redeviennent positifs puis grandissent : la conjecture d'Inès est fausse. Elle s'appuyait sur des valeurs de n trop petites.

Ex. 10 (suite)

(c) « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée, pas un résultat : on ne peut rien conclure sans transformer l'expression. Écrire « $\infty - \infty = 0$ » est faux.

(d) Pour $n \geqslant 1$: $u_n = n^2\left(1 - \frac{30}{n}\right)$. On a $\frac{30}{n} \to 0$, donc $1 - \frac{30}{n} \to 1$ par somme, et $n^2 \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(e) Il faut préciser le signe : (u_n) tend vers $+\infty$. Une suite converge seulement si elle a une limite finie. Ici la limite est infinie, donc (u_n) est divergente.

Ex. 11 ★★★ **Vrai ou faux sur les opérations et les formes indéterminées**

(a) Faux. « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée, pas un résultat. Contre-exemple : $u_n = n + 7$ et $v_n = n$. Les deux suites tendent vers $+\infty$, mais $u_n - v_n = 7$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 7 \neq 0$. L'affirmation est fausse.

(b) Vrai. $\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \to +\infty$ et $-n \to -\infty$: forme indéterminée « $+\infty - \infty$ », on ne peut pas conclure directement. On simplifie : $a_n = n + \frac{1}{n} - n = \frac{1}{n}$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. La limite est finie, donc (a_n) est convergente : l'affirmation est vraie.

(c) Faux. « $0 \times \infty$ » est une forme indéterminée. Contre-exemple : $u_n = \frac{5}{n} \to 0$ et $v_n = n \to +\infty$. Alors $u_n \times v_n = 5$ pour tout n, donc la limite vaut $5 \neq 0$. L'affirmation est fausse.

(d) Faux. Le numérateur est lui-même une forme « $+\infty - \infty$ », et le dénominateur tend vers $+\infty$. On factorise par n^3 en haut et par n^2 en bas : $b_n = \frac{n^3\left(\frac{4}{n^2}-3\right)}{n^2\left(1+\frac{6}{n^2}\right)} = n \times \frac{\frac{4}{n^2}-3}{1+\frac{6}{n^2}}$. Par somme puis par quotient, la fraction tend vers -3. Comme $n \to +\infty$, par produit ($-3 < 0$) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$. Le degré dit que la limite est infinie, mais c'est le coefficient dominant -3 qui donne le signe : l'affirmation est fausse.

Ex. 12 ★★★ **Proportion d'abonnés payants d'une application**

(a) $r_1 = \frac{300+40}{500+2000} = \frac{340}{2500} = 0{,}136$. $r_{10} = \frac{30\,000+400}{50\,000+2000} = \frac{30\,400}{52\,000} \approx 0{,}585$.

Ex. 12 **(suite)**

(b) $N_n = 500n^2 + 2000 - 300n^2 - 40n = 200n^2 - 40n + 2000$. On a $200n^2 \to +\infty$ et $-40n \to -\infty$: c'est la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On factorise par n^2 : $N_n = n^2\left(200 - \frac{40}{n} + \frac{2000}{n^2}\right)$. Par somme, la parenthèse tend vers 200. Comme $n^2 \to +\infty$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} N_n = +\infty$. Le nombre d'utilisateurs non payants augmente sans limite.

(c) On a la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par n^2 en haut et en bas : $r_n = \frac{n^2\left(300+\frac{40}{n}\right)}{n^2\left(500+\frac{2000}{n^2}\right)} = \frac{300+\frac{40}{n}}{500+\frac{2000}{n^2}}$. Par somme, le numérateur tend vers 300 et le dénominateur vers 500. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{300}{500} = 0{,}6$. La suite (r_n) est donc convergente : à long terme, environ 60 % des utilisateurs sont des abonnés payants.

(d) Le programme affiche le premier n tel que $r_n \geqslant 0{,}59$. $r_{11} = \frac{36\,740}{62\,500} \approx 0{,}5878 < 0{,}59$ et $r_{12} = \frac{43\,680}{74\,000} \approx 0{,}5903 \geqslant 0{,}59$. Le programme affiche donc 12 : à partir du 12e mois, au moins 59 % des utilisateurs paient.

(e) $\ell = 0{,}6$. $r_n - 0{,}6 = \frac{300n^2+40n-0{,}6(500n^2+2000)}{500n^2+2000} = \frac{40n-1200}{500n^2+2000}$. Le dénominateur est positif, donc $r_n - 0{,}6$ est du signe de $40n - 1200$. Ce nombre est strictement positif dès que $n > 30$. Par exemple, $r_{31} = \frac{289\,540}{482\,500} \approx 0{,}60008 > 0{,}6$. L'affirmation est fausse : à partir du 31e mois, la proportion dépasse sa limite, et elle s'en rapproche par le haut.

3. *Limite de q^n et des suites géométriques*

Ex. 13 ★☆☆ **Automatismes : limite de q^n**

(a) $0 < 0{,}7 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$.

(b) $\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $0 < \frac{3}{4} < 1$, donc la limite vaut 0.

(c) $2^n \times 0{,}5^n = (2 \times 0{,}5)^n = 1^n = 1$ pour tout n : la suite est constante et sa limite vaut 1.

(d) $1{,}01 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}01^n = +\infty$, même si 1,01 est proche de 1.

(e) $\frac{1}{0{,}25^n} = \left(\frac{1}{0{,}25}\right)^n = 4^n$ et $4 > 1$, donc la limite vaut $+\infty$.

(f) $0 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Ex. 14 ★☆☆ **Automatismes : suites géométriques et pourcentages**

(a) Une baisse de 12 % donne $q = 1 - \frac{12}{100} = 0{,}88$. Comme $0 < 0{,}88 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}88^n = 0$.

Ex. 14 **(suite)**

(b) Une hausse de 0,5 % donne $q = 1 + \frac{0{,}5}{100} = 1{,}005$. Comme $1{,}005 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}005^n = +\infty$: la hausse est faible, mais elle finit par tout dépasser.

(c) $1{,}3 > 1$, donc $1{,}3^n \to +\infty$. Comme $-2 < 0$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(d) $0 < 0{,}8 < 1$, donc $0{,}8^n \to 0$. Par produit, $3 \times 0{,}8^n \to 0$, puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5 - 0 = 5$.

(e) $1{,}1 > 1$, donc $1{,}1^n \to +\infty$. Par produit (avec $7 > 0$), $7 \times 1{,}1^n \to +\infty$, puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

(f) $0 < 0{,}9 < 1$, donc $0{,}9^n \to 0$. En revanche, $0{,}9 \times n$ n'est pas une puissance : $n \to +\infty$ et $0{,}9 > 0$, donc par produit $0{,}9 \times n \to +\infty$. Il ne faut pas confondre q^n et $n \times q$.

Ex. 15 ★★☆ **Vrai ou faux : puissances et formes indéterminées**

(a) Faux. $0 < 0{,}6 < 1$ et $0 < 0{,}4 < 1$, donc les deux puissances tendent vers 0 : « $\frac{0}{0}$ » est une forme indéterminée. On réécrit : $\frac{0{,}6^n}{0{,}4^n} = \left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)^n = 1{,}5^n$. Comme $1{,}5 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}5^n = +\infty$: la suite diverge vers $+\infty$.

(b) Faux. $\frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3\times 3^n} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, donc par produit la limite vaut 0. Le quotient « $\frac{\infty}{\infty}$ » est une forme indéterminée : on ne peut pas conclure directement.

