1. Suites arithmétiques : récurrence, reconnaître, terme de rang n

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : calculer des termes**

(a) $u_1 = 15 - 4 = 11$, $u_2 = 11 - 4 = 7$, $u_3 = 7 - 4 = 3$.

(b) On remplace n par $n+1$, avec des parenthèses : $v_{n+1} = 3(n+1) + 7 = 3n + 10$.

(c) $w_4 = 5 \times 4 - 2 = 18$, donc $w_4 + 1 = 19$.
$w_5 = 5 \times 5 - 2 = 23$. Attention : w_{n+1} et $w_n + 1$ sont deux choses différentes.

(d) $t_1 = 42{,}5$, $t_2 = 45$, $t_3 = 47{,}5$, $t_4 = 50$.

(e) $a_0 = 0$, $a_1 = 1 - 1 = 0$, $a_2 = 4 - 2 = 2$, $a_3 = 9 - 3 = 6$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : terme de rang n**

(a) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_{15} = 12 + 15 \times 6 = 102$.

(b) Le premier terme est u_1 : $u_n = u_1 + (n-1)r$, donc $u_{20} = 8 + 19 \times 3 = 65$.

(c) $u_n = u_0 + nr = 50 + n \times (-4) = 50 - 4n$, donc $u_{12} = 50 - 4 \times 12 = 2$.

(d) On passe de u_3 à u_8 en ajoutant $8 - 3 = 5$ fois r : $r = \frac{42-17}{8-3} = \frac{25}{5} = 5$. Puis $u_0 = u_3 - 3r = 17 - 15 = 2$.

(e) $u_n = u_5 + (n-5)r$, donc $u_{13} = 20 + 8 \times 1{,}5 = 32$.

Ex. 3 ★★☆ **Arithmétique ou pas ?**

(a) $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 9 - (4n - 9) = 4$. La différence ne dépend pas de n : (u_n) est arithmétique de raison 4.

(b) $v_0 = 3$, $v_1 = 4$, $v_2 = 7$. On a $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$: les écarts sont différents, donc (v_n) n'est pas arithmétique.

(c) $w_{n+1} - w_n = \frac{6-5(n+1)-6+5n}{2} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$. La différence est constante : (w_n) est arithmétique de raison $-2{,}5$ et de premier terme $w_0 = 3$.

(d) $z_1 = 3 + 0 = 3$, $z_2 = 3 + 1 = 4$, $z_3 = 4 + 2 = 6$. Les écarts 0 et 1 sont différents (on ajoute n, qui change) : (z_n) n'est pas arithmétique.

Ex. 4 ★★☆ **Trouve l'erreur**

(a) $u_0 = 1$, $u_1 = 1 - 3 + 4 + 1 = 3$, $u_2 = 8 - 12 + 8 + 1 = 5$. Les deux écarts sont égaux : $u_1 - u_0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 2$.

Ex. 4 (suite)

(b) $u_3 = 27 - 27 + 12 + 1 = 13$, donc $u_3 - u_2 = 8 \neq 2$. Deux écarts sont différents : (u_n) n'est pas arithmétique. Inès a tort : des premiers écarts égaux ne prouvent rien, il faut calculer $u_{n+1} - u_n$ avec la lettre n.

(c) Il faut remplacer n par $n+1$: $v_{n+1} = 7 - 3(n+1) = 4 - 3n$.
Donc $v_{n+1} - v_n = 4 - 3n - (7 - 3n) = -3$. (v_n) est arithmétique de raison -3.

(d) Le premier terme est t_1 : $t_n = t_1 + (n-1)r = 20 + 6(n-1)$.
Donc $t_{10} = 20 + 9 \times 6 = 74$.

Ex. 5 ★★☆ **Le livret de Malik**

(a) Chaque année, Malik ajoute la même somme : $u_{n+1} = u_n + 120$.
Donc (u_n) est arithmétique, avec $u_0 = 350$ et $r = 120$.

(b) En B3, on saisit =B2+120. B6 est quatre lignes sous B2, donc B6 affiche $u_4 = 350 + 4 \times 120 = 830$. Malik aura 830 € le 1er janvier 2030.

(c) $u_n = u_0 + nr = 350 + 120n$. 2035 correspond à $n = 2035 - 2026 = 9$, donc $u_9 = 350 + 120 \times 9 = 1\,430$. Malik aura 1\,430 € le 1er janvier 2035.

(d) Si $350 + 120n = 2\,000$, alors $n = \frac{1\,650}{120} = 13{,}75$. Ce n'est pas un entier : 2\,000 n'est pas un terme de la suite. On a $u_{13} = 1\,910$ et $u_{14} = 2\,030$. L'affirmation est fausse.

Ex. 6 ★★★ **L'étang en été**

(a) L'étang perd chaque semaine la même hauteur. On passe donc d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r : $h_{n+1} = h_n + r$, et (h_n) est arithmétique. De la semaine 3 à la semaine 8, il y a $8 - 3 = 5$ étapes (et non 8).
Donc $h_8 = h_3 + 5r$, soit $140 = 175 + 5r$, et $r = \frac{140-175}{5} = \frac{-35}{5} = -7$. La raison est négative : la suite est décroissante. L'étang perd 7 cm par semaine.

(b) On recule de 2 semaines : $h_1 = h_3 - 2r = 175 + 14 = 189$. Le premier terme est h_1, donc $h_n = h_1 + (n-1)r = 189 + (n-1) \times (-7) = 189 - 7n + 7 = 196 - 7n$. Vérification : $h_3 = 196 - 21 = 175$ et $h_8 = 196 - 56 = 140$. Conclusion : $h_n = 196 - 7n$ (en cm).

Ex. 6 **(suite)**

(c) On résout $196 - 7n = 150$, soit $7n = 46$, donc $n = \frac{46}{7} \approx 6{,}57$. Ce n'est pas un entier naturel, donc 150 n'est pas un terme de la suite. D'ailleurs, $h_6 = 154$ et $h_7 = 147$. Nora a tort : la hauteur n'est jamais exactement de 150 cm à la fin d'une semaine.

(d) On résout $196 - 7n < 100$, soit $7n > 96$, donc $n > \frac{96}{7} \approx 13{,}7$. Le plus petit entier qui convient est $n = 14$. Vérification : $h_{14} = 196 - 98 = 98 < 100$ et $h_{13} = 196 - 91 = 105 \geqslant 100$. La hauteur passe sous 100 cm pour la première fois à la fin de la semaine 14.

