Corrigé – Suites arithmétiques

Mathématiques – Première spécialité

Suites arithmétiques · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Terme général ★

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

a) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = 3 + 5n$.
$u_{10} = 3 + 10 \times 5$
$\quad = 53$

b) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = 12 - 4n$.
$u_7 = 12 + 7 \times (-4)$
$\quad = -16$

c) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = -2 + 0{,}5n$.
$u_{20} = -2 + 20 \times 0{,}5$
$\quad = 8$

d) *Départ au rang* 1 *:* $u_n = u_1 + (n-1)r$.
$u_n = 7 + (n-1) \times 3$
$\quad = 3n + 4$
$u_{15} = 7 + (15-1) \times 3$
$\quad = 7 + 14 \times 3$
$\quad = 49$

e) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}n$.
$u_6 = \dfrac{1}{3} + 6 \times \dfrac{2}{3}$
$\quad = \dfrac{13}{3}$

f) *Départ au rang* 1 *:* $u_n = u_1 + (n-1)r$.
$u_n = -5 + (n-1) \times (-2)$
$\quad = -2n - 3$
$u_{30} = -5 + (30-1) \times (-2)$
$\quad = -5 + 29 \times (-2)$
$\quad = -63$

g) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = 100 - 7{,}5n$.
$u_8 = 100 + 8 \times (-7{,}5)$
$\quad = 40$

h) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = 1{,}2n$.
$u_{25} = 0 + 25 \times 1{,}2$
$\quad = 30$

Exercice 2 – Raison et premier terme ★

(u_n) est une suite arithmétique. Calcule sa raison r et son premier terme u_0. Contrôle ta réponse.

a) $u_5 = u_2 + (5-2)r$, donc :

$$\begin{aligned} r &= \frac{20-11}{5-2} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 11 - 2 \times 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Contrôle : $u_0 + 5r = 20 = u_5$.

b) $u_9 = u_4 + (9-4)r$, donc :

$$\begin{aligned} r &= \frac{(-8)-7}{9-4} \\ &= \frac{-15}{5} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 7 - 4 \times (-3) \\ &= 19 \end{aligned}$$

Contrôle : $u_0 + 9r = -8 = u_9$.

c) $u_{10} = u_0 + (10-0)r$, donc :

$$\begin{aligned} r &= \frac{1-6}{10-0} \\ &= \frac{-5}{10} \\ &= -0{,}5 \end{aligned}$$

u_0 est donné : $u_0 = 6$.

Contrôle : $u_0 + 10r = 1 = u_{10}$.

d) $u_7 = u_3 + (7-3)r$, donc :

$$\begin{aligned} r &= \frac{9-(-1)}{7-3} \\ &= \frac{10}{4} \\ &= 2{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 - 3 \times 2{,}5 \\ &= -8{,}5 \end{aligned}$$

Contrôle : $u_0 + 7r = 9 = u_7$.

e) $u_{20} = u_{10} + (20-10)r$, donc :

$$\begin{aligned} r &= \frac{64-34}{20-10} \\ &= \frac{30}{10} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 34 - 10 \times 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Contrôle : $u_0 + 20r = 64 = u_{20}$.

f) $u_6 = u_1 + (6-1)r$, donc :
$$\begin{aligned} r &= \frac{4-4}{6-1} \\ &= \frac{0}{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} u_0 &= 4 - 1 \times 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$
Contrôle : $u_0 + 6r = 4 = u_6$.

g) $u_8 = u_5 + (8-5)r$, donc :
$$\begin{aligned} r &= \frac{4-2{,}5}{8-5} \\ &= \frac{1{,}5}{3} \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} u_0 &= 2{,}5 - 5 \times 0{,}5 \\ &= 0 \end{aligned}$$
Contrôle : $u_0 + 8r = 4 = u_8$.

h) $u_2 = u_{12} + (2-12)r$, donc :
$$\begin{aligned} r &= \frac{0-(-30)}{2-12} \\ &= \frac{30}{-10} \\ &= -3 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} u_0 &= -30 - 12 \times (-3) \\ &= 6 \end{aligned}$$
Contrôle : $u_0 + 2r = 0 = u_2$.