(c) Faux. « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée. On factorise par la plus grande puissance, 6^n : $u_n = 6^n\left(\left(\frac{2}{6}\right)^n - 3\right) = 6^n\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\right)$. Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$, donc par somme $\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \to -3$. Comme $6 > 1$, $6^n \to +\infty$. Par produit (avec $-3 < 0$), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(d) Vrai. On divise le numérateur et le dénominateur par 5^n : $v_n = \frac{3-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$ et $0 < \frac{1}{5} < 1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$ et $\left(\frac{1}{5}\right)^n \to 0$. Par somme, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Ex. 16 ★★☆ **Deux modèles pour une harde de cerfs**

(a) (a_n) est géométrique de raison $1{,}03 = 1 + \frac{3}{100}$: le modèle A traduit une hausse de 3 % par an.
$a_{10} = 800 \times 1{,}03^{10} \approx 1075$. Le modèle A prévoit environ 1075 cerfs en 2035.

Ex. 16 (suite)

(b) $1{,}03 > 1$, donc $1{,}03^n \to +\infty$. Par produit (avec $800 > 0$), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Avec le modèle A, la population explose : elle finit par dépasser n'importe quel effectif.

(c) $0 < 0{,}9 < 1$, donc $0{,}9^n \to 0$. Par produit, $700 \times 0{,}9^n \to 0$, puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1500$. Avec le modèle B, la population se stabilise autour de 1500 cerfs.

(d) $a_n > 1500 \iff 1{,}03^n > \frac{1500}{800} = 1{,}875 \iff n\ln(1{,}03) > \ln(1{,}875)$, car ln est croissante. Comme $\ln(1{,}03) > 0$, on obtient $n > \frac{\ln(1{,}875)}{\ln(1{,}03)} \approx 21{,}27$. Le plus petit entier qui convient est donc $n = 22$. Vérification : $a_{21} \approx 1488$ et $a_{22} \approx 1533$.

(e) Pour tout n, $700 \times 0{,}9^n > 0$, donc $b_n < 1500$. D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 22$, $a_n > 1500 > b_n$. Ben a donc raison : à partir de 2047, le modèle A prévoit plus de cerfs que le modèle B.

Ex. 17 ★★★ Quand deux puissances font la course

(a) $u_1 = 5 - 4 = 1$ et $u_2 = 25 - 16 = 9$. Comme $u_2 = 9 \neq 1$, Mathis a tort : $5^n - 4^n$ n'est pas égal à $(5-4)^n$. La puissance ne se distribue pas sur une différence.

(b) $5 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$. De même, $4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$. La différence donne la forme « $+\infty - \infty$ » : c'est une forme indéterminée. On ne peut donc pas conclure par différence.

(c) Pour tout n : $5^n\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = 5^n - 5^n \times \frac{4^n}{5^n} = 5^n - 4^n = u_n$. Comme $0 < \frac{4}{5} < 1$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$, donc $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \to 1$ par somme. Comme $5 > 1$, $5^n \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(d) $5^{n+1} = 5 \times 5^n$, donc $t_n = \frac{5^n - 4^n}{5\times 5^n} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Comme $0 < \frac{4}{5} < 1$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$. Par produit, $\frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$, puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{5}$. La suite (t_n) converge vers $\frac{1}{5}$.

(e) Comme $5^n > 0$: $4^n \leqslant 0{,}01 \times 5^n \iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \iff n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}01)$, car ln est croissante. Or $\ln(0{,}8) < 0$, donc l'inégalité change de sens : $n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}64$. Vérification : $0{,}8^{20} \approx 0{,}0115 > 0{,}01$ et $0{,}8^{21} \approx 0{,}0092 \leqslant 0{,}01$. Le plus petit entier est donc $n = 21$.

Ex. 18 ★★★ Audience d'un podcast : stabilisation ou explosion ?

(a) Une hausse de $t\,\%$ donne $q = 1 + \frac{t}{100}$. Ici $q = 1{,}02$, donc c'est une hausse de 2 % par mois. Comme $1{,}02 > 1$, $1{,}02^n \to +\infty$, et par produit avec $2000 > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$. Arthur a tort : seule une raison $q = 1$ donne une suite constante ($1^n = 1$). Une raison à peine supérieure à 1 fait quand même exploser l'audience.

(b) $r_0 = 6000 - 4000 \times 1 = 2000$. Comme $0 < 0{,}85 < 1$, $0{,}85^n \to 0$. Par produit, $4000 \times 0{,}85^n \to 0$, puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 6000$. Dans le modèle 2, l'audience part de 2000 auditeurs et se stabilise vers 6000 auditeurs.

(c) $0{,}85^{12}$ est le produit de douze facteurs égaux à 0,85. Ce n'est pas $0{,}85 \times 12 = 10{,}2$. Ici $0{,}85^{12} \approx 0{,}1422$, donc $r_{12} = 6000 - 4000 \times 0{,}85^{12} \approx 5431$. Au bout de 12 mois, le modèle 2 prévoit environ 5431 auditeurs.

(d) $d_n = 6000 - 4000 \times 0{,}85^n - 2000 \times 1{,}02^n$. D'après la question 2, $6000 - 4000 \times 0{,}85^n \to 6000$. Comme $1{,}02 > 1$, $1{,}02^n \to +\infty$, et par produit avec $-2000 < 0$, $-2000 \times 1{,}02^n \to -\infty$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty$. Donc $d_n < 0$ à partir d'un certain rang : à long terme, le modèle 1 prévoit plus d'auditeurs que le modèle 2.

(e) La condition s'écrit `while p <= 6000:` et la mise à jour `p = 1.02 * p`. On a $p_{55} = 2000 \times 1{,}02^{55} \approx 5943 \leqslant 6000$ et $p_{56} = 2000 \times 1{,}02^{56} \approx 6062 > 6000$. Le programme affiche donc 56. C'est à partir du 56e mois que le modèle 1 dépasse 6000 auditeurs, la valeur limite du modèle 2.

4. *Comparaison et théorème des gendarmes*

Ex. 19 ★☆☆ Automatismes : encadrer un terme qui oscille

(a) $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$. On multiplie par $-5 < 0$, donc le sens change : $5 \geqslant -5\cos n \geqslant -5$, c'est-à-dire $-5 \leqslant -5\cos n \leqslant 5$.

(b) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $3n + 2 > 0$, donc $-\frac{1}{3n+2} \leqslant \frac{(-1)^n}{3n+2} \leqslant \frac{1}{3n+2}$. Comme $\lim(3n+2) = +\infty$, par quotient les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la limite vaut 0.

(c) $\cos n \geqslant -1$. On multiplie par $-3 < 0$, donc le sens change : $-3\cos n \leqslant 3$.
Donc $t_n \leqslant 3 - n^2$. Comme $\lim n^2 = +\infty$, par somme $\lim(3 - n^2) = -\infty$. Par comparaison, $\lim t_n = -\infty$.

Ex. 19 **(suite)**

(d) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $2 \leqslant 3 + (-1)^n \leqslant 4$. On divise par $\sqrt{n}+1 > 0$: $\frac{2}{\sqrt{n}+1} \leqslant p_n \leqslant \frac{4}{\sqrt{n}+1}$.
$\lim(\sqrt{n}+1) = +\infty$, donc par quotient les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim p_n = 0$.

(e) $\cos n \geqslant -1$, donc $2\cos n \geqslant -2$, puis $z_n \geqslant 3n - 2$. Par somme, $\lim(3n-2) = +\infty$. Par comparaison, $\lim z_n = +\infty$.

