Corrigé – Sommes de termes d'une suite

Mathématiques – Première spécialité

Suites arithmétiques et géométriques · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Compter les termes, sommer des entiers ★

Calcule le nombre de termes ou la somme demandée.

a)
$$N = 19 - 4 + 1$$
$$= 16$$
On compte aussi le premier terme : $+1$.

b)
$$N = 50 - 1 + 1$$
$$= 50$$

c) On utilise $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ avec $n = 100$.
$$\frac{100 \times 101}{2}$$
$$= \frac{10\,100}{2}$$
$$= 5050$$

d)
$$\frac{24 \times 25}{2}$$
$$= \frac{600}{2}$$
$$= 300$$

e) La somme va de 1 à $n+1$: on remplace n par $n+1$ dans la formule.
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

f) *La somme ne commence pas à* 1 *: on compte les termes.*
$$N = 40 - 11 + 1$$
$$= 30$$
$$S = 30 \times \frac{11 + 40}{2}$$
$$= 30 \times \frac{51}{2}$$
$$= 15 \times 51$$
$$= 765$$

g) On met 2 en facteur : $2 + 4 + \cdots + 100 = 2(1 + 2 + \cdots + 50)$.
$$S = 2 \times \frac{50 \times 51}{2}$$
$$= 50 \times 51$$
$$= 2550$$

h) Les termes augmentent de 2 : il y a $\dfrac{99-1}{2}+1=50$ termes.

$$\begin{aligned}S &= 50\times\frac{1+99}{2}\\ &= 50\times 50\\ &= 2500\end{aligned}$$

Exercice 2 – Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ★

Calcule la somme : premier terme, dernier terme, nombre de termes, puis la formule.

a)

$$\begin{aligned}u_{19} &= 3+19\times 2\\ &= 41\end{aligned}$$

De u_0 à u_{19} : $19-0+1=20$ termes.

$$\begin{aligned}S &= 20\times\frac{3+41}{2}\\ &= 20\times 22\\ &= 440\end{aligned}$$

b) $u_1=4$ et $u_{10}=49$; de u_1 à u_{10} : 10 termes.

$$\begin{aligned}S &= 10\times\frac{4+49}{2}\\ &= 10\times\frac{53}{2}\\ &= 5\times 53\\ &= 265\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}u_{25} &= 100+25\times(-4)\\ &= 100-100\\ &= 0\end{aligned}$$

De u_0 à u_{25} : 26 termes.

$$\begin{aligned}S &= 26\times\frac{100+0}{2}\\ &= 26\times 50\\ &= 1300\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}u_4 &= 2+0{,}5\times 4\\ &= 4\\ u_{15} &= 2+0{,}5\times 15\\ &= 9{,}5\end{aligned}$$

De u_4 à u_{15} : $15-4+1=12$ termes.

$$\begin{aligned}S &= 12\times\frac{4+9{,}5}{2}\\ &= 6\times 13{,}5\\ &= 81\end{aligned}$$

e) Suite arithmétique de raison 3 : $100=7+3k$ donne $k=31$, donc $31+1=32$ termes.

$$\begin{aligned}S &= 32\times\frac{7+100}{2}\\ &= 16\times 107\\ &= 1712\end{aligned}$$

f) Raison 2 : $25 = -5 + 2k$ donne $k = 15$, donc 16 termes.

$$\begin{aligned} S &= 16 \times \frac{-5 + 25}{2} \\ &= 16 \times 10 \\ &= 160 \end{aligned}$$

g) *Départ au rang* 1 *:* $u_9 = u_1 + 8r$.

$$\begin{aligned} u_9 &= 1 + 8 \times \frac{1}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

De u_1 à u_9 : 9 termes.

$$\begin{aligned} S &= 9 \times \frac{1 + 5}{2} \\ &= 9 \times 3 \\ &= 27 \end{aligned}$$

h) Premier terme $u_0 = 1$, dernier terme $u_n = 3n + 1$, et $n + 1$ termes.

$$\begin{aligned} S &= (n+1) \times \frac{1 + 3n + 1}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3 – Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ★

Calcule la somme avec la formule (valeur exacte).

a) Avec $q = 2$ et $n = 10$: 11 termes.

$$\begin{aligned} &\frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} \\ &= \frac{1 - 2048}{-1} \\ &= 2047 \end{aligned}$$

b) $q = 3$: 7 termes.

$$\begin{aligned} &\frac{1 - 3^{7}}{1 - 3} \\ &= \frac{1 - 2187}{-2} \\ &= \frac{-2186}{-2} \\ &= 1093 \end{aligned}$$

c) $q = 0{,}5$: 10 termes.

$$\begin{aligned} &\frac{1 - 0{,}5^{10}}{1 - 0{,}5} \\ &= \frac{1 - \dfrac{1}{1024}}{\dfrac{1}{2}} \\ &= \frac{1023}{1024} \times 2 \\ &= \frac{1023}{512} \end{aligned}$$

d) Premier terme 5, raison 4, 5 termes.

$$\begin{aligned} & 5 \times \frac{1-4^5}{1-4} \\ &= 5 \times \frac{1-1024}{-3} \\ &= 5 \times \frac{-1023}{-3} \\ &= 5 \times 341 \\ &= 1705 \end{aligned}$$

e) Premier terme 3, raison -2, 6 termes.

$$\begin{aligned} & 3 \times \frac{1-(-2)^6}{1-(-2)} \\ &= 3 \times \frac{1-64}{3} \\ &= 3 \times \frac{-63}{3} \\ &= -63 \end{aligned}$$

f) *Le premier terme est $u_3 = 8$, pas u_0.*

De u_3 à u_{10} : $10 - 3 + 1 = 8$ termes.

$$\begin{aligned} & 8 \times \frac{1-2^8}{1-2} \\ &= 8 \times 255 \\ &= 2040 \end{aligned}$$

g) $q = \dfrac{1}{3}$: 5 termes.

$$\begin{aligned} & \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{242}{243}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{242}{243} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{121}{81} \end{aligned}$$

h) $q = 10$: 6 termes.

$$\begin{aligned} & \frac{1-10^6}{1-10} \\ &= \frac{-999\,999}{-9} \\ &= 111\,111 \end{aligned}$$

On pouvait aussi l'écrire directement : 111 111.

Exercice 4 – Sommes à transformer ★★

Calcule ou exprime la somme en fonction de n.

a) $\dfrac{n(n+1)}{2} = 210 \iff n(n+1) = 420 \iff n^2 + n - 420 = 0$.

$\Delta = 1 + 4 \times 420 = 1\,681 = 41^2$, d'où $n = \dfrac{-1+41}{2} = 20$ ou $n = \dfrac{-1-41}{2} = -21$.

n est un entier positif : $n = 20$.

b) Suite arithmétique de raison 2, de 1 à $2n-1$: $\dfrac{2n-1-1}{2}+1 = n$ termes.

$$\begin{aligned} S &= n \times \frac{1+2n-1}{2} \\ &= n \times \frac{2n}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

c) $q = 2$ et $n+1$ termes.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= \frac{1-2^{n+1}}{-1} \\ &= 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

d) Premier terme 3, raison 2, de 2^0 à 2^6 : 7 termes.

$$\begin{aligned} S &= 3 \times \frac{1-2^7}{1-2} \\ &= 3 \times \frac{-127}{-1} \\ &= 3 \times 127 \\ &= 381 \end{aligned}$$

e) De 101 à 200 : $200-101+1 = 100$ termes.

$$\begin{aligned} S &= 100 \times \frac{101+200}{2} \\ &= 50 \times 301 \\ &= 15\,050 \end{aligned}$$

f) *Le premier terme est* 2 *: de* 2^1 *à* 2^9*, il y a* 9 *termes.*

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \frac{1-2^9}{1-2} \\ &= 2 \times \frac{-511}{-1} \\ &= 2 \times 511 \\ &= 1022 \end{aligned}$$