Ex. 7 ★★★ **Vélos en libre-service : deux modèles**

(a) On remplace n par $n + 1$, avec des parenthèses : $a_{n+1} = 15(n + 1) + 120 = 15n + 135$.
Donc $a_{n+1} - a_n = 15n + 135 - (15n + 120) = 15$. Ce résultat ne dépend pas de n : (a_n) est arithmétique de raison 15, avec $a_0 = 120$. Le modèle de Zoé prévoit 15 vélos de plus chaque mois.

(b) On calcule $b_0 = 120$, $b_1 = 1 + 6 + 120 = 127$ et $b_2 = 4 + 12 + 120 = 136$. Alors $b_1 - b_0 = 7$ et $b_2 - b_1 = 9$. Ces deux écarts sont différents, et ce seul contre-exemple suffit. (b_n) n'est pas arithmétique : le nombre de vélos ajoutés n'est pas le même chaque mois.

(c) La raison vaut 15, donc on saisit en B3 la formule =B2+15. B2 contient a_0, B3 contient a_1… Il y a un décalage de deux : a_6 est donc en B8. Avec $a_n = a_0 + nr$, on trouve $a_6 = 120 + 6 \times 15 = 210$. La cellule B8 affiche 210 vélos.

(d) $a_9 = 15 \times 9 + 120 = 255$ et $b_9 = 81 + 54 + 120 = 255$: les deux modèles prévoient 255 vélos au mois 9. Au mois 10, $a_{10} = 150 + 120 = 270$ et $b_{10} = 100 + 60 + 120 = 280$. C'est donc le modèle de Samir qui prévoit le plus de vélos au mois 10 : 280 vélos contre 270.

2. *Croissance linéaire : sens de variation et représentation graphique*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : le sens de variation en un coup d'œil**

(a) $u_{n+1} - u_n = (-12 + 3(n + 1)) - (-12 + 3n) = 3$: $r = 3 > 0$, la suite est croissante (même si $u_0 = -12$ est négatif).

(b) $v_{n+1} - v_n = (40 - 0{,}5(n + 1)) - (40 - 0{,}5n) = -0{,}5$: $r = -0{,}5 < 0$, la suite est décroissante.

Ex. 8 **(suite)**

(c) $r = 2 > 0$: la suite est croissante. Le premier terme -7 ne change rien.

(d) $r = -4 < 0$: la suite est décroissante, même si elle part de 100.

(e) $b_{n+1} - b_n = 0$: $r = 0$, la suite est constante (tous ses termes valent 9).

(f) $c_{n+1} - c_n = 5(n - 1) - 5(n - 2) = 5$: $r = 5 > 0$, la suite est croissante.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : lire un nuage de points**

(a) Le premier point a pour ordonnée 11 : $u_0 = 11$.

(b) On descend de 2,5 d'un point au suivant ($8{,}5 - 11 = -2{,}5$) : $r = -2{,}5$.

(c) $\frac{u_4 - u_0}{4} = \frac{1 - 11}{4} = -2{,}5$: on retrouve bien $r = -2{,}5$.

(d) Les points sont sur la droite $y = -2{,}5x + 11$ (coefficient directeur r, ordonnée à l'origine u_0). On ne relie pas les points.

(e) $r < 0$, donc la suite est décroissante.
$u_n = u_0 + nr = 11 - 2{,}5n$, donc $u_{10} = 11 - 25 = -14$.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les graphiques**

(a) Vrai. $u_{n+1} - u_n = 0{,}2 > 0$, donc la suite est croissante. Le premier terme, même négatif, n'a aucune influence sur le sens de variation.

(b) Faux. On monte de 1, puis de 2, puis de 3 : la différence n'est pas constante. Les points ne sont pas alignés, donc la suite n'est pas arithmétique.

(c) Faux. Les points $(n\,;u_n)$ sont bien sur la droite $y = 2x + 1$, mais on ne les relie pas : la suite n'est définie que pour les nombres entiers n.

(d) Faux. $v_{n+1} - v_n = (3 - 0{,}8(n + 1)) - (3 - 0{,}8n) = -0{,}8$. Les points sont sur la droite $y = -0{,}8x + 3$: son coefficient directeur est $-0{,}8$, et 3 est son ordonnée à l'origine.

Ex. 11 ★★☆ **Intérêts simples relevés tous les deux ans**

(a) En 2 ans, le capital augmente de $2\,544 - 2\,400 = 144$ €. Les rangs vont de 2 en 2, donc on divise par 2 : il augmente de 72 € par an.

(b) Avec des intérêts simples, l'augmentation annuelle vaut $C_0 \times \frac{t}{100}$.
Donc $\frac{72}{2\,400} \times 100 = 3$: le taux est de 3 % par an.

Ex. 11 **(suite)**

(c) (C_n) est arithmétique de raison 72 : $C_n = C_0 + nr = 2\,400 + 72n$. Comme $r = 72 > 0$, la suite est croissante.

(d) $C_{15} = 2\,400 + 72 \times 15 = 3\,480$. Au bout de 15 ans, Inès aura 3 480 €.

Ex. 12 ★★☆ **Deux salles d'escalade**

(a) $a_n = 30 + 8n$ et $b_n = 120 + 5n$. $a_{n+1} - a_n = (30 + 8(n+1)) - (30 + 8n) = 8$ et $b_{n+1} - b_n = (120 + 5(n+1)) - (120 + 5n) = 5$: les différences sont constantes, donc les deux suites sont arithmétiques, de raisons 8 et 5.

(b) Les points sont sur les droites $y = 8x + 30$ et $y = 5x + 120$. Le coefficient directeur est égal à la raison : la droite de A ($8 > 5$) monte le plus vite.

(c) $120 + 5n < 30 + 8n \iff 90 < 3n \iff n > 30$, donc $n = 31$. Vérification : $b_{31} = 275 < a_{31} = 278$, mais $b_{30} = a_{30} = 270$. La salle B devient strictement moins chère à partir de 31 séances.

(d) Cela fait 40 séances : $a_{40} = 30 + 8 \times 40 = 350$ € et $b_{40} = 120 + 5 \times 40 = 320$ €. Malik doit choisir la salle B, qui lui coûtera 320 €.

