Comparaison, gendarmes, convergence – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Limites de suites · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Comparaison : pour aller vers $+\infty$, il faut minorer u_n par une suite qui tend vers $+\infty$ (majorer ne sert à rien).
- Gendarmes : les deux bornes doivent avoir la **même** limite ; $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ seul ne permet pas de conclure.
- Bornée ne veut pas dire convergente, et croissante ne veut pas dire « tend vers $+\infty$ ».
- Croissante et majorée par M : la suite converge, mais pas forcément vers M ; sa limite est seulement $\leqslant M$.
- Si $u_n < a$ pour tout n et $\lim u_n = \ell$, alors $\ell \leqslant a$: l'inégalité stricte devient large.
- $\ell = f(\ell)$ peut avoir plusieurs solutions : on garde celle qui respecte l'encadrement des termes.

Exercice 1 – Théorèmes de comparaison ★

Minore ou majore u_n par une suite simple, puis déduis-en la limite de (u_n) $(n \in \mathbb{N})$.

a) $u_n = n + \cos(n)$

b) $u_n = -n^2 + \sin(n)$

c) $u_n = n^2 + (-1)^n n$

d) $u_n = 3^n + (-1)^n$

e) $u_n = \sqrt{n} - 2 + \sin(n)$

f) $u_n = -2n + \cos(n)^2$

g) $u_n = n(2 + \sin(n))$

h) $u_n = (-1)^n - n^3$

Exercice 2 – Théorème des gendarmes ★

Encadre u_n pour $n \geqslant 1$, puis déduis-en la limite de (u_n).

a) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

c) $u_n = \dfrac{3 + \cos(n)}{n}$

d) $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n}$

e) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2 + 1}$

f) $u_n = 5 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

g) $u_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{n^2}$

h) $u_n = \dfrac{4 + \sin(n)}{n+2}$

Exercice 3 – Vrai ou faux ? ★

Réponds par vrai ou faux. Justifie : par le cours si c'est vrai, par un contre-exemple si c'est faux.

a) Une suite croissante tend vers $+\infty$.

b) Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

c) Une suite bornée converge.

d) Une suite croissante et majorée par 3 converge vers 3.

e) Si $u_n < 2$ pour tout n et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell < 2$.

f) Une suite décroissante et minorée par 0 converge.

g) Si $v_n \leqslant u_n$ pour tout n et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

h) Si $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout n, alors $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 4 – Monotone et bornée ★★

Étudie le sens de variation de (u_n), trouve un majorant ou un minorant, et justifie que la suite converge. Calcule ensuite sa limite.

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$.

c) $u_n = 3 + \dfrac{2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 – Limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ★★

On note f la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et on admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. Écris l'équation vérifiée par ℓ, résous-la et déduis-en ℓ.

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}25u_n + 6$.

b) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8}$; tous les termes sont positifs.

c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2}$; tous les termes sont strictement positifs.

d) $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

e) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}25u_n^2 + 1$.

Exercice 6 – Encadrer, puis conclure ★★

Encadre u_n pour $n \geqslant 1$ en justifiant chaque étape, puis détermine la limite.

a) $u_n = \dfrac{2n + \cos(n)}{n+1}$

b) $u_n = \dfrac{3^n + (-1)^n}{3^n}$

c) $u_n = \dfrac{n + 2\sin(n)}{3n}$

d) $u_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

Exercice 7 – Une suite définie par une fonction ★★★

Soit $f(x) = \dfrac{6x+4}{x+3}$ sur $[0;+\infty[$. On définit (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudie le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$. Calcule $f(0)$ et $f(4)$.
2. Démontre par récurrence que, pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
3. Déduis-en que (u_n) converge.
4. Détermine sa limite.

Exercice 8 – La somme des inverses des carrés ★★★

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

1. Montre que (u_n) est croissante.
2. Vérifie que $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$, puis démontre par récurrence que $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Déduis-en que (u_n) converge, et donne un encadrement de sa limite ℓ.

Exercice 9 – Le bassin et le seuil ★★★

Un bassin contient $10\,\text{m}^3$ d'eau. Chaque jour, 15 % de l'eau s'évapore, puis on ajoute $4{,}5\,\text{m}^3$. On note u_n le volume (en m^3) au bout de n jours : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 4{,}5$. On pose $v_n = u_n - 30$.

1. Montre que (v_n) est géométrique ; précise sa raison et v_0.
2. Exprime u_n en fonction de n, puis détermine la limite de (u_n). Interprète.
3. Complète le programme pour qu'il affiche le premier jour où le volume atteint au moins $29{,}9\,\text{m}^3$.

```
u = 10
n = 0
while ..........:
    u = ..........
    n = n + 1
print(n)
```

4. Le programme affiche 33. Contrôle ce résultat avec la formule de la question 2 (calculatrice autorisée).

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) « $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1, donc elle converge. »

b) « $u_n = 3 - 0{,}4^n$ est croissante et majorée par 4, donc $\lim u_n = 4$. »

c) « $u_n < 3$ pour tout n et (u_n) converge vers ℓ, donc $\ell < 3$. »

d) « $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $(\cos(n))$ converge. »

e) « $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ converge vers ℓ : $\ell^2 = \ell + 12$, donc $\ell = 4$ ou $\ell = -3$: la suite a deux limites. »

f) « $u_n = \dfrac{1}{n}$ vérifie $u_n \geqslant -n$ et $\lim(-n) = -\infty$, donc $\lim u_n = -\infty$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $\lim \dfrac{2 + \cos(n)}{n^2}$ vaut :

   A 2 **B** $+\infty$ **C** 0 **D** elle n'existe pas

2. Une suite décroissante et minorée par 1 :

   A converge vers une limite $\geqslant 1$ **B** converge vers 1 **C** tend vers $-\infty$

   D n'a pas forcément de limite

3. $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 4$ et (u_n) converge. Sa limite est :

   A 4 **B** $\dfrac{5}{2}$ **C** 0 **D** 10

4. Si $u_n \geqslant n^2 - 10$ pour tout n, alors :

   A $\lim u_n = -10$ **B** $\lim u_n = +\infty$ **C** (u_n) converge **D** on ne peut rien dire

5. (u_n) est croissante et $u_n \leqslant 7$ pour tout n. Alors :

   A (u_n) converge vers 7 **B** (u_n) converge vers un $\ell \leqslant 7$ **C** $\lim u_n = +\infty$

   D (u_n) ne converge pas forcément

6. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1{,}5u_n$. Pour afficher le premier rang où $u_n > 50$, la boucle s'écrit :

   A `while u > 50:` **B** `if u <= 50:` **C** `while u == 50:` **D** `while u <= 50:`

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).