Exercice 5 – Petits problèmes ★★

Modélise par une suite, puis calcule la somme. Arrondis à l'euro près quand c'est utile. Calculatrice autorisée pour la question e.

a) Les rangées forment une suite arithmétique : $p_1 = 20$, raison 3.

$$\begin{aligned} p_{15} &= 20 + (15-1) \times 3 \\ &= 20 + 42 \\ &= 62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 15 \times \frac{20+62}{2} \\ &= 15 \times 41 \\ &= 615 \end{aligned}$$

Les gradins comptent 615 places.

b) Versements : suite arithmétique, $v_1 = 50$, raison 10, 12 termes.

$$\begin{aligned} v_{12} &= 50 + 11 \times 10 \\ &= 160 \\ S &= 12 \times \frac{50 + 160}{2} \\ &= 6 \times 210 \\ &= 1260 \end{aligned}$$

En un an, Sacha a épargné 1 260 €.

c) Nouvelles personnes au jour k : 4^k (suite géométrique de raison 4, premier terme 1).

Du jour 0 au jour 5 : 6 termes.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 - 4^6}{1 - 4} \\ &= \frac{1 - 4096}{-3} \\ &= 1365 \end{aligned}$$

À la fin du jour 5, 1 365 personnes connaissent la nouvelle.

d) Hauteurs des rebonds : $10 \times 0{,}6 = 6$, puis 3,6, puis 2,16 (avant le 4^e contact, il y a eu 3 rebonds).

Chaque rebond compte deux fois (montée et descente), la chute de départ une fois.

$$\begin{aligned} d &= 10 + 2 \times (6 + 3{,}6 + 2{,}16) \\ &= 10 + 2 \times 11{,}76 \\ &= 10 + 23{,}52 \\ &= 33{,}52 \end{aligned}$$

La balle a parcouru 33,52 m.

e) Salaires : suite géométrique, premier terme 24 000, raison 1,02, 10 termes.

$$S = 24\,000 \times \frac{1 - 1{,}02^{10}}{1 - 1{,}02} \approx 262\,793.$$

En 10 ans, le total perçu est d'environ 262 793 €.

Exercice 6 – Les gradins du stade ★★★

1. (p_n) est arithmétique de raison 4, avec $p_1 = 40$: $p_n = 40 + 4(n-1)$.

$$\begin{aligned} p_{10} &= 40 + 4 \times (10 - 1) \\ &= 40 + 36 \\ &= 76 \\ S_{10} &= 10 \times \frac{40 + 76}{2} \\ &= 5 \times 116 \\ &= 580 \end{aligned}$$

2. $p_n = 40 + 4n - 4 = 4n + 36$; de p_1 à p_n, il y a n termes.

$$\begin{aligned} S_n &= n \times \frac{40 + 4n + 36}{2} \\ &= n \times \frac{4n + 76}{2} \\ &= n\,(2n + 38) \\ &= 2n^2 + 38n \end{aligned}$$

3. $S_n \geqslant 5\,000 \iff 2n^2 + 38n - 5\,000 \geqslant 0 \iff n^2 + 19n - 2\,500 \geqslant 0$ (on divise par $2 > 0$).

4. $\Delta = 19^2 + 4 \times 2\,500 = 10\,361$; la racine positive est $\dfrac{-19 + \sqrt{10\,361}}{2} \approx 41{,}39$.
   Le coefficient de n^2 est positif : le trinôme est positif ou nul à l'extérieur des racines (et nul en elles).
   L'autre racine est négative : pour un entier positif, il faut $n \geqslant 42$.
   Contrôle : $S_{41} = 4\,920$ et $S_{42} = 5\,124$.
   Il faut au minimum 42 rangées.

Exercice 7 – La balle qui rebondit ★★★

1. $h_1 = 0{,}75 \times 8$
   $\quad = 6$
   $h_2 = 0{,}75 \times 6$
   $\quad = 4{,}5$
   On multiplie par $0{,}75$ à chaque rebond : (h_n) est géométrique de raison $0{,}75$, et $h_n = 8 \times 0{,}75^n$.