Ex. 13 ★★★ **Sécheresse au lac de barrage**

(a) Les points sont alignés : d'un point au suivant, on descend toujours de la même hauteur. La suite (h_n) est donc arithmétique. Sur l'axe des ordonnées, on lit $h_0 = 24$. On lit aussi $h_4 = 18$, d'où $r = \frac{h_4 - h_0}{4} = \frac{18-24}{4} = -1{,}5$. Le niveau baisse de 1,5 m par semaine.

(b) On a $h_n = h_0 + nr$, soit $h_n = 24 - 1{,}5n$. Les points sont sur la droite d'équation $y = -1{,}5x + 24$: son coefficient directeur est la raison, et son ordonnée à l'origine est h_0. On ne relie pas les points, car h_n n'est défini que pour des nombres entiers de semaines.

(c) Le premier terme ne joue aucun rôle dans le sens de variation. Pour tout n, $h_{n+1} - h_n = -1{,}5$. La raison est négative, donc la suite est strictement décroissante. Le niveau baisserait de la même façon s'il partait de 5 m.

(d) On résout $24 - 1{,}5n < 10$, c'est-à-dire $-1{,}5n < -14$, soit $n > \frac{14}{1{,}5} \approx 9{,}33$. Le premier entier qui convient est $n = 10$. Vérification : $h_{10} = 24 - 15 = 9 < 10$, alors que $h_9 = 24 - 13{,}5 = 10{,}5 \geqslant 10$. Le pompage sera interdit à partir de la 10e semaine.

Ex. 13 **(suite)**

(e) Pour tout n, $k_{n+1} - k_n = 15 - 15 = 0$. La suite (k_n) est arithmétique de raison 0 : elle est constante. Ses points, non reliés, sont alignés sur la droite horizontale d'équation $y = 15$.

Ex. 14 ★★★ **Deux associations qui reboisent**

(a) Sur le graphique, on lit $b_0 = 100$, $b_1 = 130$ et $b_2 = 170$. Donc $b_1 - b_0 = 30$ et $b_2 - b_1 = 40$. La différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante : les points ne sont pas alignés. Léo a tort, la suite (b_n) n'est pas arithmétique.

(b) Pour tout n, $a_{n+1} - a_n = 35(n+1) + 120 - (35n + 120) = 35$. La différence est constante : (a_n) est arithmétique de raison $r = 35$. Son premier terme est $a_0 = 35 \times 0 + 120 = 120$. A plante 35 arbres par an, en partant de 120 arbres.

(c) La raison 35 est le coefficient directeur de la fonction affine f. Les points $(n\,;a_n)$ sont alignés sur la droite d'équation $y = 35x + 120$, qui représente f. On ne relie pas ces points.

(d) La raison $r = 35$ est positive, donc la suite (a_n) est strictement croissante : chaque année, A a planté plus d'arbres au total que l'année précédente.

(e) On résout $35n + 120 \geqslant 1\,000$, c'est-à-dire $35n \geqslant 880$, soit $n \geqslant \frac{880}{35} \approx 25{,}14$. Le premier entier qui convient est $n = 26$. Vérification : $a_{26} = 1\,030 \geqslant 1\,000$, alors que $a_{25} = 995 < 1\,000$. A atteindra son objectif au bout de 26 années.

3. *Suites géométriques : récurrence, reconnaître, terme de rang n*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : calculer des termes**

(a) $u_1 = 7 \times 3 = 21$, puis $u_2 = 21 \times 3 = 63$.

(b) $u_2 = 4 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$. La puissance porte sur 3 seul, donc ce n'est pas $12^2 = 144$.

(c) Le premier terme est u_1, donc $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. On obtient $u_4 = 2 \times 4^3 = 2 \times 64 = 128$.

(d) $u_3 = u_0 \times 0{,}5^3 = 96 \times 0{,}125 = 12$.

(e) $u_2 = u_0 \times q^2$, donc $u_0 = \frac{u_2}{q^2} = \frac{50}{25} = 2$.

(f) On multiplie deux fois par 2 pour passer de u_3 à u_5 : $u_5 = u_3 \times q^2 = 11 \times 2^2 = 44$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : on multiplie ou on ajoute ?**

(a) $\frac{100}{400} = \frac{25}{100} = \frac{6{,}25}{25} = 0{,}25$: on multiplie chaque fois par 0,25. Ces nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,25.

(b) $8-4 = 12-8 = 16-12 = 4$: on ajoute chaque fois 4. Ces nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 4. Elle n'est pas géométrique : $\frac{8}{4} = 2$ mais $\frac{12}{8} = 1{,}5$.

(c) On ajoute chaque mois le même nombre : c'est une suite arithmétique de raison 30 (en €).

(d) « Double » veut dire « multiplié par 2 » : c'est une suite géométrique de raison $q = 2$.

(e) Baisser de 20 % revient à multiplier par $1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$: c'est une suite géométrique de raison 0,8.

(f) On ajoute 3 : c'est une suite arithmétique de raison 3. Elle n'est pas géométrique : $u_1 = 8$ et $u_2 = 11$, donc $\frac{8}{5} = 1{,}6$ alors que $\frac{11}{8} = 1{,}375$.

Ex. 17 ★★☆ **Prouver avec la lettre n**

(a) $u_{n+1} = 3 \times 4^{n+1}$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times 4^{n+1}}{3\times 4^n} = 4$. Ce quotient ne dépend pas de n : (u_n) est géométrique, de raison 4 et de premier terme $u_0 = 3 \times 4^0 = 3$.

(b) $v_0 = 2$, $v_1 = 3$ et $v_2 = 6$. On a $\frac{v_1}{v_0} = 1{,}5$ mais $\frac{v_2}{v_1} = 2$. Ces deux quotients sont différents : (v_n) n'est pas géométrique.

(c) $w_{n+1} = 2^{n+4}$, donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2$. Ce quotient est constant : (w_n) est géométrique de raison 2, avec $w_0 = 2^3 = 8$.

Ex. 18 ★★☆ **Deux termes connus**

(a) Pour passer de u_2 à u_5, on multiplie trois fois par q, donc $u_5 = u_2 \times q^3$. Ainsi $q^3 = \frac{96}{12} = 8$. Comme $q > 0$, on obtient $q = 2$ (et non $\frac{8}{3}$ ni 8). La raison est 2.

(b) $u_2 = u_0 \times q^2$, donc $u_0 = \frac{12}{2^2} = 3$. Le premier terme est 3.

(c) $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$, donc $u_8 = 3 \times 2^8 = 3 \times 256 = 768$.

(d) Non. Pour passer de u_5 à u_{10}, on multiplie cinq fois par $q = 2$: $u_{10} = u_5 \times 2^5 = 96 \times 32 = 3\,072$, et non $2 \times 96 = 192$. On le vérifie avec $u_{10} = 3 \times 2^{10} = 3\,072$.

Ex. 19 ★★☆ **Abonnés et tableur**

(a) Augmenter de 50 % revient à multiplier par $1 + \frac{50}{100} = 1{,}5$. On saisit donc en B3 la formule =B2*1,5.

(b) B4 : $360 \times 1{,}5 = 540$; B5 : $540 \times 1{,}5 = 810$; B6 : $810 \times 1{,}5 = 1\,215$.

(c) (a_n) est géométrique de raison 1,5 et de premier terme $a_0 = 240$, donc $a_n = 240 \times 1{,}5^n$. Ainsi $a_8 = 240 \times 1{,}5^8 \approx 6\,150{,}94$. Après 8 mois, Nora aura environ 6 151 abonnés.

(d) Non. Gagner 120 abonnés par mois, ce serait ajouter 120 (suite arithmétique) : on aurait 480 abonnés après 2 mois. Or on multiplie par 1,5, ce qui donne $a_2 = 540$ abonnés.

Ex. 20 ★★★ **Vrai ou faux : un médicament dans le sang**

(a) Faux. Baisser de 25 % revient à multiplier par $1 - \frac{25}{100} = 0{,}75$: (m_n) est géométrique de raison 0,75, donc $m_n = 80 \times 0{,}75^n$. Ainsi $m_4 = 80 \times 0{,}75^4 = 25{,}3125$. Les baisses ne s'ajoutent pas : après 4 heures, il reste environ 25,3 mg, et la quantité reste strictement positive.

(b) Vrai. Chaque heure, la quantité est multipliée par 0,75, quelle que soit la dose. Avec 160 mg, il reste après n heures $160 \times 0{,}75^n = 2 \times 80 \times 0{,}75^n = 2 \times m_n$ mg.

(c) Vrai. On note h_n la quantité chez Hugo après n heures. On passe de h_0 à h_2 en multipliant deux fois par 0,75 : $h_2 = h_0 \times 0{,}75^2$.
Donc $h_0 = \frac{117}{0{,}75^2} = \frac{117}{0{,}5625} = 208$. Hugo avait bien reçu 208 mg.

Ex. 21 ★★★ **Une algue dans le bassin**

(a) Chaque jour, la surface est multipliée par 2 : $a_{n+1} = 2 \times a_n$. On multiplie toujours par le même nombre, donc (a_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $a_1 = 5$.

(b) Le premier terme est a_1, donc $a_n = a_1 \times q^{n-1} = 5 \times 2^{n-1}$. Ainsi $a_5 = 5 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$. Le jour 5, l'algue couvre 80 m².

(c) On cherche le premier jour où $a_n \geqslant 200$.
$a_7 = 5 \times 2^6 = 320 \geqslant 200$. Vérification sur le jour précédent : $a_6 = 5 \times 2^5 = 160 < 200$. Selon ce modèle, l'algue couvre tout le bassin à partir du jour 7.

Ex. 21 (suite)

(d) On calcule les quotients de termes consécutifs : $\frac{10}{5} = 2$, $\frac{20}{10} = 2$, mais $\frac{35}{20} = 1{,}75$. Les quotients ne sont pas tous égaux, donc les relevés ne suivent pas une suite géométrique. Les deux premiers quotients égaux ne prouvaient rien : le modèle « double chaque jour » ne convient plus à partir du jour 4.

4. *Évolutions à taux constant et intérêts composés*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : de la raison au taux**

(a) Une hausse de 6 % donne $q = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$.

(b) Une baisse de 12 % donne $q = 1 - \frac{12}{100} = 0{,}88$ (et non 0,12).

(c) $(0{,}97 - 1) \times 100 = -3$: c'est une baisse de 3 % par période.

(d) $(1{,}125 - 1) \times 100 = 12{,}5$: le nombre de panneaux augmente de 12,5 % par an.

(e) Une baisse de 10 % donne $q = 0{,}9$, et $300 \times 0{,}9 = 270$: il reste 270 hectares.

(f) $\frac{2\,100}{2\,000} = 1{,}05$: le coefficient vaut 1,05, soit une hausse de 5 %.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : évolutions successives**

(a) $1{,}3^2 = 1{,}69$: le nombre de bornes est multiplié par 1,69 (soit +69 %, et non +60 %).

(b) Non. $1{,}1^3 = 1{,}331$ et $(1{,}331 - 1) \times 100 = 33{,}1$: la hausse est de 33,1 %. Les taux ne s'additionnent pas.

(c) Non. $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$: le prix final est 4 % plus bas que le prix de départ.

(d) $u_2 = u_0 \times q^2 = 500 \times 0{,}81 = 405$.

(e) $C_2 = 1\,000 \times 1{,}02^2 = 1\,000 \times 1{,}0404 = 1\,040{,}40$ €.

(f) $0{,}5^3 = 0{,}125$: il reste 12,5 % du stock initial.

Ex. 24 ★★☆ **Corriger une erreur : la consommation d'électricité**

(a) Pour une baisse de 7 %, on multiplie par $1 - \frac{7}{100} = 0{,}93$, et non par 0,07.
Donc $u_{n+1} = 0{,}93 \times u_n$: (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}93$.

(b) $u_n = u_0 \times q^n = 4\,500 \times 0{,}93^n$.

(c) 2029 correspond à $n = 2029 - 2026 = 3$. Alors $u_3 = 4\,500 \times 0{,}93^3 = 3\,619{,}606\,5$. En 2029, la consommation est d'environ 3 620 kWh.

Ex. 24 (suite)

(d) Non. La première année, la baisse est de $4\,500 \times 0{,}07 = 315$ kWh, donc $u_1 = 4\,185$. La deuxième année, elle n'est plus que de $4\,185 \times 0{,}07 = 292{,}95$ kWh. Les 7 % portent sur une consommation qui diminue : la baisse en kWh n'est pas constante.

