Corrigé – Suites géométriques

Mathématiques – Première spécialité

Suites géométriques · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Terme général ★

(u_n) est une suite géométrique de raison q.

a) $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$.

$$\begin{aligned} u_5 &= 3 \times 2^5 \\ &= 3 \times 32 \\ &= 96 \end{aligned}$$

b) $u_n = u_0 \times q^n = 64 \times 0{,}5^n$.

$$\begin{aligned} u_6 &= 64 \times 0{,}5^6 \\ &= \frac{64}{64} \\ &= 1 \end{aligned}$$

c) $u_n = u_0 \times q^n = -2 \times 3^n$.

$$\begin{aligned} u_4 &= -2 \times 3^4 \\ &= -2 \times 81 \\ &= -162 \end{aligned}$$

d) *Départ au rang* 1 *:* $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

$u_n = 5 \times 2^{n-1}$.

$$\begin{aligned} u_6 &= 5 \times 2^{6-1} \\ &= 5 \times 2^5 \\ &= 5 \times 32 \\ &= 160 \end{aligned}$$

e) $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times (-2)^n$.

$$\begin{aligned} u_4 &= 3 \times (-2)^4 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 48 \end{aligned}$$

f) $u_n = u_0 \times q^n = 1000 \times 0{,}9^n$.

$$\begin{aligned} u_3 &= 1000 \times 0{,}9^3 \\ &= 1000 \times 0{,}729 \\ &= 729 \end{aligned}$$

g) $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}25 \times 4^n$.

$$\begin{aligned} u_5 &= 0{,}25 \times 4^5 \\ &= \frac{1024}{4} \\ &= 256 \end{aligned}$$

h) *Départ au rang* 1 *:* $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
$u_n = -1 \times (-3)^{n-1}$.
$u_5 = -1 \times (-3)^{5-1}$
$= -1 \times (-3)^4$
$= -1 \times 81$
$= -81$

Exercice 2 – Retrouver la raison ★

(u_n) est une suite géométrique. Calcule sa raison q (et u_0 quand c'est demandé).

a) $u_1 = u_0 \times q$, donc :
$q = \dfrac{15}{5}$
$= 3$

b) $u_4 = u_3 \times q$, donc :
$q = \dfrac{6}{24}$
$= \dfrac{1}{4}$

c) $u_5 = u_2 \times q^{5-2} = u_2 \times q^3$, donc :
$q^3 = \dfrac{96}{12}$
$= 8$
Le seul réel dont le cube vaut 8 est 2 : $q = 2$.
$u_0 = \dfrac{12}{2^2}$
$= \dfrac{12}{4}$
$= 3$
(car $u_2 = u_0 \times q^2$).

d) $u_4 = u_1 \times q^3$, donc :
$q^3 = \dfrac{-54}{2}$
$= -27$
Le seul réel dont le cube vaut -27 est -3 : $q = -3$.
$u_0 = \dfrac{2}{-3}$
$= -\dfrac{2}{3}$
(car $u_1 = u_0 \times q$).

e)
$q^2 = \dfrac{63}{7}$
$= 9$
$q^2 = 9$ *donne* $q = 3$ *ou* $q = -3$.
Les termes sont tous positifs, donc $q > 0$: $q = 3$.

f)
$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{20}{80} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$
$q = \frac{1}{2}$ *ou* $q = -\frac{1}{2}$.
La raison est négative : $q = -\frac{1}{2}$.

g)
$$\begin{aligned} q &= \frac{3{,}6}{3} \\ &= 1{,}2 \end{aligned}$$

h) $u_8 = u_5 \times q^3$, donc :
$$\begin{aligned} q^3 &= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{16} \times 2 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$
Le seul réel dont le cube vaut $\frac{1}{8}$ est $\frac{1}{2}$: $q = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 – Coefficient multiplicateur ★

Donne le coefficient multiplicateur q, ou l'évolution en pourcentage qui lui correspond.

a)
$$\begin{aligned} q &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1{,}03 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} q &= 1 - \frac{15}{100} \\ &= 0{,}85 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} q &= 1 + \frac{120}{100} \\ &= 2{,}2 \end{aligned}$$
Le nombre a plus que doublé.