Ex. 20 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur les comparaisons**

(a) Vrai. $n^2 - 4n = n(n-4)$; $n \to +\infty$ et $n - 4 \to +\infty$, donc par produit $n^2 - 4n \to +\infty$. Par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

(b) Faux. L'inégalité est dans le mauvais sens : une majoration ne permet pas de conclure à $+\infty$. Contre-exemple : $u_n = 0$ vérifie $u_n \leqslant n^2$, mais $\lim u_n = 0$.

(c) Faux. Contre-exemple : $u_n = 3 - \frac{1}{n+1} < 3$ pour tout n, mais $\lim u_n = 3$ (par somme). En passant à la limite, une inégalité stricte devient large : on obtient seulement $\lim u_n \leqslant 3$.

(d) Faux. Les bornes 1 et 6 n'ont pas la même limite, on ne peut pas conclure. Contre-exemple : $u_n = 3{,}5 + 2{,}5 \times (-1)^n$ vaut 6 pour n pair et 1 pour n impair. Elle ne se rapproche d'aucun nombre, donc elle diverge.

(e) Vrai. Une comparaison à partir d'un certain rang suffit. Par somme, $\lim(7 - 2n) = -\infty$. Par comparaison, $\lim u_n = -\infty$.

(f) Vrai. La suite constante égale à 2 converge vers 2. D'après le passage à la limite dans l'inégalité $u_n \geqslant 2$ (valable à partir d'un certain rang), on a $\ell \geqslant 2$.

Ex. 21 ★★☆ **Gendarmes et forme indéterminée**

(a) $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$. On multiplie par $5 > 0$: $-5 \leqslant 5\sin n \leqslant 5$. On ajoute $6n$: $6n - 5 \leqslant 6n + 5\sin n \leqslant 6n + 5$. On divise par $2n + 3 > 0$, ce qui ne change pas le sens : on obtient l'encadrement demandé.

(b) Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $n \geqslant 1$, on factorise par n : $\frac{6n-5}{2n+3} = \frac{6-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}$. Comme $\frac{5}{n} \to 0$ et $\frac{3}{n} \to 0$, par somme et quotient, la borne tend vers $\frac{6}{2} = 3$. De même, $\frac{6n+5}{2n+3} = \frac{6+\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}} \to 3$. Les deux bornes tendent vers 3.

(c) Les deux bornes ont la même limite 3. D'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = 3$.

Ex. 21 **(suite)**

(d) $3 - u_n = \frac{3(2n+3) - 6n - 5\sin n}{2n+3} = \frac{9 - 5\sin n}{2n+3}$. Comme $\sin n \leqslant 1$, $9 - 5\sin n \geqslant 4 > 0$, et $2n + 3 > 0$.
Donc $3 - u_n > 0$: on a $u_n < 3$ pour tout n. Ce n'est pas en contradiction avec $\lim u_n = 3$, car une inégalité stricte devient large à la limite.

(e) Non. Pour une limite finie, une seule borne ne suffit pas : il en faut deux de même limite. Par exemple, la suite constante 0 vérifie aussi $0 \leqslant \frac{6n+5}{2n+3}$ pour tout n, mais elle tend vers 0, pas vers 3.

Ex. 22 ★★☆ **Comparaison : corriger un raisonnement**

(a) Malik multiplie par $-3n < 0$ sans changer le sens de l'inégalité. Contrôle : $u_2 = 4 - 6 = -2$, alors que $2^2 + 3 \times 2 = 10$. Correction : $(-1)^n \leqslant 1$, et on multiplie par $-3n < 0$, ce qui change le sens : $-3n \times (-1)^n \geqslant -3n$.
Donc $u_n \geqslant n^2 - 3n$.

(b) Forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». $n^2 - 3n = n(n-3)$ avec $n \to +\infty$ et $n - 3 \to +\infty$. Par produit, $\lim(n^2 - 3n) = +\infty$. Comme $u_n \geqslant n^2 - 3n$, par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

(c) $u_1 = 1 - 3 \times (-1) = 4$, $u_2 = 4 - 6 \times 1 = -2$ et $u_3 = 9 - 9 \times (-1) = 18$. On a $u_2 < u_1$ et $u_3 > u_2$: la suite n'est ni croissante ni décroissante. Pourtant $\lim u_n = +\infty$: une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante.

(d) $\sin n \leqslant 1$, donc $4\sin n \leqslant 4$, puis $w_n \leqslant 4 - \sqrt{n}$. Comme $\lim \sqrt{n} = +\infty$, par somme $\lim(4 - \sqrt{n}) = -\infty$. Par comparaison, $\lim w_n = -\infty$.

(e) $4 - \sqrt{n} < 0 \iff \sqrt{n} > 4 \iff n > 16$. Donc, pour tout $n \geqslant 17$, $w_n \leqslant 4 - \sqrt{n} < 0$ (par exemple, $4 - \sqrt{17} \approx -0{,}12$). La suite est négative à partir du rang 17.

Ex. 23 ★★★ **Abonnés avec fluctuations : gendarmes et seuil**

(a) $u_0 = 20 - 15 \times 1 + \frac{2\times 0}{1} = 5$. $u_1 = 20 - 15 \times 0{,}7 + \frac{2\sin 1}{2} = 9{,}5 + \sin 1 \approx 10{,}341$. L'application compte 5 000 abonnés au lancement et environ 10 341 abonnés au bout d'un mois.

(b) Pour tout n, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$. On multiplie par $2 > 0$: $-2 \leqslant 2\sin n \leqslant 2$. On divise par $n + 1 > 0$, ce qui garde le sens : $-\frac{2}{n+1} \leqslant \frac{2\sin n}{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1}$. On ajoute $20 - 15 \times 0{,}7^n$ aux trois membres et on obtient l'encadrement demandé.

Ex. 23 (suite)

(c) Comme $0 < 0{,}7 < 1$, $\lim 0{,}7^n = 0$, donc par produit $\lim 15 \times 0{,}7^n = 0$. Par quotient, $\lim \frac{2}{n+1} = 0$. Par somme, les deux bornes tendent vers 20. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 20$. À long terme, le nombre d'abonnés se stabilise autour de 20 000.

(d) Comme $15 \times 0{,}7^n > 0$, on a $u_n \leqslant 20 - 15 \times 0{,}7^n + \frac{2}{n+1} < 20 + \frac{2}{n+1}$. L'inégalité de Nina est donc juste. Mais à la limite, une inégalité stricte devient large : on peut seulement en déduire $\lim u_n \leqslant 20$. D'ailleurs, la limite vaut exactement 20 : sa conclusion est fausse.

(e) $15 \times 0{,}7^n \leqslant 0{,}5 \iff 0{,}7^n \leqslant \frac{1}{30} \iff n \ln 0{,}7 \leqslant \ln \frac{1}{30} \iff n \geqslant \frac{\ln(1/30)}{\ln 0{,}7} \approx 9{,}54$ (le sens change car $\ln 0{,}7 < 0$).
Donc $N = 10$. Vérification : $15 \times 0{,}7^9 \approx 0{,}605$ et $15 \times 0{,}7^{10} \approx 0{,}424$. Pour $n \geqslant 10$, l'équivalence donne $15 \times 0{,}7^n \leqslant 0{,}5$, et $\frac{2}{n+1} \leqslant \frac{2}{11} \approx 0{,}182 < 0{,}5$. Avec la borne inférieure : $u_n \geqslant 20 - 0{,}5 - 0{,}5 = 19$. À partir du dixième mois, l'application compte au moins 19 000 abonnés.

Ex. 24 ★★★ Comparer, encadrer… ou ne pas conclure

(a) Yanis majore v_n par une suite qui tend vers $+\infty$. Cela ne dit rien : la suite nulle vérifie aussi $0 \leqslant 3n - 1$ pour $n \geqslant 1$, et pourtant elle ne tend pas vers $+\infty$. Pour conclure par comparaison à $+\infty$, il faut une minoration $v_n \geqslant \ldots$, pas une majoration.