Ex. 25 ★★☆ **Intérêts simples ou intérêts composés ?**

(a) Chaque année, on ajoute $5\,000 \times \frac{3}{100} = 150$ €.
Donc $A_n = 5\,000 + 150n$: c'est une suite arithmétique (croissance linéaire).

(b) $B_n = B_0 \times q^n = 5\,000 \times 1{,}03^n$, donc $B_8 = 5\,000 \times 1{,}03^8 \approx 6\,333{,}85$ €.

(c) $A_8 = 5\,000 + 150 \times 8 = 6\,200$ €. Comme $6\,333{,}85 - 6\,200 = 133{,}85$, l'offre B rapporte 133,85 € de plus au bout de 8 ans.

(d) Rémi trouve $5\,000 \times 1{,}27 = 6\,350$ €, soit environ 16 € de trop. On n'arrondit qu'à la fin du calcul : la réponse juste est 6 333,85 €.

Ex. 26 ★★☆ **Les abonnés d'un podcast au tableur**

(a) Une hausse de 5 % correspond à une multiplication par 1,05. On écrit donc =B2*1,05 en B3.

(b) B3 : $2\,400 \times 1{,}05 = 2\,520$; B4 : $2\,520 \times 1{,}05 = 2\,646$; B5 : $2\,646 \times 1{,}05 = 2\,778{,}3 \approx 2\,778$ abonnés.

(c) Non. =B2+120 ajoute 120 abonnés chaque mois : c'est une croissance linéaire. B3 vaut bien 2 520, mais B4 vaut $2\,520 + 120 = 2\,640$ au lieu de 2 646. En effet, une hausse de 5 % sur 2 520 ajoute $2\,520 \times 0{,}05 = 126$ abonnés : le gain augmente chaque mois.

(d) $u_n = 2\,400 \times 1{,}05^n$, donc $u_{12} = 2\,400 \times 1{,}05^{12} \approx 4\,310$. Au bout de 12 mois, le podcast aura environ 4 310 abonnés.

Ex. 27 ★★★ **Un médicament éliminé heure par heure**

(a) Éliminer 15 %, c'est garder 85 % : le coefficient est $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$, et pas 0,15 (la part éliminée).
Donc $u_{n+1} = 0{,}85 \times u_n$: (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $u_0 = 400$.

(b) $u_n = u_0 \times q^n = 400 \times 0{,}85^n$. À 11 h, il s'est écoulé 3 heures, donc on prend $n = 3$ (et pas 11) : $u_3 = 400 \times 0{,}85^3 = 400 \times 0{,}614125 = 245{,}65$. À 11 h, il reste 245,65 mg de médicament dans le sang.

Ex. 27 (suite)

(c) Faux. Le coefficient global sur 3 heures est $0{,}85^3 = 0{,}614125$. Le taux global vaut donc $(0{,}614125 - 1) \times 100 \approx -38{,}59\,\%$. En 3 heures, le corps élimine environ 38,59 % du médicament, pas 45 % : les taux ne s'additionnent pas.

(d) Ligne 4 : `u = u * 0.85`. Le programme affiche le premier rang n tel que $u_n < 100$, c'est-à-dire le nombre d'heures au bout duquel le médicament n'agit plus. Il affiche 9 : $u_9 = 400 \times 0{,}85^9 \approx 92{,}65 < 100$. Vérification : $u_8 = 400 \times 0{,}85^8 \approx 109{,}00 \geqslant 100$. Comme $8 + 9 = 17$, le médicament n'agit plus à partir de 17 h.

Ex. 28 ★★★ Le prix d'une trottinette électrique

(a) $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{640 \times 0{,}96^{n+1}}{640 \times 0{,}96^n} = 0{,}96$. Ce quotient est constant : (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}96$ et de premier terme $P_0 = 640$. Comme $(0{,}96 - 1) \times 100 = -4$, le prix baisse de 4 % par an.

(b) 2030 correspond à $n = 2030 - 2026 = 4$ (et pas $n = 2030$). $P_4 = 640 \times 0{,}96^4 = 640 \times 0{,}84934656 = 543{,}5817984$. En 2030, la trottinette coûtera environ 543,58 €.

(c) On cherche le premier n tel que $640 \times 0{,}96^n < 500$. D'après le tableau, $640 \times 0{,}7828 \approx 500{,}99 \geqslant 500$ et $640 \times 0{,}7514 \approx 480{,}90 < 500$, donc $n = 7$. Vérification avec la formule : $P_7 = 640 \times 0{,}96^7 \approx 480{,}93 < 500$, alors que $P_6 = 640 \times 0{,}96^6 \approx 500{,}96 \geqslant 500$. Comme $2026 + 7 = 2033$, le prix passe sous 500 € en 2033.

(d) Dans l'autre magasin, le prix baisse de 25 € par an : $Q_n = 640 - 25n$ (croissance linéaire). 2036 correspond à $n = 10$. $Q_{10} = 640 - 25 \times 10 = 390$ € et $P_{10} = 640 \times 0{,}96^{10} \approx 425{,}49$ €. Comme $425{,}49 - 390 = 35{,}49$, en 2036 l'autre magasin est le moins cher, de 35,49 €.

5. *Croissance exponentielle : sens de variation, représentation graphique*

Ex. 29 ★☆☆ Croissante, décroissante ou constante ?

(a) $u_0 = 12 > 0$ et $q = 1{,}2 > 1$: (u_n) est strictement croissante.

(b) $v_{n+1} = 0{,}95 \times v_n$: la raison vaut $q = 0{,}95$. $v_0 = 300 > 0$ et $0 < q < 1$: (v_n) est strictement décroissante.

(c) $w_0 = 0{,}3 > 0$ et $q = 3 > 1$: (w_n) est strictement croissante, même si elle part d'un petit nombre.

Ex. 29 (suite)

(d) $a_{n+1} = 1 \times a_n$: la raison vaut $q = 1$. La suite est constante, tous ses termes valent 7.

(e) $q = \frac{b_1}{b_0} = \frac{8\,910}{9\,000} = 0{,}99$. $b_0 = 9\,000 > 0$ et $0 < q < 1$: (b_n) est strictement décroissante, même avec un grand premier terme.

(f) $q = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02 > 1$ et $\ell_0 = 600 > 0$: la suite est strictement croissante.

(g) $q = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$, donc $0 < q < 1$, et $p_0 = 2\,000 > 0$: la suite est strictement décroissante.