d)
$$\begin{aligned} q &= 1 - \frac{0{,}5}{100} \\ &= 0{,}995 \end{aligned}$$

e) $1{,}07 = 1 + 0{,}07$ et $0{,}07 = \frac{7}{100}$: c'est une hausse de 7 %.

f) $0{,}6 = 1 - 0{,}4$ et $0{,}4 = \frac{40}{100}$: c'est une baisse de 40 %.

g) *On multiplie les coefficients, on n'ajoute pas les pourcentages.*

$q = 1{,}1 \times 1{,}1$
$\quad = 1{,}21$
$1{,}21 = 1 + 0{,}21$: hausse globale de 21 %.

h)

$q = 0{,}8^3$
$\quad = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8$
$\quad = 0{,}512$
$0{,}512 = 1 - 0{,}488$: baisse globale de 48,8 % (et non de 60 %).

Exercice 4 – Géométrique ou pas ? ★★

Démontre que la suite (u_n), définie pour $n \geqslant 0$, est géométrique (raison et premier terme), ou qu'elle ne l'est pas.

a)

$u_{n+1} = 5 \times 3^{n+2}$
$\quad = 5 \times 3 \times 3^{n+1}$
$\quad = 3 \times \left(5 \times 3^{n+1}\right)$
Donc $u_{n+1} = 3u_n$ pour tout n : la suite est géométrique de raison 3.
$u_0 = 5 \times 3^{0+1}$
$\quad = 15$

b)

$u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$
$\quad = \dfrac{2 \times 2^n}{3 \times 3^{n+1}}$
$\quad = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$
Donc $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n$: la suite est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$.

c) $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 24$.
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{2}$
$\quad = 4$
$\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{24}{8}$
$\quad = 3$
Deux quotients différents : la suite n'est pas géométrique.

d)

$u_{n+1} = 3^{2(n+1)}$
$\quad = 3^{2n+2}$
$\quad = 3^2 \times 3^{2n}$
$\quad = 9 \times 3^{2n}$
Donc $u_{n+1} = 9u_n$: la suite est géométrique de raison 9, de premier terme $u_0 = 3^0 = 1$.

e)

$u_1 = 3 \times 2 + 1$
$\quad = 7$
$u_2 = 3 \times 7 + 1$
$\quad = 22$
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{7}{2}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{22}{7}$.
Deux quotients différents : la suite n'est pas géométrique.

f)

$u_{n+1} = (-1)^{n+1} \times 5^n$
$\quad = (-1) \times (-1)^n \times 5 \times 5^{n-1}$
$\quad = -5 \times \left((-1)^n \times 5^{n-1}\right)$
Donc $u_{n+1} = -5u_n$: la suite est géométrique de raison -5, de premier terme $u_0 = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 5 – Sens de variation ★★

Calcule $u_{n+1} - u_n$ en factorisant par $u_0\, q^n$, puis donne le sens de variation de (u_n).

a)

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 1{,}5^{n+1} - 2 \times 1{,}5^n$
$\quad = 2 \times 1{,}5^n \times (1{,}5 - 1)$
$\quad = 2 \times 1{,}5^n \times 0{,}5$
$\quad = 1{,}5^n$
$1{,}5^n > 0$: la suite est strictement croissante ($u_0 > 0$ et $q > 1$).

b)

$u_{n+1} - u_n = -4 \times 3^{n+1} - (-4 \times 3^n)$
$\quad = -4 \times 3^n \times (3 - 1)$
$\quad = -8 \times 3^n$
$q > 1$ *mais* $u_0 < 0$ *:* $-8 \times 3^n < 0$, la suite est strictement décroissante.

c)

$u_{n+1} - u_n = 7 \times 0{,}2^{n+1} - 7 \times 0{,}2^n$
$\quad = 7 \times 0{,}2^n \times (0{,}2 - 1)$
$\quad = 7 \times 0{,}2^n \times (-0{,}8)$
$\quad = -5{,}6 \times 0{,}2^n$
$-5{,}6 \times 0{,}2^n < 0$: la suite est strictement décroissante.