Exercice 3 – Est-elle arithmétique ? ★

Dis si la suite (u_n), définie pour $n \geqslant 0$, est arithmétique. Si oui, donne sa raison et son premier terme ; sinon, justifie avec deux écarts différents.

a)
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (7(n+1) - 2) - (7n - 2) \\ &= 7n + 7 - 2 - 7n + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$
La différence ne dépend pas de n : la suite est arithmétique, de raison 7 et de premier terme $u_0 = -2$.

b)
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(3 - \frac{n+1}{2}\right) - \left(3 - \frac{n}{2}\right) \\ &= 3 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - 3 + \frac{n}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
La différence ne dépend pas de n : la suite est arithmétique, de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

c) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$.
$u_1 - u_0 = 2 - 1$
$\quad = 1$
$u_2 - u_1 = 5 - 2$
$\quad = 3$
Deux écarts différents : la suite n'est pas arithmétique.

d) La relation s'écrit $u_{n+1} - u_n = -4$ pour tout n : c'est une constante.
La suite est arithmétique, de raison -4 et de premier terme $u_0 = 9$.

e)
$u_1 = 2 \times 1 + 1$
$\quad = 3$
$u_2 = 2 \times 3 + 1$
$\quad = 7$
$u_1 - u_0 = 2$ mais $u_2 - u_1 = 4$: deux écarts différents, la suite n'est pas arithmétique.

f)
$u_n = (n+2)^2 - n^2$
$\quad = n^2 + 4n + 4 - n^2$
$\quad = 4n + 4$
$u_{n+1} - u_n = (4(n+1) + 4) - (4n + 4)$
$\quad = 4$
La différence ne dépend pas de n : la suite est arithmétique, de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4$.

g)
$u_n = \dfrac{4n - 6}{2}$
$\quad = 2n - 3$
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n - 3) = 2$.
La différence ne dépend pas de n : la suite est arithmétique, de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

h) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$: $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 2$.
Deux écarts différents : la suite n'est pas arithmétique (on multiplie par 2 à chaque rang).

Exercice 4 – Modéliser un accroissement constant ★★

Pour chaque situation, définis une suite, dis si elle est arithmétique et réponds à la question.

a) On note s_n le nombre de sièges de la rangée n : on ajoute 2 à chaque rangée, (s_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $s_1 = 18$.
Départ au rang 1 *:* $s_n = s_1 + (n-1) \times 2$.
$s_{15} = 18 + (15 - 1) \times 2$
$\quad = 18 + 28$
$\quad = 46$
La 15e rangée compte 46 sièges.

b) On note L_n le loyer en $2026+n$: (L_n) est arithmétique de raison 12, avec $L_0 = 650$, donc $L_n = 650 + 12n$.
2035 correspond à $n = 2035 - 2026 = 9$.
$L_9 = 650 + 12 \times 9$
$= 650 + 108$
$= 758$
En 2035, le loyer sera de 758 €.

c) On note h_n la hauteur après n heures : (h_n) est arithmétique de raison $-1{,}5$, avec $h_0 = 24$, donc $h_n = 24 - 1{,}5n$.
$h_{10} = 24 - 1{,}5 \times 10$
$= 24 - 15$
$= 9$
Consumée quand $h_n = 0$:
$24 - 1{,}5n = 0$
$\iff 1{,}5n = 24$ *(on ajoute* $1{,}5n$*)*
$\iff n = 16$ *(on divise par* $1{,}5$*)*
$S = \{16\}$
Hauteur 9 cm après 10 heures ; la bougie est consumée au bout de 16 heures.

d) On note p_n le prix, en euros, de l'année n : $p_1 = 30$.
Année 1 : 30 €.
Année 2 : $30 \times 1{,}04 = 31{,}2$ €.
Année 3 : $31{,}2 \times 1{,}04 = 32{,}448$ €.
Écarts : $31{,}2 - 30 = 1{,}2$ puis $32{,}448 - 31{,}2 = 1{,}248$.
Les écarts ne sont pas égaux : une hausse en pourcentage n'est pas un accroissement constant. La suite n'est pas arithmétique.

e) On note d_n la distance du jour n : (d_n) est arithmétique de raison 500, avec $d_1 = 2\,000$.
Départ au rang 1 *:* $d_n = d_1 + (n-1) \times 500$.
$d_{12} = 2000 + (12-1) \times 500$
$= 2000 + 5500$
$= 7500$
Le 12e jour, Léa court 7 500 m.

