1re spécialité / Suites arithmétiques et géométriques

benprof particulier.fr

48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Suites arithmétiques : reconnaître, terme général, variations*

À retenir : (u_n) est arithmétique si $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout entier naturel n. On a $u_n = u_p + (n-p)r$, et $u_n = u_1 + (n-1)r$ si la suite commence au rang 1. On a aussi $r = \frac{u_q - u_p}{q-p}$. Si $r > 0$, la suite est croissante ; si $r < 0$, décroissante ; si $r = 0$, constante. Ex. : $u_3 = 10$, $r = 2$, donc $u_8 = 20$.

Ex. 1 ★☆☆ **Terme général et termes de rang donné** — On considère trois suites arithmétiques : (u_n) avec $u_0 = -7$ et de raison 4 ; (v_n), définie à partir du rang 1, avec $v_1 = 12$ et de raison $-2{,}5$; (w_n) de raison 3 avec $w_6 = 40$.

(a) Exprime u_n en fonction de n.

(b) Calcule le 10e terme de la suite (u_n).

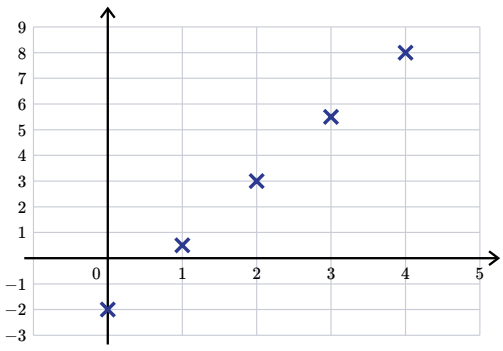
(c) Exprime v_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(d) Calcule v_{21}.

(e) Calcule w_{25}.

(f) Exprime w_n en fonction de n, puis déduis-en w_0.

Ex. 2 ★☆☆ **Sens de variation et nuage de points** — Pour les trois dernières questions, (a_n) est une suite arithmétique représentée par le nuage ci-dessous.



(a) Pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 0{,}8n$. Donne la raison de (u_n) et son sens de variation.

(b) $v_0 = -4$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 0{,}3$. Donne le sens de variation de (v_n).

(c) (t_n) est arithmétique de raison 0, avec $t_0 = 6$. Décris la suite (t_n).

(d) Lis a_0 et a_1 sur le nuage, puis déduis-en la raison de (a_n).

(e) Donne l'équation de la droite qui porte les points $(n\,;\,a_n)$.

Ex. 2 (suite)

(f) Lucas relie les points du nuage par un trait continu. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 3 ★★☆ **Arithmétique ou non ?** — Les quatre questions sont indépendantes.

(a) Pour tout entier naturel n, $t_n = (2n+3)^2 - 4n^2$. Démontre que (t_n) est arithmétique et donne sa raison.

(b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 + 1$. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifie.

(c) $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + n$. La suite (v_n) est-elle arithmétique ? Justifie.

(d) Pour tout entier naturel n, $w_n = n^3 - 3n^2 + 4n + 1$. Inès trouve $w_0 = 1$, $w_1 = 3$ et $w_2 = 5$, puis conclut que (w_n) est arithmétique. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 4 ★★☆ **Retrouver une suite à partir de deux termes** — (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 31$ et $u_{12} = -4$.

(a) Hugo écrit $r = \frac{u_{12} - u_5}{12}$. Explique son erreur, puis calcule la raison r.

(b) Déduis-en u_0, puis exprime u_n en fonction de n.

(c) Donne le sens de variation de (u_n). Justifie.

(d) Les nombres -139 et -150 sont-ils des termes de la suite ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **Les rangs d'une salle de spectacle** — Dans une salle de spectacle de Nancy, le 1er rang compte 18 sièges et chaque rang compte 3 sièges de plus que le précédent. On note s_n le nombre de sièges du rang n ($n \geqslant 1$).

(a) Justifie que (s_n) est arithmétique. Donne sa raison et son premier terme.

(b) Mila écrit $s_n = 18 + 3n$. Explique son erreur et donne l'expression correcte de s_n.

(c) Calcule le nombre de sièges du 25e rang.

(d) Quel rang compte exactement 63 sièges ?

(e) Détermine le premier rang qui compte plus de 100 sièges.

Ex. 6 ★★★ **Démontrer le terme général et l'utiliser** — Dans tout l'exercice, (u_n) est une suite arithmétique de raison r : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

(a) Démontre que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$. Additionne des égalités bien choisies.

(b) Déduis-en que, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_{3n+1}$. Démontre que (v_n) est arithmétique. Exprime sa raison et v_0 en fonction de u_0 et r.

(d) Dans cette question, $u_2 = 9$ et $v_5 = 79$. Calcule r, puis u_0.

(e) Pour tout entier naturel n, $p_n = 2n^2 - n$. Yanis écrit : « $p_{n+1} - p_n = 4n + 1$, donc (p_n) est arithmétique de raison $4n + 1$. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **La citerne pendant la sécheresse** — Près d'Albi, une citerne contient 2 450 L le matin du 1er jour d'une sécheresse. On note a_n et b_n son volume (en L) le matin du n-ième jour selon deux modèles, avec $a_1 = b_1 = 2\,450$. Modèle A : elle perd 35 L par jour. Modèle B : pour tout entier $n \geqslant 1$, $b_{n+1} = b_n - n$.

(a) Justifie que (a_n) est arithmétique, puis exprime a_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) Calcule le volume le 30e jour selon le modèle A, puis donne le sens de variation de (a_n).

(c) Exprime $a_{47} - a_{12}$ à l'aide de la raison, puis déduis-en le volume perdu entre le matin du 12e jour et celui du 47e jour.

(d) Détermine le premier jour où, selon le modèle A, le volume est inférieur à 300 L.

(e) Calcule b_2, b_3 et b_4. La suite (b_n) est-elle arithmétique ? Justifie.

Ex. 8 ★★★ **Tableau, droite et suite à paramètre** — (u_n) est une suite arithmétique définie pour tout entier naturel n. On donne une partie de son tableau de valeurs :

n	**3**	**7**	**10**
u_n	-4	8	…

(a) Calcule la raison r et u_0, puis complète la dernière case du tableau.

(b) Zoé affirme que le 10e terme de la suite est la valeur de la dernière case. A-t-elle raison ? Justifie, puis donne le 10e terme.

(c) Démontre que les points $(n\,;u_n)$ sont alignés et donne une équation de la droite qui les porte.

(d) Pour un réel m et pour tout entier naturel n, $w_n = (5 - 2m)n + m$. Démontre que (w_n) est arithmétique, puis étudie son sens de variation selon m.

(e) Détermine m pour que $w_4 = u_4$. Donne alors le sens de variation de (w_n).

2. *Somme de termes d'une suite arithmétique*

À retenir : De u_p à u_q : $q - p + 1$ termes (de u_0 à u_n : $n + 1$). $S = N \times \frac{\text{premier}+\text{dernier}}{2}$, dernier terme calculé avant. Ex. : $3 + 5 + \cdots + 21$: 10 termes, $S = 120$. $\frac{n(n+1)}{2}$: seulement pour $1 + \cdots + n$.

Ex. 9 ★☆☆ **Sommes d'entiers et de termes consécutifs** — Calcule chaque somme ou réponds à la question. Pour les trois derniers items, (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

(a) $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 60$.

(b) $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 130$ (somme des entiers pairs de 2 à 130).

(c) $S = 11 + 13 + 15 + \cdots + 99$ (somme des entiers impairs de 11 à 99).

(d) Combien de termes compte la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{24}$?

(e) Calcule u_{24}, puis la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{24}$.

(f) Calcule $u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{24}$.

Ex. 10 ★☆☆ **Une somme qui devient négative** — On considère la somme $S = 50 + 44 + 38 + \cdots + (-58)$, dont les termes sont ceux d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 50$.

(a) Donne la raison r de la suite (u_n).

(b) Détermine le rang k tel que $u_k = -58$.

(c) Déduis-en le nombre de termes de la somme S.

(d) Calcule S.

Ex. 11 ★★☆ **Les multiples de 7 entre 100 et 300** — On s'intéresse aux multiples de 7 compris entre 100 et 300. On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7n$, et S la somme de ces multiples.

(a) Détermine le plus petit et le plus grand de ces multiples, ainsi que leurs rangs dans la suite (u_n).

(b) Justifie que (u_n) est arithmétique, puis déduis-en le nombre de multiples de 7 compris entre 100 et 300.

(c) Écris S dans l'ordre croissant, puis en dessous dans l'ordre décroissant. Que vaut chaque colonne ? Justifie.

(d) Déduis-en $2S$, puis S.

Ex. 12 ★★☆ **Quatre élèves, quatre erreurs** — (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -9$ et de raison 2. Mathis veut calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$. Il écrit : « $u_{20} = -9 + 20 \times 2 = 31$; il y a 20 termes, donc $S = 20 \times \frac{-9+31}{2} = 220$. »

(a) Repère l'erreur de Mathis et explique-la.

(b) Calcule la bonne valeur de S.

Ex. 12 (suite)

(c) Jade affirme que $S = 31$, car « on a ajouté 20 fois la raison à u_0 ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Lucas calcule $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$ en écrivant $21 \times \frac{u_1+u_{20}}{2}$ et trouve 252. Corrige son calcul.

(e) Inès affirme : « $1 + 2 + \cdots + 40 = \frac{40\times 39}{2} = 780$ ». A-t-elle raison ? Justifie et donne la bonne valeur.

Ex. 13 ★★☆ **Corriger un programme de somme** — (u_n) est définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 3$. Sacha veut que `somme(n)` renvoie $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Il écrit :

```
def somme(n):
    u = 12
    for k in range(n):
        S = 0
        u = u - 3
        S = S + u
    return S
```

(a) Calcule à la main $u_0 + u_1 + u_2$.

(b) Fais tourner le programme de Sacha à la main : que renvoie `somme(2)` ? Explique.

(c) Corrige le programme pour que `somme(n)` renvoie bien $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Justifie chaque modification.

(d) Calcule $u_0 + u_1 + \cdots + u_{30}$ avec la formule du cours.

Ex. 14 ★★★ **De Gauss aux entiers impairs** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel tel que $n \geqslant 1$. On note $P_n = 2 + 4 + \cdots + 2n$ et $I_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$.

(a) Démontre que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ en écrivant cette somme dans les deux sens.

(b) Déduis-en une expression de P_n en fonction de n.

(c) Justifie que I_n compte n termes, puis exprime I_n en fonction de n.

(d) Calcule $1 + 3 + 5 + \cdots + 151$. Commence par trouver le nombre de termes.

(e) Détermine le plus grand entier n tel que $P_n \leqslant 1\,000$. Justifie.

Ex. 15 ★★★ **Les gradins du théâtre de Vaison** — Dans le théâtre de plein air de Vaison, le 1er rang compte 24 places et chaque rang compte 3 places de plus que le rang précédent. On note u_n le nombre de places du rang n ($n \geqslant 1$) et $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ le nombre total de places des n premiers rangs.

(a) Justifie que (u_n) est arithmétique, puis exprime u_n en fonction de n.

(b) Ilyès affirme qu'avec 15 rangs, le nombre total de places est égal à u_{15}. A-t-il raison ? Calcule S_{15}.

(c) Exprime S_n en fonction de n, puis détermine le nombre minimal de rangs pour avoir au moins 1 500 places.

Ex. 15 (suite)

(d) On considère la fonction ci-dessous.

```
def rangs(objectif):
    n = 1
    u = 24
    S = 24
    while S < objectif:
        n = n + 1
        u = u + 3
        S = S + u
    return n
```

Explique le rôle des variables `u` et `S`, puis donne la valeur renvoyée par `rangs(1500)`.

(e) Ilyès échange les lignes `u = u + 3` et `S = S + u`. Que renvoie alors `rangs(1500)` ? Explique.

Ex. 16 ★★★ **Deux start-up qui sortent du rouge** — La start-up de Maëlys, à Rennes, a un résultat de $-4\,800$ € le 1er mois ; ce résultat augmente ensuite de 600 € chaque mois. On note u_n le résultat du mois n ($n \geqslant 1$) et $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ le résultat cumulé des n premiers mois.

(a) Exprime u_n en fonction de n, puis détermine le premier mois où le résultat est strictement positif.

(b) Calcule le résultat cumulé S_{12} sur la première année. Interprète son signe.

(c) Exprime S_n en fonction de n, sous forme factorisée.

(d) Déduis-en à partir de quel mois le résultat cumulé devient strictement positif. Justifie.

(e) Une autre start-up a un résultat de $-3\,000$ € le 1er mois, puis 400 € de plus chaque mois. Laquelle a le meilleur cumul sur 24 mois ? Justifie.

3. *Suites géométriques : reconnaître, terme général, variations*

À retenir : $u_n = u_p \times q^{n-p}$: l'exposant est l'écart des indices (ex. $u_7 = u_3 \times q^4$), jamais $(u_0 q)^n$. Démontrer : $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout n. Si $q > 1$: croissante si $u_0 > 0$, décroissante si $u_0 < 0$; si $q < 0$: ni l'une ni l'autre.

Ex. 17 ★☆☆ **Terme général et calcul direct** — Dans chaque question, la suite est géométrique. Donne le résultat sous forme exacte.

(a) (u_n) a pour premier terme $u_0 = 4$ et pour raison 3. Exprime u_n en fonction de n, puis calcule u_5.

(b) (v_n) a pour premier terme $v_1 = 3$ et pour raison -2. Calcule v_6.

(c) (w_n) a pour raison 2 et vérifie $w_4 = 7$. Calcule w_9.

(d) (t_n) est définie par $t_0 = 50$ et $t_n = t_{n-1} \times 1{,}1$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Donne sa raison et calcule t_3.

(e) (a_n) a pour premier terme $a_0 = 2$ et pour raison 5. Calcule a_3, puis compare avec $(2 \times 5)^3$ et $2 + 5^3$.

Ex. 18 ★☆☆ **Retrouver la raison à partir de deux termes** — Dans chaque question, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

(a) $u_3 = 5$ et $u_6 = 40$. Calcule q, puis u_0.

(b) $u_1 = 7$, $u_3 = 28$ et $q < 0$. Calcule q, puis u_0.

(c) $u_0 = 1\,000$, $u_2 = 810$ et tous les termes sont positifs. Calcule q, puis u_5.

(d) $u_5 = 48$ et $u_8 = -6$. Calcule q, puis u_{10}.

Ex. 19 ★★☆ **Géométrique ou pas ?** — Chaque suite est définie pour tout entier naturel n. Dis si elle est géométrique et justifie. Si oui, donne sa raison et son premier terme.

(a) $u_n = 5 \times 2^{n+1}$.

(b) $v_n = 3^n + 1$.

(c) $w_n = \dfrac{7}{4^n}$.

(d) $t_n = n \times 3^n$. Léo calcule $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ pour conclure : sa méthode marche-t-elle pour tout n ? Justifie.

Ex. 20 ★★☆ **Avec une suite auxiliaire** — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 10$.

(a) Calcule u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifie.

(b) On pose $v_n = u_n - 50$ pour tout entier naturel n. Démontre que (v_n) est géométrique ; donne sa raison et v_0.

(c) Exprime v_n, puis u_n, en fonction de n.

(d) Calcule u_{10} (arrondi à 0,01).

Ex. 21 ★★☆ **Sens de variation et comportement de q^n** — Les suites sont définies pour tout entier naturel n. Le tableau donne des valeurs de $0{,}9^n$ arrondies à 10^{-4}.

n	10	20	30	60
$0{,}9^n$	0{,}3487	0{,}1216	0{,}0424	0{,}0018

(a) Donne le sens de variation de la suite $a_n = -2 \times 1{,}5^n$. Justifie.

(b) Donne le sens de variation de la suite $b_n = 4 \times 0{,}7^n$. Justifie.

(c) Pour $c_n = 5 \times (-0{,}4)^n$, calcule c_0, c_1 et c_2. La suite (c_n) est-elle croissante ou décroissante ? Justifie.

(d) Noé affirme : « quand n devient grand, $0{,}9^n$ se rapproche de 0,9 ». A-t-il raison ? Justifie avec le tableau.

Ex. 22 ★★★ **Suite auxiliaire : de la démonstration à la conjecture** — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6 \times u_n + 20$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 50$. Le tableau donne des valeurs de $0{,}6^n$ arrondies à 10^{-4}.

n	5	10	15	20
$0{,}6^n$	0{,}0778	0{,}0060	0{,}0005	0{,}0000

(a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique. Précise sa raison et son premier terme.

(b) Hugo écrit : « $v_0 = 10$, donc $v_n = 10 \times 0{,}6^n$ et $u_n = 10 \times 0{,}6^n - 50$ ». Corrige ses erreurs, puis exprime u_n en fonction de n.

(c) Étudie le sens de variation de (v_n), puis déduis-en celui de (u_n).

(d) À l'aide du tableau, conjecture le comportement de u_n quand n devient grand. Un terme u_n peut-il dépasser 50 ? Justifie.

Ex. 23 ★★★ **Deux raisons possibles** — (u_n) est une suite géométrique de raison q. On sait que $u_1 = -6$ et $u_3 = -54$.

(a) Détermine les valeurs possibles de la raison q.

(b) Pour chaque valeur trouvée, calcule u_0, puis exprime u_n en fonction de n.

(c) On sait en plus que (u_n) est croissante ou décroissante. Détermine q, puis le sens de variation de (u_n). Justifie.

(d) Inès écrit « $u_6 = u_3 \times 3^6$ » et Lou écrit « $u_n = (-6)^n$ ». Explique leurs erreurs, puis calcule u_6.

Ex. 24 ★★★ **Une suite et ses suites associées** — On définit la suite (u_n) par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1{,}2 \times u_{n-1}$.

(a) Calcule u_1 et u_2. Démontre que (u_n) est géométrique, puis donne sa raison et son terme général.

(b) Kenza affirme : « La raison est supérieure à 1, donc (u_n) est croissante. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Pour tout entier naturel n, on pose $t_n = u_n + 5$. La suite (t_n) est-elle géométrique ? Justifie.

(d) Pour tout entier naturel n, on pose $s_n = (-1)^n \times u_n$. Démontre que (s_n) est géométrique, puis étudie son sens de variation.

4. *Somme $1 + q + \ldots + q^n$ et termes consécutifs*

À retenir : $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ($q \neq 1$, $n+1$ termes). Termes consécutifs : premier terme $\times \dfrac{1-q^N}{1-q}$, avec N = dernier indice − premier indice + 1. Ex. : $1 + 2 + 4 + 8 = \frac{1-2^4}{1-2} = 15$. Si $q = 1$: $S = N \times$ premier terme.

Ex. 25 ★☆☆ **Sommes $1 + q + \ldots + q^n$** — Dans chaque calcul, cite la formule utilisée et le nombre de termes.

(a) Combien de termes compte la somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^{12}$?

(b) $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^8$.

(c) $1 + (-2) + (-2)^2 + \cdots + (-2)^7$.

(d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$, sous forme de fraction.

(e) $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^6$, en écrivant d'abord le quotient avec un dénominateur positif.

Ex. 26 ★☆☆ **Termes consécutifs d'une suite géométrique** — (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 2$. (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison 1.

(a) Combien de termes compte la somme $u_2 + u_3 + \cdots + u_9$?

(b) Calcule $u_0 + u_1 + \cdots + u_6$.

(c) Calcule $u_3 + u_4 + \cdots + u_9$.

(d) Calcule u_9, puis $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$. Ces deux nombres sont-ils égaux ? Justifie.

(e) Calcule $v_0 + v_1 + \cdots + v_{14}$.

Ex. 27 ★★☆ **Une somme donnée par ses termes** — On considère $S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 4\,374$, où chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre.

(a) Donne le premier terme et la raison de cette somme géométrique.

(b) Écris $4\,374$ sous la forme 2×3^k, puis déduis-en le nombre de termes de S.

(c) Calcule S.

(d) Lina écrit $S = 2 \times \frac{1-3^7}{1-3} = 2\,186$. Repère son erreur. Quelle somme a-t-elle calculée ?

Ex. 28 ★★☆ **Un programme qui cumule** — (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 4. Ben écrit la fonction suivante.

```
def somme(n):
    u = 6
    S = 0
    for k in range(n + 1):
        S = S + u
        u = 4 * u
    return S
```

(a) Fais tourner à la main `somme(2)` : donne les valeurs successives de `S` et `u`, puis le résultat.

(b) Quelle somme de termes de (u_n) renvoie `somme(n)` ? Combien compte-t-elle de termes ?

(c) Déduis-en, sans programme, la valeur de `somme(5)`.

(d) Malik inverse les lignes 5 et 6. Que renvoie alors `somme(2)` ? Quelle somme de termes est calculée ?

Ex. 29 ★★☆ **Démontrer la formule de la somme** — Soit q un réel et n un entier naturel. On note $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

(a) Écris qS_n sous la forme d'une somme de puissances de q.

(b) Calcule $S_n - qS_n$ et justifie la simplification.

(c) On suppose $q \neq 1$. Déduis-en une expression de S_n et dis où sert l'hypothèse $q \neq 1$.

(d) