Problèmes de suites : modéliser et chercher un seuil – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Suites arithmétiques et géométriques · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice autorisée. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Hausse de t % : on multiplie par $1 + \dfrac{t}{100}$; baisse de t % : par $1 - \dfrac{t}{100}$, jamais « $+t$ » ou « $-t$ ».
- Ajouter une quantité fixe chaque période : suite arithmétique ; multiplier par un coefficient fixe : suite géométrique.
- « 25 % partent et 50 arrivent » donne $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 50$: ni arithmétique, ni géométrique.
- Les intérêts composés ne s'additionnent pas : sur n années, le coefficient est q^n, pas $1 + n \times t$.
- Un seuil se donne par un entier : le premier rang qui convient, contrôlé avec le rang d'avant.
- La condition du `while` est le contraire de la condition cherchée.

Exercice 1 – Le livret ★

Zoé place 2 000 € sur un livret à intérêts composés au taux de 2,5 % par an. On note C_n le capital au bout de n années. Arrondis les montants au centime. Calculatrice autorisée.

1. Calcule C_1 et C_2.
2. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Exprime C_n en fonction de n.
3. Calcule le capital au bout de 8 ans.
4. Calcule les intérêts gagnés en 8 ans.

Exercice 2 – La salle de sport ★

En janvier, une salle de sport compte 180 adhérents. Chaque mois, elle gagne 12 adhérents de plus. On note a_n le nombre d'adhérents n mois après janvier ($a_0 = 180$).

1. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Exprime a_n en fonction de n.
2. Combien d'adhérents compte la salle en décembre ?
3. Écris l'inéquation qui traduit « plus de 400 adhérents ».
4. À partir de quel mois la salle dépasse-t-elle 400 adhérents ?

Exercice 3 – La voiture ★

Une voiture neuve coûte 24 000 €. Sa valeur baisse de 15 % chaque année. On note V_n sa valeur au bout de n années.

1. Par quel nombre multiplie-t-on la valeur chaque année ?
2. Exprime V_n en fonction de n et calcule V_1.
3. Quelle est la valeur de la voiture au bout de 3 ans ?
4. Quel est le sens de variation de (V_n) ?

Exercice 4 – Deux offres d'emploi ★★

Un employeur propose deux offres pour un salaire mensuel de départ de 2 000 €. Offre A : hausse de 80 € par an. Offre B : hausse de 3,5 % par an. On note a_n et b_n les salaires mensuels après n années. Arrondis au centime. Calculatrice autorisée.

1. Calcule a_1, b_1, a_2 et b_2.
2. Exprime a_n et b_n en fonction de n.
3. Compare les deux offres après 8 ans.
4. Complète et utilise le programme pour trouver après combien d'années l'offre B devient la meilleure.

```
n = 0
a = 2000
b = 2000
while ........:
    n = n + 1
    a = a + 80
    b = b * 1.035
print(n)
```

Exercice 5 – Le médicament ★★

On injecte 20 mg d'un médicament dans le sang d'un patient. Chaque heure, l'organisme en élimine 30 %. On note m_n la quantité, en mg, présente au bout de n heures. Arrondis au centième. Calculatrice autorisée.

1. Calcule m_1 et m_2.
2. Exprime m_n en fonction de n.
3. Quelle quantité reste-t-il au bout de 5 heures ?
4. Le médicament n'agit plus en dessous de 1 mg. Au bout de combien d'heures ? Écris le programme qui répond.

Exercice 6 – Les économies d'énergie ★★

En 2025, une usine consomme 50 000 kWh d'électricité. Elle s'engage à réduire sa consommation de 4 % par an. On note e_n la consommation en $2025 + n$. Arrondis au kWh. Calculatrice autorisée.

1. Exprime e_n en fonction de n.
2. Quelle sera la consommation en 2028 ?
3. À partir de quelle année la consommation passera-t-elle sous 40 000 kWh ?
4. Quelle est la consommation totale de 2025 à 2030 ?

Exercice 7 – Le plan d'entraînement ★★

Pour préparer une course, Malik court 3 km la première semaine, puis 0,4 km de plus chaque semaine. On note d_n la distance courue la semaine n ($d_1 = 3$).

1. Exprime d_n en fonction de n.
2. Quelle distance court-il la 10^e semaine ?
3. À partir de quelle semaine court-il au moins 10 km ?
4. Quelle distance totale a-t-il courue de la première semaine jusqu'à cette semaine-là, incluse ?