d)

$u_{n+1} - u_n = -3 \times 0{,}5^{n+1} - (-3 \times 0{,}5^n)$
$\quad = -3 \times 0{,}5^n \times (0{,}5 - 1)$
$\quad = 1{,}5 \times 0{,}5^n$
$1{,}5 \times 0{,}5^n > 0$: la suite est strictement croissante (premier terme négatif, raison entre 0 et 1).

e) Ici $q = -3 < 0$: le signe de $(-3)^n$ change à chaque rang.
$u_1 = 2 \times (-3)^1$
$\quad = -6$
$u_2 = 2 \times (-3)^2$
$\quad = 18$
$u_0 = 2 > u_1$ mais $u_1 < u_2$: la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Exercice 6 – Avec $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ★★

(u_n) est une suite géométrique de raison q.

a)
$u_7 = 40 \times 2^{7-3}$
$\quad = 40 \times 2^4$
$\quad = 40 \times 16$
$\quad = 640$

b) *On recule de* 4 *rangs : on divise* 4 *fois par* 3.
$u_2 = \dfrac{729}{3^4}$
$\quad = \dfrac{729}{81}$
$\quad = 9$

c) $u_3 = u_1 \times q^2$, donc :
$q^2 = \dfrac{48}{3}$
$\quad = 16$
$q^2 = 16$ donne $q = 4$ ou $q = -4$; $q > 0$, donc $q = 4$.
$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}$.
$u_5 = 3 \times 4^{5-1}$
$\quad = 3 \times 4^4$
$\quad = 3 \times 256$
$\quad = 768$

d) $u_n = 5 \times 2^n$ et la suite est croissante : on calcule les termes jusqu'à dépasser $1\,000$.
$u_7 = 5 \times 2^7$
$\quad = 640$
$u_8 = 5 \times 2^8$
$\quad = 1280$
$u_7 \leqslant 1\,000 < u_8$: le plus petit entier est $n = 8$.

e) $u_n = 800 \times 0{,}5^n$ et la suite est décroissante.
$u_9 = 800 \times 0{,}5^9$
$\quad = \dfrac{800}{512}$
$\quad = 1{,}5625$
$u_{10} = 800 \times 0{,}5^{10}$
$\quad = \dfrac{800}{1024}$
$\quad = 0{,}78125$
$u_9 \geqslant 1 > u_{10}$: le plus petit entier est $n = 10$.

Exercice 7 – La ville qui grandit ★★★

1. Augmenter de 3 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$: $P_{n+1} = 1{,}03P_n$ pour tout n.
   (P_n) est géométrique de raison $1{,}03$ et de premier terme $P_0 = 12\,000$, donc $P_n = 12\,000 \times 1{,}03^n$.

2. 2035 correspond à $n = 10$.
   $P_{10} = 12\,000 \times 1{,}03^{10} \approx 16\,127$.
   En 2035, la ville compterait environ 16 127 habitants.

3. Le coefficient global sur 10 ans est $1{,}03^{10} \approx 1{,}3439$.
   $1{,}3439 = 1 + 0{,}3439$: hausse d'environ 34,39 %.
   Ce n'est pas $10 \times 3 = 30$ *% : les hausses se multiplient.*

4. La boucle doit tourner tant que le seuil n'est pas dépassé : `while p <= 20000:` (le contraire de $P_n > 20\,000$).
   Le programme affiche 18.
   Contrôle : $P_{17} \approx 19\,834$ et $P_{18} \approx 20\,429$.
   La population dépassera 20 000 habitants en $2025 + 18 = 2043$.

Exercice 8 – La suite auxiliaire ★★★

1. $u_1 = 0{,}5 \times 1 + 3$
   $\quad = 3{,}5$
   $u_2 = 0{,}5 \times 3{,}5 + 3$
   $\quad = 1{,}75 + 3$
   $\quad = 4{,}75$
   $\dfrac{u_1}{u_0} = 3{,}5$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4{,}75}{3{,}5} \neq 3{,}5$: (u_n) n'est pas géométrique.

