Corrigé – Problèmes de suites : modéliser et chercher un seuil

Mathématiques – Première spécialité

Suites arithmétiques et géométriques · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Le livret ★

1. $C_1 = 2000 \times 1{,}025$
   $= 2050$
   $C_2 = 2050 \times 1{,}025$
   $= 2101{,}25$

2. Chaque année, le capital est multiplié par $1 + \dfrac{2{,}5}{100} = 1{,}025$: $C_{n+1} = 1{,}025 C_n$.
   (C_n) est géométrique de raison $1{,}025$ et de premier terme $C_0 = 2\,000$, donc $C_n = 2\,000 \times 1{,}025^n$.

3. $C_8 = 2\,000 \times 1{,}025^8 \approx 2\,436{,}81$.
   Au bout de 8 ans, Zoé aura environ 2 436,81 €.

4. $2\,436{,}81 - 2\,000 = 436{,}81$: Zoé a gagné environ 436,81 € d'intérêts.

Exercice 2 – La salle de sport ★

1. On ajoute la même quantité chaque mois : $a_{n+1} = a_n + 12$.
   (a_n) est arithmétique de raison 12 et de premier terme 180 : $a_n = 180 + 12n$.

2. Décembre correspond à $n = 11$.
   $a_{11} = 180 + 12 \times 11$
   $= 180 + 132$
   $= 312$
   En décembre, la salle compte 312 adhérents.

3. $a_n > 400 \iff 180 + 12n > 400$.

4. $180 + 12n > 400$
   $\iff 12n > 220$ *(on retranche 180)*
   $\iff n > \dfrac{55}{3}$ *(on divise par $12 > 0$)*

   $\dfrac{55}{3} \approx 18{,}33$: le plus petit entier est $n = 19$.
   Contrôle : $a_{18} = 396$ et $a_{19} = 408$.
   La salle dépasse 400 adhérents 19 mois après janvier, soit en août de l'année suivante.

Exercice 3 – La voiture ★

1. $q = 1 - \dfrac{15}{100}$
   $= 0{,}85$
   Baisser de 15 %, c'est garder 85 %.

2. (V_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme 24 000 : $V_n = 24\,000 \times 0{,}85^n$.
   $V_1 = 24\,000 \times 0{,}85$
   $= 20\,400$

3. $V_3 = 24\,000 \times 0{,}85^3$
   $= 24\,000 \times 0{,}614125$
   $= 14\,739$
   Au bout de 3 ans, la voiture vaut 14 739 €.

4. $V_{n+1} - V_n = 24\,000 \times 0{,}85^{n+1} - 24\,000 \times 0{,}85^n$
   $= 24\,000 \times 0{,}85^n \times (0{,}85 - 1)$
   $= -3600 \times 0{,}85^n$
   Cette différence est négative : la valeur diminue chaque année, (V_n) est strictement décroissante.

Exercice 4 – Deux offres d'emploi ★★

1. $a_1 = 2000 + 80$
   $= 2080$
   $b_1 = 2000 \times 1{,}035$
   $= 2070$
   $a_2 = 2080 + 80$
   $= 2160$
   $b_2 = 2070 \times 1{,}035$
   $= 2142{,}45$

2. Offre A : on ajoute 80 chaque année, (a_n) est arithmétique et $a_n = 2\,000 + 80n$.
   Offre B : on multiplie par 1,035 chaque année, (b_n) est géométrique et $b_n = 2\,000 \times 1{,}035^n$.

3. $a_8 = 2000 + 80 \times 8$
   $= 2640$
   $b_8 = 2\,000 \times 1{,}035^8 \approx 2\,633{,}62$.
   Après 8 ans, l'offre A est encore la meilleure.

4. On cherche le premier n tel que $b_n > a_n$: la boucle tourne tant que `b <= a`.
   Le programme affiche 9.
   Contrôle : $a_9 = 2\,720$ et $b_9 \approx 2\,725{,}79$.
   L'offre B devient la meilleure après 9 ans.

Exercice 5 – Le médicament ★★

1. *Éliminer* 30 %, *c'est garder* 70 %.
   $m_1 = 20 \times 0{,}7$
   $= 14$
   $m_2 = 14 \times 0{,}7$
   $= 9{,}8$

2. (m_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme 20 : $m_n = 20 \times 0{,}7^n$.

3. $m_5 = 20 \times 0{,}7^5$
   $= 20 \times 0{,}16807$
   $= 3{,}3614$
   Il reste environ 3,36 mg.

4. On cherche le premier n tel que $m_n < 1$; la boucle tourne tant que $m_n \geqslant 1$:

```
q = 20
n = 0
while q >= 1:
    q = 0.7 * q
    n = n + 1
print(n)
```

   Le programme affiche 9.
   Contrôle : $m_8 \approx 1{,}15$ et $m_9 \approx 0{,}81$.
   Le médicament n'agit plus au bout de 9 heures.