(b) Pour tout n, $\cos n \geqslant -1$. On multiplie par $4 > 0$: $4\cos n \geqslant -4$, donc $v_n \geqslant 3n - 5 - 4 = 3n - 9$. Par somme, $\lim(3n - 9) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(c) $\frac{n}{n+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}}$ et $\lim \frac{2}{n} = 0$, donc par quotient $\lim \frac{n}{n+2} = 1$. Par produit par -1, $\lim\left(-\frac{n}{n+2}\right) = -1$. Les deux bornes ont des limites différentes (-1 et 1) : le théorème des gendarmes ne s'applique pas. Zoé ne peut rien conclure.

(d) $w_{100} = \frac{100}{102} \approx 0{,}98$ et $w_{101} = -\frac{101}{103} \approx -0{,}98$. Les termes de rang pair semblent s'approcher de 1 et ceux de rang impair de -1. On conjecture que (w_n) n'a pas de limite : elle semble divergente.

Ex. 24 (suite)

(e) $z_5 = (25 - 50)(2 + \cos 5) = -25(2 + \cos 5) \approx -57{,}09$ et $5^2 - 10 \times 5 = -25$.
Donc $z_5 < -25$: l'inégalité est fausse pour $n = 5$. En effet, $n^2 - 10n < 0$ et multiplier $2 + \cos n \geqslant 1$ par un nombre négatif change le sens. Pour $n \geqslant 10$, $n^2 - 10n = n(n - 10) \geqslant 0$, et $2 + \cos n \geqslant 1$. On multiplie par ce nombre positif : $z_n \geqslant n^2 - 10n$. On écrit $n^2 - 10n = n^2\left(1 - \frac{10}{n}\right)$: par produit, cette suite tend vers $+\infty$. Par comparaison (à partir du rang 10), $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$.

5. *Suites arithmético-géométriques : suite auxiliaire et modèle*

Ex. 25 ★☆☆ Automatismes : traduire, équilibre et suite auxiliaire

(a) Perdre 12 %, c'est multiplier par $1 - 0{,}12 = 0{,}88$; on ajoute ensuite 300 : $u_{n+1} = 0{,}88u_n + 300$.

(b) On ajoute d'abord 300, puis on multiplie par 0,88 : $u_{n+1} = 0{,}88(u_n + 300) = 0{,}88u_n + 264$. L'ordre change la relation.

(c) $\ell = 0{,}6\ell + 8 \iff 0{,}4\ell = 8 \iff \ell = 20$.

(d) Vrai : $0{,}8 \times 25 + 5 = 20 + 5 = 25$. La suite constante égale à 25 vérifie donc la relation.

(e) $v_0 = u_0 - \ell = 10 - 30 = -20$.

(f) $\ell = 1{,}25\ell + 10 \iff -0{,}25\ell = 10 \iff \ell = -40$.
Donc $v_n = u_n - (-40) = u_n + 40$.

Ex. 26 ★☆☆ Automatismes : forme explicite, limite et variations

(a) $v_n = 30 \times 0{,}8^n$ et $u_n = v_n + 50$, donc $u_n = 50 + 30 \times 0{,}8^n$.

(b) Avec la relation : $u_1 = 0{,}5 \times 50 + 10 = 35$, puis $u_2 = 0{,}5 \times 35 + 10 = 27{,}5$. Avec la formule de Sofia : $u_2 = 50 \times 0{,}25 + 10 = 22{,}5$. Elle a tort : $u_n \neq u_0 a^n + b$. Ici, $\ell = 20$ et $u_n = 20 + 30 \times 0{,}5^n$.

(c) Comme $0 < 0{,}4 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$. Par produit, $-5 \times 0{,}4^n \to 0$, et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12$.

(d) Comme $1{,}1 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}1^n = +\infty$. Par produit par $2 > 0$, puis par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

(e) $u_{n+1} - u_n = -15 \times 0{,}9^{n+1} + 15 \times 0{,}9^n = 15 \times 0{,}9^n(1 - 0{,}9) = 1{,}5 \times 0{,}9^n > 0$. La suite (u_n) est croissante.

Ex. 26 **(suite)**

(f) Faux. $\ell = 0{,}75\ell + 40 \iff \ell = 160$, et $u_n = 160 + (u_0 - 160) \times 0{,}75^n$. Comme $0 < 0{,}75 < 1$, $0{,}75^n \to 0$, donc par produit et par somme les deux suites tendent vers 160. La limite ne dépend pas de u_0.

Ex. 27 ★★☆ **Les abonnés de la newsletter de Nora**

(a) Perdre 10 %, c'est multiplier par 0,9 ; on ajoute ensuite les 450 inscrits : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 450$.
Donc $u_1 = 0{,}9 \times 1\,200 + 450 = 1\,530$. Au bout d'un mois, Nora a 1 530 abonnés.

(b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,500 = 0{,}9u_n + 450 - 4\,500 = 0{,}9u_n - 4\,050 = 0{,}9(u_n - 4\,500) = 0{,}9v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,9, avec $v_0 = 1\,200 - 4\,500 = -3\,300$.

(c) $v_n = -3\,300 \times 0{,}9^n$, donc $u_n = 4\,500 - 3\,300 \times 0{,}9^n$. Contrôle : $u_1 = 4\,500 - 2\,970 = 1\,530$. Ensuite, $u_{12} = 4\,500 - 3\,300 \times 0{,}9^{12} \approx 3\,567{,}98$. Au bout de 12 mois, Nora a environ 3 568 abonnés.

(d) Comme $0 < 0{,}9 < 1$, $0{,}9^n \to 0$. Par produit, puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4\,500$. De plus, $-3\,300 \times 0{,}9^n < 0$, donc $u_n < 4\,500 < 5\,000$ pour tout n. Nora a tort : le nombre d'abonnés se stabilise vers 4 500 sans jamais l'atteindre.

Ex. 28 ★★☆ **Un étang près de Dijon : deux modèles de pollution**

(a) Modèle A : $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 60$, donc $a_1 = 0{,}75 \times 900 + 60 = 735$. Modèle B : $b_{n+1} = 0{,}75(b_n + 60) = 0{,}75b_n + 45$, donc $b_1 = 0{,}75 \times 960 = 720$.

(b) $\ell_A = 0{,}75\ell_A + 60 \iff 0{,}25\ell_A = 60 \iff \ell_A = 240$.
$\ell_B = 0{,}75\ell_B + 45 \iff 0{,}25\ell_B = 45 \iff \ell_B = 180$.

(c) $w_{n+1} = b_{n+1} - 180 = 0{,}75b_n + 45 - 180 = 0{,}75(b_n - 180) = 0{,}75w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison 0,75, avec $w_0 = 900 - 180 = 720$.
Donc $b_n = 180 + 720 \times 0{,}75^n$. Contrôle : $b_1 = 180 + 540 = 720$.

(d) Comme $0 < 0{,}75 < 1$, $0{,}75^n \to 0$. Par produit, puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 180$. Ensuite, $b_{n+1} - b_n = 720 \times 0{,}75^n(0{,}75 - 1) = -180 \times 0{,}75^n < 0$: la suite (b_n) est décroissante. La pollution diminue et se stabilise vers 180 kg.

Ex. 28 **(suite)**

(e) Faux. Avec $b_0 = 2\,000$, on a $b_n = 180 + 1\,820 \times 0{,}75^n$, qui tend encore vers 180 (même justification : limite de q^n avec $0 < q < 1$, produit, puis somme). La valeur d'équilibre $\ell_B = \frac{45}{1-0{,}75}$ ne dépend pas de la quantité de départ.