Exercice 8 – Les abonnés ★★★

Une chaîne vidéo compte 5 000 abonnés. Chaque mois, 10 % des abonnés se désabonnent et 800 nouvelles personnes s'abonnent. On note a_n le nombre d'abonnés au bout de n mois ($a_0 = 5\,000$). On admet que les

résultats du modèle peuvent ne pas être entiers. Calculatrice autorisée.

1. Justifie que $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 800$, puis calcule a_1 et a_2.
2. La suite (a_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On pose $v_n = a_n - 8\,000$. Démontre que (v_n) est géométrique ; précise sa raison et v_0.
4. Déduis-en a_n en fonction de n, puis le sens de variation de (a_n).
5. Après combien de mois la chaîne atteint-elle $7\,500$ abonnés ? Utilise le programme.

```
a = 5000
n = 0
while a < 7500:
    a = 0.9 * a + 800
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 9 – Deux villes ★★★

En 2025, la ville A compte $50\,000$ habitants et perd 1 % de sa population par an ; la ville B compte $30\,000$ habitants et gagne $2{,}5$ % par an. On note a_n et b_n leurs populations en $2025 + n$. Arrondis à l'unité. Calculatrice autorisée.

1. Exprime a_n et b_n en fonction de n, et donne le sens de variation de chaque suite.
2. Calcule les populations en 2035.
3. Explique pourquoi la ville B finira par dépasser la ville A.
4. Qu'affiche le programme ci-dessous ? Interprète.

```
a = 50000
b = 30000
n = 0
while b <= a:
    a = 0.99 * a
    b = 1.025 * b
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

Exercice 10 – Des versements réguliers ★★★

Le 1^{er} janvier de chaque année, Nora verse $1\,000$ € sur un compte rémunéré à 3 % par an (intérêts composés, versés le 31 décembre). On note C_n le capital au 31 décembre de la n-ième année. Arrondis au centime. Calculatrice autorisée.

1. Calcule C_1 et C_2.
2. Justifie que $C_n = 1\,000 \times 1{,}03 + 1\,000 \times 1{,}03^2 + \cdots + 1\,000 \times 1{,}03^n$.
3. Déduis-en que $C_n = \dfrac{103\,000}{3}(1{,}03^n - 1)$, puis calcule C_{10}.
4. Au bout de combien d'années le capital atteint-il $20\,000$ € ? Utilise le programme.

```
c = 0
n = 0
while c < 20000:
    c = (c + 1000) * 1.03
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque modélisation ou réponse d'élève contient une erreur. Explique-la, puis corrige.

a) « Une population augmente de 2 % par an, donc $P_{n+1} = P_n + 0{,}02$. »

b) « 5 000 € placés à 3 % par an (intérêts composés) donnent au bout de 4 ans $5\,000 \times (1 + 4 \times 0{,}03) = 5\,600$ €. »

c) « 10 % des abonnés partent et 200 arrivent, donc $a_{n+1} = a_n - 0{,}1 + 200$. »

d) « $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 4$: la suite est géométrique de raison 0,8. »

e) « On cherche le plus petit n tel que $0{,}95^n < 0{,}5$. La calculatrice donne $0{,}95^{13} \approx 0{,}513$ et $0{,}95^{14} \approx 0{,}488$, donc $n = 13$. »

f) « Un médicament est éliminé à 10 % par heure : au bout de 5 heures, 50 % ont été éliminés. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Un prix de 250 € augmente de 4 % par an. Après n années, il vaut :

   A $250 + 4n$ **B** $250 \times 1{,}04^n$ **C** $250 \times 0{,}04^n$ **D** $250 \times 1{,}4^n$

2. $a_0 = 1\,000$ et $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 300$. Alors a_1 vaut :

   A 1 300 **B** 450 **C** 1 000 **D** 1 150

3. $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 10$ et $v_n = u_n - 20$. La suite (v_n) est :

   A géométrique de raison 0,5 **B** arithmétique de raison 10 **C** géométrique de raison 10 **D** constante

4. Offre A : $1\,000 + 50n$; offre B : $1\,000 \times 1{,}04^n$. Pour $n = 10$:

   A l'offre B est la plus élevée **B** les deux offres sont égales **C** l'offre A est la plus élevée **D** on ne peut pas comparer

5. Le programme ci-dessous affiche :

```
c = 1000
n = 0
while c < 1500:
    c = c * 1.05
    n = n + 1
print(n)
```

   A 8 **B** 10 **C** 1 551 **D** 9

6. Une dose de 40 mg diminue de 25 % par heure. Au bout de 2 heures, il reste :

   A 22,5 mg **B** 20 mg **C** 30 mg **D** 2,5 mg

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).