2. Premier terme $h_1 = 6$, raison $0{,}75$, 5 termes.
   $h_1 + \cdots + h_5 = 6 \times \dfrac{1 - 0{,}75^5}{1 - 0{,}75} = 24(1 - 0{,}75^5) \approx 18{,}30$.

3. Avant le 6^e contact : la chute de 8 m, puis 5 rebonds, chacun parcouru deux fois (montée et descente).
   $d = 8 + 2(h_1 + \cdots + h_5) \approx 44{,}61$ m.
   La balle a parcouru environ 44,61 m.

4. La boucle tourne tant que la hauteur est d'au moins 0,1 m, soit 10 cm ; `n` compte les rebonds.
   16 est le premier rebond après lequel la balle remonte à moins de 10 cm : $h_{15} \approx 0{,}11$ et $h_{16} \approx 0{,}08$.

Exercice 8 – Découper une somme ★★★

Sépare la somme en sommes connues, puis calcule.

a) $S = (0 + 1 + \cdots + 9) + (1 + 2 + \cdots + 2^9)$: une somme d'entiers et une somme géométrique de 10 termes.

$$\begin{aligned} S &= \frac{9 \times 10}{2} + \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \\ &= 45 + 1023 \\ &= 1068 \end{aligned}$$

b) $S = 4(1 + 3 + \cdots + 3^5) - 2(0 + 1 + \cdots + 5)$.

$$\begin{aligned} S &= 4 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} - 2 \times \frac{5 \times 6}{2} \\ &= 4 \times 364 - 2 \times 15 \\ &= 1456 - 30 \\ &= 1426 \end{aligned}$$

c) Termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1, de $n + 1$ à $2n$: $2n - (n + 1) + 1 = n$ termes.

$$\begin{aligned} S &= n \times \frac{n + 1 + 2n}{2} \\ &= n \times \frac{3n + 1}{2} \\ &= \frac{3n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *On oublie le premier terme.*

$$\begin{aligned} N &= 20 - 5 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

b) *Il manque la division par* 2.

$$\begin{aligned} S &= \frac{40 \times 41}{2} \\ &= 820 \end{aligned}$$

c) *La formule* $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *suppose que la somme commence à* 1.

26 termes, de 5 à 30 :

$$\begin{aligned} S &= 26 \times \frac{5 + 30}{2} \\ &= 13 \times 35 \\ &= 455 \end{aligned}$$

d) *De* 4^0 *à* 4^3*, il y a* 4 *termes : l'exposant est* 4.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 - 4^4}{1 - 4} \\ &= \frac{1 - 256}{-3} \\ &= \frac{-255}{-3} \\ &= 85 \end{aligned}$$

e) *On a oublié le premier terme* $u_0 = 2$ *devant la fraction.*

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \frac{1 - 5^4}{1 - 5} \\ &= 2 \times 156 \\ &= 312 \end{aligned}$$

f) *Chaque rebond est parcouru deux fois : montée et descente.*

$$\begin{aligned} d &= 5 + 2 \times (2{,}5 + 1{,}25) \\ &= 5 + 7{,}5 \\ &= 12{,}5 \end{aligned}$$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $1 + 2 + \cdots + 60$ vaut :

Réponse A : $1\,830$

$\dfrac{60 \times 61}{2} = 1\,830$.

2. De u_7 à u_{31}, il y a :

Réponse C : 25 termes

$31 - 7 + 1 = 25$.

3. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^5$ vaut :

Réponse B : 63

6 termes : $\dfrac{1 - 2^6}{1 - 2} = 2^6 - 1 = 63$; 31 oublie un terme, 64 oublie le -1.

4. $3 + 7 + 11 + \cdots + 43$ vaut :

Réponse D : 253

Raison 4 : $\dfrac{43 - 3}{4} + 1 = 11$ termes, et $11 \times \dfrac{3 + 43}{2} = 253$.

5. $1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 0{,}1^4$ vaut :

Réponse C : $1{,}1111$

5 termes : $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001$.

6. Pour tout n, $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ est égal à :

Réponse B : $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$

$n + 1$ termes : $\dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).