Ex. 29 ★★★ **Le traitement de Malik : équilibre, seuil et dose**

(a) Éliminer 30 % revient à multiplier par $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. On ajoute ensuite 3 mg, donc $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 3$. Ainsi $u_1 = 0{,}7 \times 5 + 3 = 6{,}5$ et $u_2 = 0{,}7 \times 6{,}5 + 3 = 7{,}55$. Après 12 heures, le sang contient 7,55 mg de médicament.

(b) $\ell = 0{,}7\ell + 3 \iff 0{,}3\ell = 3 \iff \ell = 10$. Pour tout n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0{,}7u_n + 3 - 10 = 0{,}7u_n - 7 = 0{,}7(u_n - 10) = 0{,}7v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,7, de premier terme $v_0 = u_0 - 10 = 5 - 10 = -5$.

(c) On a $v_n = -5 \times 0{,}7^n$, donc $u_n = v_n + 10 = 10 - 5 \times 0{,}7^n$. Contrôle : $u_2 = 10 - 5 \times 0{,}7^2 = 10 - 2{,}45 = 7{,}55$, la valeur trouvée avec la relation de récurrence. Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = -5 \times 0{,}7^{n+1} + 5 \times 0{,}7^n = 5 \times 0{,}7^n(1 - 0{,}7) = 1{,}5 \times 0{,}7^n > 0$, donc (u_n) est croissante. Comme $0 < 0{,}7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$. Par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$. La quantité augmente et se stabilise vers 10 mg.

(d) $u_n > 9{,}9 \iff -5 \times 0{,}7^n > -0{,}1 \iff 0{,}7^n < 0{,}02 \iff n\ln(0{,}7) < \ln(0{,}02) \iff n > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}7)} \approx 10{,}97$. Le sens de l'inégalité change car $\ln(0{,}7) < 0$.
Donc $n = 11$. Vérification : $u_{10} \approx 9{,}859$ et $u_{11} \approx 9{,}901$. Il faut donc 11 périodes, soit $11 \times 6 = 66$ heures.

(e) Avec une dose d, on a $u_{n+1} = 0{,}7u_n + d$. La suite constante solution vérifie $\ell = 0{,}7\ell + d \iff 0{,}3\ell = d \iff \ell = \frac{d}{0{,}3}$. Comme pour (u_n), $u_n = \ell + (u_0 - \ell) \times 0{,}7^n$. Comme $0 < 0{,}7 < 1$, $0{,}7^n \to 0$, donc par produit et par somme, $u_n \to \ell$. Il faut donc $\frac{d}{0{,}3} = 12$, soit $d = 12 \times 0{,}3 = 3{,}6$. Il faut injecter 3,6 mg toutes les 6 heures, quelle que soit la quantité de départ.

Ex. 30 ★★★ **La population de Saint-Flour : formule, erreur et seuil**

(a) Perdre 4 % revient à multiplier par $1 - 0{,}04 = 0{,}96$. On ajoute ensuite 150 arrivées, donc $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 150$. Suite constante : $\ell = 0{,}96\ell + 150 \iff 0{,}04\ell = 150 \iff \ell = 3\,750$.

Ex. 30 **(suite)**

(b) Pour tout n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,750 = 0{,}96u_n + 150 - 3\,750 = 0{,}96u_n - 3\,600 = 0{,}96(u_n - 3\,750) = 0{,}96v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,96, avec $v_0 = 6\,000 - 3\,750 = 2\,250$. Ainsi $u_n = 3\,750 + 2\,250 \times 0{,}96^n$. L'année 2036 correspond à $n = 10$: $u_{10} = 3\,750 + 2\,250 \times 0{,}96^{10} \approx 5\,246$. On estime la population à environ 5 246 habitants en 2036.

(c) Pour $n = 1$, sa formule donne $6\,000 \times 0{,}96 + 150 = 5\,910$, ce qui est bien u_1. Mais le vrai terme est $u_2 = 0{,}96 \times 5\,910 + 150 = 5\,823{,}6$, alors que sa formule donne $6\,000 \times 0{,}96^2 + 150 = 5\,679{,}6$. Lucas a donc tort : $u_n \neq u_0 a^n + b$, car (u_n) n'est pas géométrique. Un seul contrôle, avec u_1, ne suffit pas à valider une formule.

(d) Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = 2\,250 \times 0{,}96^{n+1} - 2\,250 \times 0{,}96^n = 2\,250 \times 0{,}96^n(0{,}96 - 1) = -90 \times 0{,}96^n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante, ce qui est cohérent avec $u_0 > \ell$. Comme $0 < 0{,}96 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}96^n = 0$. Par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3\,750$. Selon ce modèle, la population baisse chaque année et se stabilise vers 3 750 habitants.

(e) La boucle doit continuer tant que la population n'est pas passée sous le seuil. La condition est donc `u >= 4500`. Par le calcul : $3\,750 + 2\,250 \times 0{,}96^n < 4\,500 \iff 0{,}96^n < \frac{1}{3} \iff n > \frac{\ln(1/3)}{\ln(0{,}96)} \approx 26{,}91$. Le sens de l'inégalité change car $\ln(0{,}96) < 0$.
Donc $n = 27$. Vérification : $u_{26} \approx 4\,528$ et $u_{27} \approx 4\,497$. Le programme affiche 27, ce qui correspond à l'année $2026 + 27 = 2053$.

6. *Suites $u_{n+1} = f(u_n)$: représentation en escalier*

Ex. 31 ★☆☆ **Automatismes : premiers termes et valeur d'équilibre**

(a) $u_1 = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$; $u_2 = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$; $u_3 = \sqrt{3\sqrt{10} + 4} \approx 3{,}672$
(calculatrice : on réutilise la valeur exacte de u_2 avec la touche Rép).

(b) Sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{3x+4} = x$ donne $3x + 4 = x^2$, donc $x^2 - 3x - 4 = 0$, soit $(x-4)(x+1) = 0$. On écarte $-1 < 0$, donc $x = 4$. Vérification : $\sqrt{16} = 4$.

(c) $f(x) = 0{,}7x + 3$: f est affine, donc (u_n) est arithmético-géométrique. $c = 0{,}7c + 3$ donne $0{,}3c = 3$, soit $c = \frac{3}{1-0{,}7} = 10$.

Ex. 31 **(suite)**

(d) $x^2 - 4x + 6 = x$ donne $x^2 - 5x + 6 = 0$, soit $(x-2)(x-3) = 0$: il y a deux points d'intersection, d'abscisses 2 et 3.

(e) $f(x) = -0{,}4x + 7$ est affine de coefficient $-0{,}4 < 0$, donc décroissante : on obtient une spirale. Les termes $u_0 = 0$, $u_1 = 7$, $u_2 = 4{,}2\ldots$ passent alternativement de part et d'autre de $\frac{7}{1{,}4} = 5$, solution de $f(x) = x$.

(f) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2+1}$. Or $u_n^2 + 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n : (u_n) est strictement croissante.

Ex. 32 ★★☆ **Lire un escalier**

(a) $u_1 = 3$ et $u_2 = 4{,}5$. On les lit sur l'axe des abscisses : on monte jusqu'à la courbe, puis on va horizontalement jusqu'à la droite $y = x$, qui reporte la valeur sur l'axe des abscisses.

(b) $u_1 = 0{,}5 \times 0 + 3 = 3$; $u_2 = 0{,}5 \times 3 + 3 = 4{,}5$; $u_3 = 0{,}5 \times 4{,}5 + 3 = 5{,}25$.

(c) L'escalier monte : on conjecture que (u_n) est croissante.

(d) Sur le graphique, l'abscisse est 6. Par le calcul : $0{,}5x + 3 = x$ donne $0{,}5x = 3$, soit $x = 6$.

(e) Non. Le graphique ne montre que quelques termes : il permet seulement de conjecturer que la limite vaut 6. Pour le démontrer, il faut un calcul, par exemple avec la suite auxiliaire $v_n = u_n - 6$.

(f) $u_1 = 0{,}5 \times 8 + 3 = 7$; $u_2 = 0{,}5 \times 7 + 3 = 6{,}5$. L'escalier descend vers 6 : avec la même fonction f croissante, la suite est ici décroissante. Le sens de variation dépend de u_0.

Ex. 33 ★★☆ **Une spirale, puis un nuage**

(a) $u_1 = \frac{6}{0+1} = 6$; $u_2 = \frac{6}{7} \approx 0{,}857$; $u_3 = \frac{42}{13} \approx 3{,}231$; $u_4 = \frac{78}{55} \approx 1{,}418$.

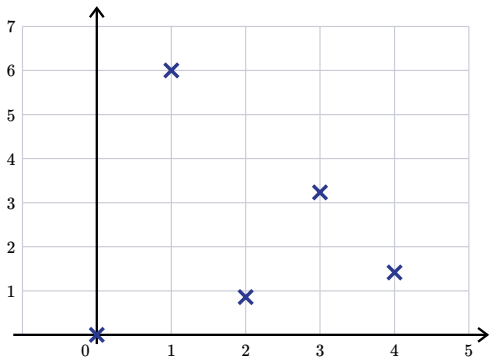
(b) Sur $[0\,;+\infty[$, $x + 1$ est positif et croissant, donc $f(x) = \frac{6}{x+1}$ est décroissante. La construction est donc une spirale : les termes passent alternativement de part et d'autre d'une valeur.

(c) Pour $x \geqslant 0$, $\frac{6}{x+1} = x$ donne $x^2 + x - 6 = 0$, soit $(x-2)(x+3) = 0$. On écarte -3, donc $x = 2$. On conjecture que les termes se rapprochent de 2, l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $y = x$.

(d) Non. $u_1 = 6 > u_0 = 0$, mais $u_2 \approx 0{,}857 < u_1$: la suite n'est pas croissante. Elle n'est d'ailleurs pas monotone, ses termes oscillent autour de 2.

Ex. 33 **(suite)**

(e)



Dans le nuage, u_n se lit en ordonnée, au-dessus de l'abscisse n. Dans la spirale, u_n se lit sur l'axe des abscisses, après report par la droite $y = x$.

Ex. 34 ★★☆ **Même fonction, deux premiers termes**

(a) Avec $u_0 = 2$: $u_1 = 0{,}25 \times 4 + 0{,}75 = 1{,}75$ et $u_2 = 0{,}25 \times 1{,}75^2 + 0{,}75 = 1{,}515625$. Avec $u_0 = 4$: $u_1 = 0{,}25 \times 16 + 0{,}75 = 4{,}75$ et $u_2 = 0{,}25 \times 4{,}75^2 + 0{,}75 = 6{,}390625$.

(b) $f(x) - x = 0{,}25x^2 - x + 0{,}75 = 0{,}25(x^2 - 4x + 3) = 0{,}25(x-1)(x-3)$.
Donc $f(x) = x$ pour $x = 1$ ou $x = 3$. Un trinôme de coefficient $0{,}25 > 0$ est positif à l'extérieur de ses racines : $f(x) - x > 0$ sur $[0\,;1[$ et sur $]3\,;+\infty[$, et $f(x) - x < 0$ sur $]1\,;3[$.

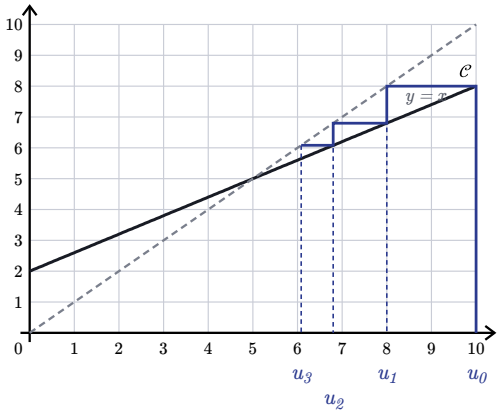
(c) Non. Avec $u_0 = 2$, on a $u_1 = 1{,}75 < u_0$: la suite n'est pas croissante. Le sens de variation se lit sur le signe de $f(u_n) - u_n$ et dépend donc de u_0.

(d) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Comme $u_n \in]1\,;3[$, on a $f(u_n) - u_n < 0$ d'après la question précédente : (u_n) est décroissante. L'escalier descend vers le point d'intersection d'abscisse 1 : on conjecture que (u_n) converge vers 1.

(e) Comme $u_n > 3$, on a $f(u_n) - u_n > 0$, donc (u_n) est croissante. L'escalier monte et s'éloigne de 3, et la courbe ne recoupe plus la droite au-delà : on conjecture que (u_n) tend vers $+\infty$
(simple conjecture graphique).

Ex. 35 ★★★ **Un traitement en escalier**

(a)



On part de $u_0 = 10$ sur l'axe des abscisses. On monte jusqu'à $\mathcal{C}$, puis on reporte horizontalement sur la droite $y = x$ et on redescend sur l'axe des abscisses. On lit $u_1 = 8$, $u_2 \approx 6{,}8$ et $u_3 \approx 6{,}1$. Par le calcul : $u_1 = 0{,}6 \times 10 + 2 = 8$, $u_2 = 0{,}6 \times 8 + 2 = 6{,}8$ et $u_3 = 0{,}6 \times 6{,}8 + 2 = 6{,}08$.

(b) L'escalier descend vers le point d'intersection. On conjecture donc que (u_n) est décroissante et que ses termes se rapprochent de l'abscisse de ce point. On résout $0{,}6x + 2 = x$, soit $0{,}4x = 2$, donc $x = \frac{2}{0{,}4} = 5$. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$. C'est seulement une conjecture : le graphique ne démontre rien.

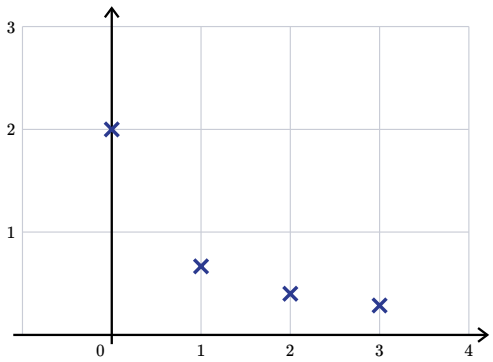
(c) D'après la question précédente, $\ell = 5$. $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0{,}6u_n + 2 - 5 = 0{,}6u_n - 3 = 0{,}6(u_n - 5) = 0{,}6\,v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 10 - 5 = 5$. On en déduit $v_n = 5 \times 0{,}6^n$, donc $u_n = 5 + 5 \times 0{,}6^n$. Ensuite, $u_{n+1} - u_n = 5 \times 0{,}6^{n+1} - 5 \times 0{,}6^n = 5 \times 0{,}6^n \times (0{,}6 - 1) = -2 \times 0{,}6^n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

(d) Non. Pour tout n, $0{,}6^n > 0$, donc $u_n = 5 + 5 \times 0{,}6^n > 5$: la quantité reste toujours au-dessus de 5 mg et ne passe jamais sous 4 mg. Une suite décroissante ne tend pas forcément vers 0 : ici, l'escalier descend vers le point d'intersection d'abscisse 5. Malo a tort.

(e) Comme $0 < 0{,}6 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n = 0$. Par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$, ce qui confirme la conjecture. On cherche n tel que $u_n - 5 < 0{,}01$, soit $5 \times 0{,}6^n < 0{,}01$, c'est-à-dire $0{,}6^n < 0{,}002$. La fonction ln est strictement croissante, donc cela équivaut à $n \ln(0{,}6) < \ln(0{,}002)$. Comme $\ln(0{,}6) < 0$, on divise et l'inégalité change de sens : $n > \frac{\ln(0{,}002)}{\ln(0{,}6)} \approx 12{,}17$. Vérification : $5 \times 0{,}6^{12} \approx 0{,}0109 > 0{,}01$ et $5 \times 0{,}6^{13} \approx 0{,}0065 < 0{,}01$. La quantité dépasse sa limite de moins de 0,01 mg à partir de 13 jours.

Ex. 36 ★★★ **Une suite qui s'écrase sur 0**

(a) Non. Le graphique montre la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite $y = x$ et un escalier. Les termes s'y lisent sur l'axe des abscisses : $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{2}{5}$, etc. Le nuage, lui, place les points isolés $(0\,;2)$, $(1\,;\frac{2}{3})$, $(2\,;\frac{2}{5})\ldots$ avec n en abscisse :



Kenza a donc tort.

(b) L'escalier descend vers l'origine. On conjecture que (u_n) est décroissante et que ses termes se rapprochent de 0. Pour $x \geqslant 0$, on a $\frac{x}{x+1} = x \iff x = x^2 + x \iff x^2 = 0 \iff x = 0$. La limite conjecturée est donc l'abscisse du point d'intersection, c'est-à-dire 0.

(c) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1} = \frac{-u_n^2}{u_n+1}$. Comme $u_n > 0$, on a $u_n^2 > 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

(d) $w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n+1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} = w_n + 1$.
Donc (w_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$. On en déduit $w_n = \frac{1}{2} + n = \frac{2n+1}{2}$, donc $u_n = \frac{2}{2n+1}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1) = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, ce qui confirme la conjecture.

(e)

```
n = 0
u = 2
while u >= 0.001:
    n = n + 1
    u = u / (u + 1)
print(n)
```

La boucle continue tant que `u >= 0.001`, et chaque passage calcule le terme suivant. Par le calcul, $\frac{2}{2n+1} < 0{,}001 \iff 2n + 1 > 2000 \iff n > 999{,}5$.
Vérification : $u_{999} \approx 0{,}0010005$ et $u_{1000} \approx 0{,}0009995$. Le programme affiche 1000.

7. *Somme géométrique et recherche de seuil*

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : sommes géométriques et leurs limites**

(a) Les exposants vont de 0 à 9 : il y a 10 termes. $S = \frac{1-0{,}65^{10}}{1-0{,}65} = \frac{1-0{,}65^{10}}{0{,}35} \approx 2{,}819$.

(b) De u_0 à u_7, il y a 8 termes : $u_0 + \cdots + u_7 = 4 \times \frac{1-1{,}5^8}{1-1{,}5} = 197{,}031\,25$.

(c) De w_1 à w_6, il y a 6 termes, et le premier est $w_1 = 6$: $w_1 + \cdots + w_6 = 6 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 6 \times 63 = 378$.

(d) Les exposants vont de 0 à 11 : il y a 12 termes. $1 + 3 + \cdots + 3^{11} = \frac{1-3^{12}}{1-3} = \frac{3^{12}-1}{2} = 265\,720$.

(e) $S_n = \frac{1-0{,}25^{n+1}}{1-0{,}25} = \frac{1-0{,}25^{n+1}}{0{,}75}$. Comme $0 < 0{,}25 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}25^{n+1} = 0$. Par somme puis par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$.

(f) $v_0 + \cdots + v_n = 12 \times \frac{1-0{,}4^{n+1}}{1-0{,}4} = 20 \times (1 - 0{,}4^{n+1})$. Comme $0 < 0{,}4 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^{n+1} = 0$. Par somme puis par produit, la limite vaut 20, c'est-à-dire $\frac{v_0}{1-q}$.

Ex. 38 ★☆☆ **Automatismes : trouver un seuil avec ln**

(a) La fonction ln est croissante : $n \ln 0{,}85 < \ln 0{,}02$.
Comme $\ln 0{,}85 < 0$, le sens change : $n > \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}85} \approx 24{,}07$.
Donc $n = 25$. Vérification : $0{,}85^{24} \approx 0{,}020\,2 > 0{,}02$ et $0{,}85^{25} \approx 0{,}017\,2 < 0{,}02$.

(b) $n \ln 1{,}03 > \ln 2$. Comme $\ln 1{,}03 > 0$, le sens ne change pas : $n > \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}45$.
Donc $n = 24$. Vérification : $1{,}03^{23} \approx 1{,}973\,6 < 2$ et $1{,}03^{24} \approx 2{,}032\,8 > 2$.

(c) On divise par $1\,500 > 0$: $0{,}92^n \leqslant \frac{40}{1\,500} = \frac{2}{75}$, d'où $n \ln 0{,}92 \leqslant \ln \frac{2}{75}$. Comme $\ln 0{,}92 < 0$, le sens change : $n \geqslant \frac{\ln(2/75)}{\ln 0{,}92} \approx 43{,}47$.
Donc $n = 44$. Vérification : $1\,500 \times 0{,}92^{43} \approx 41{,}59 > 40$ et $1\,500 \times 0{,}92^{44} \approx 38{,}26 \leqslant 40$.

(d) $1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}01$, d'où $n \ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}01$. Comme $\ln 0{,}8 < 0$:
$n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}64$.
Donc $n = 21$. Vérification : $1 - 0{,}8^{20} \approx 0{,}988\,5 < 0{,}99$ et $1 - 0{,}8^{21} \approx 0{,}990\,8 \geqslant 0{,}99$.

(e) Lina a divisé par $\ln 0{,}7$ sans changer le sens. Or $\ln 0{,}7 < 0$, donc le sens change : $n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} \approx 8{,}40$.
Donc $n = 9$. Vérification : $0{,}7^8 \approx 0{,}057\,6 > 0{,}05$ et $0{,}7^9 \approx 0{,}040\,4 < 0{,}05$.

Ex. 39 ★★☆ **L'épargne de Noé**

(a) De v_1 à v_n, il y a n termes. C'est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 50$ et de raison 1,04.
Donc $S_n = 50 \times \frac{1-1{,}04^n}{1-1{,}04} = \frac{50}{-0{,}04} \times (1 - 1{,}04^n) = 1\,250 \times (1{,}04^n - 1)$.

(b) Un an correspond à $n = 12$: $S_{12} = 1\,250 \times (1{,}04^{12} - 1) \approx 751{,}29$. Au bout d'un an, Noé a versé environ 751,29 €.

(c) On répète tant que le seuil n'est pas atteint : la condition du while est le contraire de « $S \geqslant 3\,000$ », soit `S < 3000`. On part de `n = 0` et `S = 0`. On ajoute le versement du mois avant de le faire augmenter de 4 %. Sinon, le premier montant ajouté serait 52 € au lieu de 50 €.

```
def seuil():
    n = 0
    v = 50
    S = 0
    while S < 3000:
        S = S + v
        v = 1.04 * v
        n = n + 1
    return n
```

Après le k-ième passage, $S = S_k$ et $n = k$: le rang renvoyé est le bon. Ce programme renvoie 32.

(d) $S_n \geqslant 3\,000 \iff 1{,}04^n - 1 \geqslant 2{,}4 \iff 1{,}04^n \geqslant 3{,}4 \iff n \ln 1{,}04 \geqslant \ln 3{,}4$. Comme $\ln 1{,}04 > 0$, $n \geqslant \frac{\ln 3{,}4}{\ln 1{,}04} \approx 31{,}20$, donc $n = 32$. Vérification : $S_{31} \approx 2\,966{,}42 < 3\,000$ et $S_{32} \approx 3\,135{,}07 \geqslant 3\,000$. Le total atteint 3 000 € pour la première fois au 32e mois.

(e) Le mois 1 est janvier 2027, le mois 13 est janvier 2028 et le mois 25 est janvier 2029. Le mois 32 arrive 7 mois après le mois 25 : c'est août 2029. Le total atteint 3 000 € en août 2029.

Ex. 40 ★★☆ **Rebonds d'une balle : vrai ou faux ?**

(a) Faux. De h_0 à h_n, il y a $n + 1$ termes.
Donc $T_n = 3 \times \frac{1-0{,}6^{n+1}}{1-0{,}6} = 7{,}5 \times (1 - 0{,}6^{n+1})$. Contre-exemple : $T_0 = 3$, alors que la formule proposée donne 0 pour $n = 0$.

(b) Vrai. 1 cm = 0,01 m. $3 \times 0{,}6^n < 0{,}01 \iff 0{,}6^n < \frac{1}{300} \iff n \ln 0{,}6 < \ln \frac{1}{300}$. Comme $\ln 0{,}6 < 0$, le sens change : $n > \frac{\ln(1/300)}{\ln 0{,}6} \approx 11{,}17$, donc $n = 12$.
Vérification : $h_{11} \approx 0{,}010\,9$ m $> 0{,}01$ m et $h_{12} \approx 0{,}006\,5$ m $< 0{,}01$ m.

(c) Vrai. $T_n = 7{,}5 \times (1 - 0{,}6^{n+1})$. Comme $0 < 0{,}6 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^{n+1} = 0$. Par somme puis par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 7{,}5$, c'est-à-dire $\frac{h_0}{1-0{,}6}$.

Ex. 40 **(suite)**

(d) Faux. Comme $7{,}5 \times 0{,}6^{n+1} > 0$, on a $T_n = 7{,}5 - 7{,}5 \times 0{,}6^{n+1} < 7{,}5 < 8$ pour tout n. La condition `T < 8` reste toujours vraie : la boucle ne s'arrête jamais et le programme ne renvoie rien. Le seuil 8 est au-delà de la limite 7,5, il n'est jamais atteint.

Ex. 41 ★★★ **La carrière de granit**

(a) S_n va de u_0 à u_n : il compte $n + 1$ termes, de premier terme 40 000 et de raison 0,94.
Donc $S_n = 40\,000 \times \frac{1-0{,}94^{n+1}}{1-0{,}94} = \frac{2\,000\,000}{3}\left(1 - 0{,}94^{n+1}\right)$.
Comme $2035 = 2026 + 9$, la période 2026-2035 compte 10 années : c'est $S_9 = \frac{2\,000\,000}{3}(1 - 0{,}94^{10}) \approx 307\,590$. De 2026 à 2035, la carrière extrait environ 307 590 t.

(b) Comme $0 < 0{,}94 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}94^{n+1} = 0$. Par somme, $1 - 0{,}94^{n+1}$ tend vers 1, puis par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{2\,000\,000}{3} \approx 666\,667$. On retrouve $\frac{u_0}{1-q} = \frac{40\,000}{0{,}06}$.
Au rythme actuel, la quantité totale extraite se rapproche de 666 667 t environ, sans jamais dépasser cette valeur.

(c) $S_n \geqslant 600\,000 \iff 1 - 0{,}94^{n+1} \geqslant \frac{600\,000 \times 3}{2\,000\,000} = 0{,}9 \iff 0{,}94^{n+1} \leqslant 0{,}1 \iff (n+1)\ln 0{,}94 \leqslant \ln 0{,}1$. Comme $\ln 0{,}94 < 0$, le sens change : $n + 1 \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}94} \approx 37{,}21$, donc $n \geqslant 36{,}21$ et on prend l'entier supérieur, $n = 37$.
Vérification : $S_{36} \approx 599\,114 < 600\,000$ et $S_{37} \approx 603\,168 \geqslant 600\,000$. Le rang 37 correspond à $2026 + 37 = 2063$: la réserve est épuisée en 2063.

(d) Pour une baisse t ($0 < t < 1$), la raison vaut $q = 1 - t$, avec $0 < q < 1$, et $S_n = \frac{40\,000}{t}(1 - q^{n+1})$. Comme $q^{n+1} > 0$, on a $S_n < \frac{40\,000}{t}$ pour tout n. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$, par somme et produit, S_n tend vers $\frac{40\,000}{t}$. Si $\frac{40\,000}{t} > 600\,000$, S_n finit donc par dépasser 600 000. Si $\frac{40\,000}{t} \leqslant 600\,000$, il ne le dépasse jamais. Il faut $\frac{40\,000}{t} \leqslant 600\,000 \iff t \geqslant \frac{1}{15} \approx 0{,}066\,7$. La baisse doit être d'au moins 6,67 % environ par an.

Ex. 42 ★★★ **Le programme de plantation de Yanis**

(a) P_n va de a_1 à a_n : il compte n termes, de premier terme 900 et de raison 0,9.
Donc $P_n = 900 \times \frac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9} = 9\,000\,(1 - 0{,}9^n)$.
Vérification : $P_3 = 900 + 810 + 729 = 2\,439$ et $9\,000 \times (1 - 0{,}9^3) = 9\,000 \times 0{,}271 = 2\,439$.

(b) Au départ, $P = 0$: la condition `P >= 8000` est fausse, donc la boucle ne s'exécute jamais et le programme renvoie la valeur initiale `n = 1`. La condition du while doit être le contraire de la condition cherchée : on boucle tant que `P < 8000`.

Ex. 42 **(suite)**

(c) Première erreur : `n` doit partir de 0, car il compte les années déjà additionnées (sinon le rang renvoyé est décalé de 1). Deuxième erreur : il faut ajouter `a` à `P` avant de le multiplier par 0,9, sinon les 900 arbres de l'année 1 ne sont jamais comptés. Programme correct :

```
def seuil():
    n = 0
    a = 900
    P = 0
    while P < 8000:
        P = P + a
        a = 0.9 * a
        n = n + 1
    return n
```

Il renvoie 21.

(d) $P_{20} = 9\,000(1-0{,}9^{20}) \approx 7\,905{,}81 < 8\,000$ et $P_{21} = 9\,000(1-0{,}9^{21}) \approx 8\,015{,}23 \geqslant 8\,000$. (P_n) est croissante (on ajoute chaque année un nombre positif) : le plus petit rang est donc $n = 21$. L'année 21 correspond à $2026 + 21 = 2047$: l'objectif est atteint en 2047.

(e) $2040 = 2026 + 14$: il faut que le total des 14 premières années atteigne 8 000 (les totaux augmentent chaque année). Avec a arbres l'année 1, ce total vaut $a \times \frac{1-0{,}9^{14}}{1-0{,}9} = 10a(1-0{,}9^{14})$. $10a(1-0{,}9^{14}) \geqslant 8\,000 \iff a \geqslant \frac{800}{1-0{,}9^{14}} \approx 1\,037{,}30$. On prend l'entier supérieur : $a = 1\,038$. Vérification : avec 1 037, le total vaut environ $7\,997{,}68 < 8\,000$; avec 1 038, environ $8\,005{,}39 \geqslant 8\,000$. L'association doit planter au moins 1 038 arbres l'année 1.