Exercice 6 – Les économies d'énergie ★★

1. Baisser de 4 %, c'est multiplier par 0,96 : (e_n) est géométrique de raison 0,96, et $e_n = 50\,000 \times 0{,}96^n$.

2. 2028 correspond à $n = 3$: $e_3 = 50\,000 \times 0{,}96^3 \approx 44\,237$ kWh.

3. On calcule les termes (la suite est décroissante) : $e_5 \approx 40\,769$ et $e_6 \approx 39\,138$.
   $e_5 \geqslant 40\,000 > e_6$: la consommation passe sous 40 000 kWh en $2025 + 6 = 2031$.

4. Somme de 6 termes (de e_0 à e_5) d'une suite géométrique :
   $e_0 + \cdots + e_5 = 50\,000 \times \dfrac{1 - 0{,}96^6}{1 - 0{,}96} \approx 271\,553$ kWh.

Exercice 7 – Le plan d'entraînement ★★

1. *La suite commence au rang* 1.
   (d_n) est arithmétique de raison 0,4 : $d_n = 3 + 0{,}4(n-1) = 0{,}4n + 2{,}6$.

2. $d_{10} = 3 + 0{,}4 \times (10 - 1)$
   $= 3 + 3{,}6$
   $= 6{,}6$
   La 10^e semaine, il court 6,6 km.

3. $0{,}4n + 2{,}6 \geqslant 10$
   $\iff 0{,}4n \geqslant 7{,}4$ *(on retranche* 2,6*)*
   $\iff n \geqslant 18{,}5$ *(on divise par* $0{,}4 > 0$*)*

   Le plus petit entier est 19 ; contrôle : $d_{18} = 9{,}8$ et $d_{19} = 10{,}2$.
   Il court au moins 10 km à partir de la 19^e semaine.

4. Somme des 19 premiers termes, de $d_1 = 3$ à $d_{19} = 10{,}2$: nombre de termes $\times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.
   $S = 19 \times \dfrac{3 + 10{,}2}{2}$
   $= 19 \times 6{,}6$
   $= 125{,}4$
   Il a couru 125,4 km en tout.

Exercice 8 – Les abonnés ★★★

1. Il reste 90 % des abonnés, soit $0{,}9a_n$, puis 800 s'ajoutent : $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 800$.
   $a_1 = 0{,}9 \times 5000 + 800$
   $= 4500 + 800$
   $= 5300$
   $a_2 = 0{,}9 \times 5300 + 800$
   $= 4770 + 800$
   $= 5570$

2. $a_1 - a_0 = 300$ et $a_2 - a_1 = 270$: elle n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{a_1}{a_0} = 1{,}06$ et $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{5\,570}{5\,300} \neq 1{,}06$: elle n'est pas géométrique.

3. Pour tout n :
   $v_{n+1} = a_{n+1} - 8\,000$
   $v_{n+1} = 0{,}9a_n + 800 - 8\,000$ (on remplace a_{n+1})
   $v_{n+1} = 0{,}9a_n - 7\,200$
   $v_{n+1} = 0{,}9(a_n - 8\,000)$ (car $0{,}9 \times 8\,000 = 7\,200$)
   $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.
   (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = 5\,000 - 8\,000 = -3\,000$.

4. $v_n = -3\,000 \times 0{,}9^n$, donc $a_n = v_n + 8\,000 = 8\,000 - 3\,000 \times 0{,}9^n$.
   $a_{n+1} - a_n = \left(8000 - 3000 \times 0{,}9^{n+1}\right) - \left(8000 - 3000 \times 0{,}9^n\right)$
   $= -3000 \times 0{,}9^n \times (0{,}9 - 1)$
   $= 300 \times 0{,}9^n$
   $300 \times 0{,}9^n > 0$: le nombre d'abonnés augmente chaque mois.

5. La boucle tourne tant que $a_n < 7\,500$; elle s'arrête au premier mois où $a_n \geqslant 7\,500$.
   Le programme affiche 18.
   Contrôle : $a_{17} \approx 7\,499{,}7 < 7\,500$ et $a_{18} \approx 7\,549{,}7 \geqslant 7\,500$.
   La chaîne atteint 7 500 abonnés au bout de 18 mois.

Exercice 9 – Deux villes ★★★

1. $a_n = 50\,000 \times 0{,}99^n$: premier terme positif et raison $0{,}99 < 1$, la suite (a_n) est strictement décroissante.
   $b_n = 30\,000 \times 1{,}025^n$: premier terme positif et raison $1{,}025 > 1$, la suite (b_n) est strictement croissante.

2. 2035 correspond à $n = 10$.
   $a_{10} = 50\,000 \times 0{,}99^{10} \approx 45\,219$; $b_{10} = 30\,000 \times 1{,}025^{10} \approx 38\,403$.

3. L'écart $a_n - b_n$ diminue chaque année : (a_n) décroît et (b_n) croît.
   De plus, b_n est multipliée par $1{,}025$ chaque année : par exemple $b_{25} \approx 55\,618$ dépasse déjà $a_0 = 50\,000$, donc dépasse a_{25}.