2. Pour tout entier n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 6$
   $v_{n+1} = 0{,}5u_n + 3 - 6$ (on remplace u_{n+1})
   $v_{n+1} = 0{,}5u_n - 3$
   $v_{n+1} = 0{,}5(u_n - 6)$ (on factorise par 0,5 : $0{,}5 \times 6 = 3$)
   $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
   (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

3. $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times 0{,}5^n$.
   $u_n = v_n + 6 = 6 - 5 \times 0{,}5^n$.
   $u_2 = 6 - 5 \times 0{,}5^2$
   $\quad = 6 - 5 \times 0{,}25$
   $\quad = 6 - 1{,}25$
   $\quad = 4{,}75$
   On retrouve la valeur de la question 1.

4. $u_{n+1} - u_n = \left(6 - 5 \times 0{,}5^{n+1}\right) - \left(6 - 5 \times 0{,}5^n\right)$
   $\quad = -5 \times 0{,}5^n \times (0{,}5 - 1)$
   $\quad = 2{,}5 \times 0{,}5^n$
   $2{,}5 \times 0{,}5^n > 0$ pour tout n : la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Sans parenthèses, la puissance ne porte que sur* 2.

$u_4 = 5 \times (-2)^4$
$= 5 \times 16$
$= 80$

b) *Départ au rang* 1 *: l'exposant est* $6 - 1 = 5$.

$u_6 = 3 \times 2^{6-1}$
$= 3 \times 2^5$
$= 96$

c) *On multiplie les coefficients.*

$q = 1{,}1^3$
$= 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1$
$= 1{,}331$

C'est une hausse de $33{,}1$ %.

d) *Le premier terme est négatif : il faut aussi son signe.*

$u_{n+1} - u_n = -2 \times 1{,}2^{n+1} - (-2 \times 1{,}2^n)$
$= -2 \times 1{,}2^n \times (1{,}2 - 1)$
$= -2 \times 1{,}2^n \times 0{,}2$
$= -0{,}4 \times 1{,}2^n$

$1{,}2^n > 0$, donc $-0{,}4 \times 1{,}2^n < 0$: la suite est strictement décroissante.

e) $q^2 = 4$ *a deux solutions.*

$q^2 = \dfrac{12}{3}$
$= 4$

$q = 2$ ou $q = -2$; sans autre information, les deux suites conviennent ($u_3 = 6$ ou $u_3 = -6$).

f) *Baisser de* 25 *%, c'est garder* 75 *%.*

$q = 1 - \dfrac{25}{100}$
$= 0{,}75$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. (u_n) est géométrique, avec $u_0 = 2$ et $q = 5$. Alors u_3 vaut :

Réponse D : 250
$u_3 = 2 \times 5^3 = 2 \times 125 = 250$; $1\,000 = 10^3$ vient de $(2 \times 5)^3$, 50 d'un exposant faux, 17 d'une suite arithmétique.

2. Une quantité baisse de 8 % par an. Le coefficient multiplicateur annuel est :

Réponse B : 0,92
$1 - \dfrac{8}{100} = 0{,}92$.

3. (u_n) est géométrique, avec $u_0 = -1$ et $q = 2$. La suite est :

Réponse A : strictement décroissante
$u_{n+1} - u_n = -1 \times 2^n \times (2 - 1) = -2^n < 0$.

4. (u_n) est géométrique, à termes positifs, avec $u_1 = 2$ et $u_3 = 50$. Sa raison est :

Réponse C : 5
$q^2 = \dfrac{50}{2} = 25$, donc $q = 5$ ou $q = -5$; les termes sont positifs, donc $q = 5$ (25 est q^2, 24 un écart de suite arithmétique).

5. Deux hausses successives de 5 % correspondent à une hausse globale de :

Réponse A : 10,25 %
$1{,}05^2 = 1{,}1025$.

6. (v_n) est géométrique de raison 0,5 et $v_0 = 2$, avec $v_n = u_n - 4$. Pour tout n :

Réponse B : $u_n = 4 + 2 \times 0{,}5^n$
$v_n = 2 \times 0{,}5^n$ et $u_n = v_n + 4$; (u_n) n'est pas géométrique, $6 \times 0{,}5^n$ est faux.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).