Ex. 30 ★★☆ Lire la raison sur un nuage de points

(a) On lit $u_0 = 32$ et $u_1 = 16$.

(b) $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{16}{32} = 0{,}5$.

(c) $u_0 = 32 > 0$ et $0 < q = 0{,}5 < 1$: (u_n) est strictement décroissante.

(d) $u_1 - u_0 = -16$ et $u_2 - u_1 = 8 - 16 = -8$. Les écarts ne sont pas constants, donc les points ne sont pas alignés.

(e) Non. La suite n'est définie que pour des n entiers : on place les points $(n\,;u_n)$ sans les relier.

(f) $u_n = u_0 \times q^n = 32 \times 0{,}5^n$, donc $u_6 = 32 \times 0{,}5^6 = 0{,}5$.

(g) (u_n) est strictement décroissante, donc $u_{11} < u_{10}$. En effet, $u_{11} = 0{,}5 \times u_{10}$, avec $u_{10} > 0$.

Ex. 31 ★★☆ Deux podcasts : croissance linéaire ou exponentielle ?

(a) $40 - 25 = 55 - 40 = 70 - 55 = 85 - 70 = 15$. L'écart est constant : (a_n) est arithmétique de raison 15 (croissance linéaire). On vérifie : $a_{n+1} - a_n = 25 + 15(n+1) - (25 + 15n) = 15$.
Donc $a_n = 25 + 15n$.

(b) $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{40}{20} = \frac{80}{40} = 2$. Le quotient est constant : (b_n) est géométrique de raison 2 (croissance exponentielle).
On vérifie : $\frac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = 2$.
Donc $b_n = 5 \times 2^n$.

(c) Écarts de (b_n) : 5, 10, 20, 40. Ils ne sont pas constants, ils doublent : les points $(n\,;b_n)$ ne sont pas alignés, ils montent de plus en plus. Les écarts de (a_n) sont constants : les points $(n\,;a_n)$ sont alignés sur la droite $y = 15x + 25$.

(d) $a_6 = 25 + 15 \times 6 = 115$ et $b_6 = 5 \times 2^6 = 320$. Au bout de 6 mois, B compte 32 000 abonnés contre 11 500 pour A : B est largement devant, alors qu'il partait plus bas.

Ex. 32 ★★☆ **Un médicament qui s'élimine**

(a) Baisser de 20 % revient à multiplier par $1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$, donc $c_{n+1} = 0{,}8 \times c_n$. On obtient $c_1 = 40$, $c_2 = 32$ et $c_3 = 25{,}6$, en mg/L.

(b) (c_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $c_0 = 50$. Formule : $c_n = c_0 \times q^n$, donc $c_n = 50 \times 0{,}8^n$, et $c_4 = 50 \times 0{,}8^4 = 20{,}48$ mg/L.

(c) $c_0 = 50 > 0$ et $0 < q = 0{,}8 < 1$: (c_n) est strictement décroissante. La concentration diminue chaque heure.

(d) Les baisses ne sont pas constantes : 10, puis $40 - 32 = 8$, puis 6,4… Elles sont de plus en plus petites. On a $c_5 = 50 \times 0{,}8^5 \approx 16{,}38$ mg/L. La concentration se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre.

Ex. 33 ★★☆ **Des nénuphars au tableur**

(a) Augmenter de 25 % revient à multiplier par 1,25. En B3, on saisit donc `=B2*1,25`.

(b) B4 : $500 \times 1{,}25 = 625$. B5 : $625 \times 1{,}25 = 781{,}25$.

(c) (u_n) est géométrique, avec $u_0 = 400 > 0$ et $q = 1{,}25 > 1$: elle est strictement croissante. Le nombre de nénuphars augmente chaque année.

(d) Les hausses valent $500 - 400 = 100$, puis $625 - 500 = 125$, puis $781{,}25 - 625 = 156{,}25$. Elles sont de plus en plus grandes, donc les points ne sont pas alignés.

(e) $u_n = u_0 \times q^n = 400 \times 1{,}25^n$, donc $u_6 = 400 \times 1{,}25^6 \approx 1\,526$. Au bout de 6 ans, l'étang compte environ 1 526 nénuphars.

Ex. 34 ★★★ **Une usine réduit ses émissions de CO(2)**

(a) Baisser de 15 %, c'est multiplier par $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$. Donc pour tout n, $e_{n+1} = 0{,}85 \times e_n$: (e_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $e_0 = 800$. Formule : $e_n = e_0 \times q^n$, donc $e_n = 800 \times 0{,}85^n$. On vérifie : $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{800 \times 0{,}85^{n+1}}{800 \times 0{,}85^n} = 0{,}85$.

(b) $e_{n+1} - e_n = 0{,}85 \times e_n - e_n = (0{,}85 - 1) \times e_n = -0{,}15 \times e_n$. Comme $e_0 = 800 > 0$ et $q = 0{,}85 > 0$, tous les termes sont strictement positifs : $e_n > 0$, donc $-0{,}15 \times e_n < 0$. Ainsi $e_{n+1} < e_n$ pour tout n : la suite (e_n) est strictement décroissante. Les émissions baissent chaque année.

Ex. 34 (suite)

(c) $e_1 = 800 \times 0{,}85 = 680$; $e_2 = 680 \times 0{,}85 = 578$; $e_3 = 578 \times 0{,}85 = 491{,}3$. Baisses : $800 - 680 = 120$; $680 - 578 = 102$; $578 - 491{,}3 = 86{,}7$. Les baisses ne sont pas constantes : elles sont de plus en plus petites. Les points ne sont donc pas alignés, et (e_n) n'est pas arithmétique. Les émissions baissent de 120 t, puis de 102 t, puis de 86,7 t.

(d) $e_4 = 800 \times 0{,}85^4 \approx 417{,}61$. Une baisse de 60 % donnerait $800 \times 0{,}4 = 320$ t. La direction a tort : chaque baisse de 15 % porte sur une valeur plus petite. Le coefficient global vaut $0{,}85^4 \approx 0{,}522$, donc la baisse globale est $(1 - 0{,}85^4) \times 100 \approx 47{,}80$ %. En 2030, l'usine émettra environ 417,61 tonnes.

(e) $e_2 = 578 < 650$, alors que $e_1 = 680 > 650$. Comme (e_n) est strictement décroissante, on a ensuite $e_n \leqslant 578 < 650$. La première usine émet moins que la seconde à partir de 2028.

Ex. 35 ★★★ **Deux applis de covoiturage : qui passera devant ?**

(a) On lit $a_0 = 8$ et $a_1 = 12$.
Donc $q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{12}{8} = 1{,}5$. Formule : $a_n = a_0 \times q^n$, donc $a_n = 8 \times 1{,}5^n$
(en milliers d'utilisateurs).

(b) On lit $a_2 = 18$ (et on vérifie : $12 \times 1{,}5 = 18$). Montées : $12 - 8 = 4$, puis $18 - 12 = 6$. Elles ne sont pas égales, donc les points ne sont pas alignés : les montées grandissent (on ne relie pas les points). Comme $a_0 = 8 > 0$ et $q = 1{,}5 > 1$, $a_{n+1} - a_n = a_n \times (1{,}5 - 1) = 0{,}5 \times a_n > 0$: la suite (a_n) est strictement croissante. Le nombre d'utilisateurs de A augmente chaque mois.

(c) Chaque mois, on ajoute 4 : $b_{n+1} = b_n + 4$.
Donc (b_n) est arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $b_0 = 30$. Formule : $b_n = b_0 + n \times r$, donc $b_n = 30 + 4n$. On vérifie : $b_{n+1} - b_n = 30 + 4(n+1) - (30 + 4n) = 4$. Ses points sont alignés sur la droite d'équation $y = 4x + 30$
(on ne les relie pas non plus).

(d) $a_2 = 18$; $a_3 = 18 \times 1{,}5 = 27$; $a_4 = 27 \times 1{,}5 = 40{,}5$; $a_5 = 40{,}5 \times 1{,}5 = 60{,}75 \approx 60{,}8$. $b_2 = 38$; $b_3 = 42$; $b_4 = 46$; $b_5 = 50$. Tableau : ligne a_n : 8 ; 12 ; 18 ; 27 ; 40,5 ; 60,8. Ligne b_n : 30 ; 34 ; 38 ; 42 ; 46 ; 50
(en milliers d'utilisateurs).

Ex. 35 **(suite)**

(e) Il a tort. Au rang 4 : $a_4 = 40{,}5 < b_4 = 46$, B est encore devant. Au rang 5 : $a_5 \approx 60{,}8 > b_5 = 50$, A passe devant. L'écart ne fait ensuite que grandir : $a_6 = 8 \times 1{,}5^6 \approx 91{,}1$ contre $b_6 = 54$. Une suite géométrique de raison supérieure à 1 finit par dépasser une suite arithmétique. A dépasse B au bout de 5 mois.

6. *Problèmes de seuil (calcul, tableau, programme Python)*

Ex. 36 ★☆☆ **Seuils d'une croissance linéaire**

(a) $150 + 8n > 400 \iff 8n > 250 \iff n > 31{,}25$, donc $n = 32$. Vérification : $u_{32} = 406 > 400$ et $u_{31} = 398 \leqslant 400$.

(b) $900 - 35n < 200 \iff -35n < -700 \iff n > 20$ (on divise par -35, qui est négatif : le sens de l'inégalité change). $n = 20$ ne convient pas, car $u_{20} = 200$ n'est pas < 200.
Donc $n = 21$, avec $u_{21} = 165 < 200$.

(c) $60 + 12n \geqslant 300 \iff 12n \geqslant 240 \iff n \geqslant 20$, donc $n = 20$. Vérification : $u_{20} = 300$ convient (inégalité large) et $u_{19} = 288 < 300$.

(d) $48 - 2{,}5n < 0 \iff -2{,}5n < -48 \iff n > 19{,}2$ (le sens change), donc $n = 20$. Vérification : $u_{20} = -2 < 0$ et $u_{19} = 0{,}5 \geqslant 0$.

(e) La suite est arithmétique de raison -40, donc $u_n = u_0 + nr = 1\,200 - 40n$. $1\,200 - 40n \leqslant 500 \iff -40n \leqslant -700 \iff n \geqslant 17{,}5$, donc $n = 18$.
Vérification : $u_{18} = 480 \leqslant 500$ et $u_{17} = 520 > 500$.

Ex. 37 ★☆☆ **Seuils de proche en proche**

(a) Termes : 5 ; 15 ; 45 ; 135 ; 405 ; 1 215. $u_4 = 405 \leqslant 1\,000$ et $u_5 = 1\,215 > 1\,000$, donc $n = 5$.

(b) Termes : 800 ; 400 ; 200 ; 100 ; 50 ; 25. $u_4 = 50 \geqslant 30$ et $u_5 = 25 < 30$, donc $n = 5$.

(c) Termes : 64 ; 96 ; 144 ; 216 ; 324. $u_3 = 216 < 324$ et $u_4 = 324 \geqslant 324$ (l'égalité suffit, car l'inégalité est large), donc $n = 4$.

(d) Termes : 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512. $u_7 = 256$ n'est pas > 256 (l'inégalité est stricte) et $u_8 = 512 > 256$, donc $n = 8$.

(e) On cherche le premier n tel que $1{,}2^n \geqslant 2$. $1{,}2^2 = 1{,}44$; $1{,}2^3 = 1{,}728 < 2$; $1{,}2^4 = 2{,}0736 \geqslant 2$. Le prix a au moins doublé au bout de 4 ans.

Ex. 37 **(suite)**

(f) Termes : 2 000 ; 200 ; 20 ; 2 ; 0,2. $u_3 = 2 \geqslant 1$ et $u_4 = 0{,}2 < 1$, donc $n = 4$.

Ex. 38 ★★☆ **Population et tableau de puissances**

(a) Une hausse de 3 % revient à multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$. La suite (u_n) est donc géométrique, de premier terme $u_0 = 24\,000$ et de raison $q = 1{,}03$. D'où $u_n = u_0 \times q^n = 24\,000 \times 1{,}03^n$.

(b) Comme $24\,000 > 0$, on peut diviser par 24 000 sans changer le sens : $24\,000 \times 1{,}03^n > 30\,000 \iff 1{,}03^n > \frac{30\,000}{24\,000} = 1{,}25$.

(c) $1{,}03^7 \approx 1{,}2299 < 1{,}25$ et $1{,}03^8 \approx 1{,}2668 > 1{,}25$, donc $n = 8$. Vérification : $u_7 \approx 29\,517 \leqslant 30\,000$ et $u_8 \approx 30\,402 > 30\,000$.

(d) Le rang $n = 8$ n'est pas une année : il correspond à l'année $2026 + 8 = 2034$. La population dépassera 30 000 habitants pour la première fois en 2034.

Ex. 39 ★★☆ **Corriger un programme de seuil**

(a) Il affiche 0. Au départ, $u = 1\,500$ et la condition `1500 >= 3000` est fausse : la boucle ne s'exécute jamais et la fonction renvoie la valeur de départ $n = 0$.

(b) Il faut écrire `while u < 3000:`. La boucle tourne tant que le seuil n'est pas atteint : sa condition est la négation de ce qu'on cherche, $u \geqslant 3\,000$.

(c) Une hausse de 6 % revient à multiplier par 1,06 : on écrit `u = u * 1.06`, et non `u + 1.06`. Il faut aussi compter les mois : on ajoute `n = n + 1` dans la boucle.

(d) $1\,500 \times 1{,}06^{11} \approx 2\,847 < 3\,000$ et $1\,500 \times 1{,}06^{12} \approx 3\,018 \geqslant 3\,000$. Le programme renvoie donc 12 : la chaîne aura au moins 3 000 abonnés au bout de 12 mois, soit un nombre d'abonnés doublé.

Ex. 40 ★★☆ **Doubler son épargne : composé ou simple ?**

(a) Pour Noé, on multiplie par 1,035 chaque année : la suite est géométrique de raison 1,035, donc $u_n = 2\,000 \times 1{,}035^n$. Pour Inès, on ajoute 90 € chaque année : la suite est arithmétique de raison 90, donc $v_n = 2\,000 + 90n$.

(b) Non. $1{,}990 < 2$, donc $u_{20} \approx 2\,000 \times 1{,}990 = 3\,980 < 4\,000$: au bout de 20 ans, le capital n'a pas encore doublé. On a $1{,}035^{21} \approx 2{,}059 \geqslant 2$, donc $u_{21} \approx 4\,119 \geqslant 4\,000$. Le capital de Noé double au bout de 21 ans.

Ex. 40 **(suite)**

(c) $2\,000 + 90n \geqslant 4\,000 \iff 90n \geqslant 2\,000 \iff n \geqslant \frac{2\,000}{90} \approx 22{,}2$, donc $n = 23$. Vérification : $v_{22} = 3\,980 < 4\,000$ et $v_{23} = 4\,070 \geqslant 4\,000$.

(d) Noé double son capital en 21 ans et Inès en 23 ans : c'est Noé qui le double en premier. Pourtant, Inès touche au départ 90 € par an, contre 70 € pour Noé ; mais les intérêts composés produisent eux-mêmes des intérêts.

Ex. 41 ★★★ **Deux plans pour réduire les émissions**

(a) Plan A : on enlève 260 chaque année, donc $a_{n+1} = a_n - 260$. Avec $a_n = 8\,400 - 260n$, on a $a_{n+1} - a_n = 8\,400 - 260(n+1) - 8\,400 + 260n = -260$. Cette différence est constante : (a_n) est arithmétique de raison -260. Plan B : baisser de 4 % revient à multiplier par $1 - \frac{4}{100} = 0{,}96$, donc $b_{n+1} = 0{,}96 \times b_n$. La suite (b_n) est géométrique de raison 0,96 et $b_n = 8\,400 \times 0{,}96^n$.

(b) On résout $8\,400 - 260n < 5\,000$, soit $-260n < -3\,400$. On divise par -260, qui est négatif, donc le sens change : $n > \frac{3\,400}{260} \approx 13{,}08$. Le plus petit entier qui convient est $n = 14$ (et non 13). Vérification : $a_{14} = 4\,760 < 5\,000$ et $a_{13} = 5\,020 \geqslant 5\,000$. Avec le plan A, les émissions passent sous 5 000 tonnes en $2026 + 14 = 2040$.

(c) Comme $8\,400 > 0$, on a $8\,400 \times 0{,}96^n < 5\,000 \iff 0{,}96^n < \frac{5\,000}{8\,400} \approx 0{,}5952$. D'après le tableau, $0{,}96^{12} \approx 0{,}6127 > 0{,}5952$ et $0{,}96^{13} \approx 0{,}5882 < 0{,}5952$, donc $n = 13$. Vérification : $b_{13} \approx 4\,940{,}89$ et $b_{12} \approx 5\,146{,}76$. Avec le plan B, les émissions passent sous 5 000 tonnes en 2039 : le plan B y arrive un an avant le plan A.

(d) Faux. On a $8\,400 > 0$ et $0{,}96 > 0$, donc $0{,}96^n > 0$ et $b_n = 8\,400 \times 0{,}96^n > 0$ pour tout n. Les émissions diminuent chaque année mais ne deviennent jamais nulles : l'inéquation $b_n \leqslant 0$ n'a pas de solution.

Ex. 42 ★★★ **Bornes de recharge : seuil et doublement**

(a) Augmenter de 12 % revient à multiplier par $1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$, donc $u_{n+1} = 1{,}12 \times u_n$. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1\,800$ et de raison 1,12, donc $u_n = 1\,800 \times 1{,}12^n$.

(b) La boucle continue tant que `u < A` et s'arrête au premier terme pour lequel cette condition est fausse, c'est-à-dire $u_n \geqslant A$. Le programme cherche donc le premier rang où u_n atteint A. Pour « dépasse strictement A », on écrit la négation de $u > A$: `while u <= A:`.

Ex. 42 **(suite)**

(c) $u_n = 1\,800 \times 1{,}12^n$. On a $u_9 \approx 4\,991{,}54 < 5\,000$: ce n'est pas assez, même si c'est très proche. Et $u_{10} \approx 5\,590{,}53 \geqslant 5\,000$.
Donc `seuil(5000)` renvoie 10 : la région aura au moins 5 000 bornes en $2026 + 10 = 2036$.

(d) Doubler, c'est atteindre $2 \times 1\,800 = 3\,600$ bornes (et non $A = 2$) : elle appelle `seuil(3600)`. On a $u_6 \approx 3\,552{,}88 < 3\,600$ et $u_7 \approx 3\,979{,}23 \geqslant 3\,600$. Le programme renvoie 7 : le nombre de bornes aura doublé en $2026 + 7 = 2033$.