Exercice 5 – Sens de variation et points alignés ★★

(u_n) est une suite définie pour $n \geqslant 0$. Réponds à la question posée.

a)
$u_{n+1} - u_n = (5 - 3(n+1)) - (5 - 3n)$
$= 5 - 3n - 3 - 5 + 3n$
$= -3$
La suite est arithmétique de raison $-3 < 0$: elle est strictement décroissante.

b) $u_{n+1} - u_n = 0{,}1$: la suite est arithmétique de raison $0{,}1 > 0$, elle est strictement croissante.
Le premier terme est négatif, mais seul le signe de la raison compte.

c)
$u_n = \dfrac{2n-7}{4}$
$\quad = \dfrac{1}{2}n - \dfrac{7}{4}$
$u_n = u_0 + nr$ avec $u_0 = -\dfrac{7}{4}$ et $r = \dfrac{1}{2}$: la suite est arithmétique.
$r > 0$: elle est strictement croissante.
Les points $(n\,;\,u_n)$ sont sur la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{4}$.

d)
$r = \dfrac{10-10}{8-3}$
$\quad = 0$
La raison est nulle : la suite est constante (tous ses termes valent 10).

e) $u_n = 4 - 2n$: les points sont sur la droite d'équation $y = -2x + 4$.
$u_7 = 4 - 2 \times 7$
$\quad = 4 - 14$
$\quad = -10$
Le point $(7\,;\,-10)$ est le point de rang 7 : il est bien sur la droite.

Exercice 6 – À partir de n'importe quel terme ★★

(u_n) est une suite arithmétique de raison r. Utilise $u_n = u_p + (n-p)r$.

a)
$u_{12} = 17 + (12-5) \times 4$
$\quad = 17 + 7 \times 4$
$\quad = 17 + 28$
$\quad = 45$

b) *On recule :* $8 - 20 = -12$.
$u_8 = -3 + (8-20) \times (-0{,}5)$
$\quad = -3 + (-12) \times (-0{,}5)$
$\quad = -3 + 6$
$\quad = 3$

c)
$r = \dfrac{14-2}{11-7}$
$\quad = \dfrac{12}{4}$
$\quad = 3$
$u_n = 2 + (n-7) \times 3$
$\quad = 2 + 3n - 21$
$\quad = 3n - 19$
$u_{100} = 3 \times 100 - 19$
$\quad = 281$

d) $u_n = 5 + 3n$; on résout $u_n = 302$.

$5 + 3n = 302$

$\iff 3n = 297$ *(on retranche 5)*

$\iff n = 99$ *(on divise par 3)*

$S = \{99\}$

C'est le terme u_{99}.

e) $u_n = 7 + 4n$; on résout $u_n = 100$.

$7 + 4n = 100$

$\iff 4n = 93$ *(on retranche 7)*

$\iff n = \dfrac{93}{4}$ *(on divise par 4)*

$S = \left\{\dfrac{93}{4}\right\}$

$\dfrac{93}{4} = 23{,}25$ n'est pas un entier : 100 n'est pas un terme de la suite ($u_{23} = 99$ et $u_{24} = 103$).

Exercice 7 – La réserve d'eau ★★★

1. Chaque jour, on retire la même quantité : $v_{n+1} = v_n - 420$, soit $v_{n+1} - v_n = -420$ pour tout n.
   (v_n) est arithmétique de raison -420 et de premier terme $v_0 = 15\,000$, donc $v_n = 15\,000 - 420n$.

2. $v_{10} = 15\,000 - 420 \times 10$
   $= 15\,000 - 4200$
   $= 10\,800$
   Au bout de 10 jours, il reste 10 800 L.

3. $15\,000 - 420n < 5000$
   $\iff -420n < -10\,000$ *(on retranche 15 000)*
   $\iff n > \dfrac{10\,000}{420}$ *(on divise par $-420 < 0$: le sens change)*

   $\dfrac{10\,000}{420} \approx 23{,}81$: le plus petit entier qui convient est 24 (arrondi par excès).
   Contrôle : $v_{23} = 5\,340$ et $v_{24} = 4\,920$.
   Le volume passe sous 5 000 L au bout de 24 jours.

4. On cherche le plus petit n tel que $v_n \leqslant 0$, soit $420n \geqslant 15\,000$ et $n \geqslant \dfrac{15\,000}{420} \approx 35{,}71$.
   Le plus petit entier qui convient est 36 (arrondi par excès).
   Contrôle : $v_{35} = 300$ (il reste 300 L, moins qu'un prélèvement) et $v_{36} = -120 < 0$ (le 36e prélèvement ne peut pas se faire en entier).
   La réserve est vide au bout de 36 jours : elle se vide pendant le 36e jour.