4. La boucle avance d'une année tant que B n'a pas strictement plus d'habitants que A.
   Le programme affiche 2040.
   Contrôle : $a_{14} \approx 43\,437$ et $b_{14} \approx 42\,389$; $a_{15} \approx 43\,003$ et $b_{15} \approx 43\,449$.
   La ville B dépasse la ville A en 2040.

Exercice 10 – Des versements réguliers ★★★

1. $C_1 = 1000 \times 1{,}03$
   $= 1030$
   $C_2 = (1030 + 1000) \times 1{,}03$
   $= 2030 \times 1{,}03$
   $= 2090{,}9$

2. Le dernier versement a rapporté pendant 1 an : il vaut $1\,000 \times 1{,}03$.
   L'avant-dernier a rapporté 2 ans : $1\,000 \times 1{,}03^2$.
   Le premier a rapporté n ans : $1\,000 \times 1{,}03^n$.
   Le capital est la somme de ces n montants.

3. C'est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme 1 030 et de raison $1{,}03$:
   $C_n = 1030 \times \dfrac{1 - 1{,}03^n}{1 - 1{,}03}$
   $= 1030 \times \dfrac{1 - 1{,}03^n}{-0{,}03}$
   $= \dfrac{103\,000}{3} \times (1{,}03^n - 1)$
   $C_{10} \approx 11\,807{,}80$ €.

4. La boucle répète « versement, puis intérêts » tant que le capital est inférieur à 20 000 €.
   Le programme affiche 16.
   Contrôle : $C_{15} \approx 19\,156{,}88$ et $C_{16} \approx 20\,761{,}59$.
   Le capital atteint 20 000 € au bout de 16 ans.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque modélisation ou réponse d'élève contient une erreur. Explique-la, puis corrige.

a) *Augmenter de* 2 %*, c'est multiplier par* $1{,}02$ *; on n'ajoute pas* $0{,}02$ *habitant.*
$P_{n+1} = 1{,}02P_n$.

b) *Intérêts composés : les intérêts rapportent à leur tour, on multiplie* 4 *fois par* $1{,}03$.
$C_4 = 5\,000 \times 1{,}03^4 \approx 5\,627{,}54$ €.

c) *Partir* 10 %*, c'est garder* 90 % *des abonnés.*
$a_{n+1} = 0{,}9a_n + 200$.

d) *Le $+4$ empêche la suite d'être géométrique.*

$u_1 = 0{,}8 \times 10 + 4$
$\quad = 12$
$u_2 = 0{,}8 \times 12 + 4$
$\quad = 9{,}6 + 4$
$\quad = 13{,}6$
$\dfrac{u_1}{u_0} = 1{,}2$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{13{,}6}{12} \neq 1{,}2$: la suite n'est pas géométrique.

e) $0{,}95^{13} \approx 0{,}513$ *n'est pas inférieur à* $0{,}5$ *: le rang* 13 *ne convient pas.*

Le plus petit entier est $n = 14$.

f) *Les baisses ne s'additionnent pas : il reste* $0{,}9^5$ *de la dose.*

$q = 0{,}9^5$
$\quad = 0{,}59049$

Il reste environ $59{,}05$ % de la dose : environ $40{,}95$ % ont été éliminés.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un prix de 250 € augmente de 4 % par an. Après n années, il vaut :

Réponse B : $250 \times 1{,}04^n$

On multiplie n fois par $1 + \dfrac{4}{100} = 1{,}04$.

2. $a_0 = 1\,000$ et $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 300$. Alors a_1 vaut :

Réponse D : $1\,150$

$0{,}85 \times 1\,000 + 300 = 850 + 300 = 1\,150$.

3. $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 10$ et $v_n = u_n - 20$. La suite (v_n) est :

Réponse A : géométrique de raison $0{,}5$

$v_{n+1} = 0{,}5u_n + 10 - 20 = 0{,}5(u_n - 20) = 0{,}5v_n$.

4. Offre A : $1\,000 + 50n$; offre B : $1\,000 \times 1{,}04^n$. Pour $n = 10$:

Réponse C : l'offre A est la plus élevée

A : $1\,500$; B : $1\,000 \times 1{,}04^{10} \approx 1\,480{,}24$.

5. Le programme ci-dessous affiche :

```
c = 1000
n = 0
while c < 1500:
    c = c * 1.05
    n = n + 1
print(n)
```

Réponse D : 9

$1\,000 \times 1{,}05^8 \approx 1\,477$ et $1\,000 \times 1{,}05^9 \approx 1\,551$: la boucle tourne 9 fois, le programme affiche $n = 9$.

6. Une dose de 40 mg diminue de 25 % par heure. Au bout de 2 heures, il reste :

Réponse A : $22{,}5$ mg

$40 \times 0{,}75^2 = 40 \times 0{,}5625 = 22{,}5$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).