Exercice 8 – Deux tirelires ★★★

1. Chaque mois, on ajoute la même somme : les deux suites sont arithmétiques.
   (a_n) : raison 150, $a_0 = 2\,400$, donc $a_n = 2\,400 + 150n$.
   (b_n) : raison 240, $b_0 = 600$, donc $b_n = 600 + 240n$.

2. $a_{12} = 2400 + 150 \times 12$
   $= 2400 + 1800$
   $= 4200$
   $b_{12} = 600 + 240 \times 12$
   $= 600 + 2880$
   $= 3480$
   Au bout d'un an, Inès a encore plus d'économies que Hugo.

3. $600 + 240n > 2400 + 150n$
   $\iff 90n > 1800$ *(on retranche* $150n$ *et* 600*)*
   $\iff n > 20$ *(on divise par* $90 > 0$*)*

   L'inégalité est stricte : $n = 20$ *ne convient pas.*
   Contrôle : $a_{20} = b_{20} = 5\,400$ et $b_{21} = 5\,640 > a_{21} = 5\,550$.
   Hugo a strictement plus d'économies qu'Inès à partir du 21e mois.

4. La boucle tourne tant que Hugo n'a pas strictement plus qu'Inès (condition contraire de celle cherchée) ; `n` compte les mois.
   Elle s'arrête au premier n tel que $b_n > a_n$: le programme affiche 21, ce qui confirme la question 3.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Départ au rang* 1 *: de* u_1 *à* u_{10}*, on ajoute* 9 *fois la raison.*
$u_{10} = 4 + (10 - 1) \times 3$
$= 4 + 9 \times 3$
$= 31$

b) *On divise par l'écart des rangs,* $6 - 2 = 4$.
$r = \dfrac{20 - 8}{6 - 2}$
$= \dfrac{12}{4}$
$= 3$

c) *Trois termes ne prouvent rien.*
$u_3 = 3^3 - 3 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$
$= 27 - 27 + 12 + 1$
$= 13$
$u_3 - u_2 = 8$ alors que $u_1 - u_0 = 2$: la suite n'est pas arithmétique.

d) *Le signe du premier terme ne compte pas.*
$u_{n+1} - u_n = (-10 + 2(n + 1)) - (-10 + 2n)$
$= 2$
$r = 2 > 0$: la suite est strictement croissante.

e) *Il faut arrondir par excès : n doit être un entier supérieur à* $13{,}86$.

$u_{13} = 3 + 7 \times 13$
$\quad = 94$
$u_{14} = 3 + 7 \times 14$
$\quad = 101$
$u_{13} \leqslant 100 < u_{14}$: le seuil est franchi à partir de $n = 14$.

f) *Une hausse de* $5\ \%$ *ajoute* $5\ \%$ *du salaire de l'année, qui change chaque année.*

$s_1 = 2000 \times 1{,}05$
$\quad = 2100$
$s_2 = 2100 \times 1{,}05$
$\quad = 2205$
Écarts : 100 puis 105.
La suite n'est pas arithmétique.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. (u_n) est arithmétique, avec $u_0 = 4$ et $r = -3$. Alors u_{10} vaut :

Réponse B : -26
$u_{10} = u_0 + 10r = 4 - 30 = -26$; -23 correspond à 9 raisons au lieu de 10.

2. (u_n) est arithmétique, avec $u_3 = 5$ et $u_8 = 25$. Sa raison vaut :

Réponse D : 4
$r = \dfrac{25 - 5}{8 - 3} = \dfrac{20}{5} = 4$: on divise par l'écart des rangs.

3. Laquelle de ces suites est arithmétique ?

Réponse A : $u_n = 3 - 2n$
$u_{n+1} - u_n = -2$ pour tout n : la différence ne dépend pas de n.

4. Une suite arithmétique est strictement décroissante lorsque :

Réponse C : sa raison est strictement négative
$u_{n+1} - u_n = r$: le signe de r décide seul.

5. (u_n) est arithmétique, commence au rang 1, avec $u_1 = 2$ et $r = 5$. Pour tout $n \geqslant 1$:

Réponse A : $u_n = 5n - 3$
$u_n = u_1 + (n-1)r = 2 + 5n - 5 = 5n - 3$.

6. $u_n = 50 - 6n$. Le plus petit entier n tel que $u_n < 0$ est :

Réponse D : 9
$50 - 6n < 0 \iff n > \dfrac{50}{6} \approx 8{,}33$; contrôle : $u_8 = 2$ et $u_9 = -4$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).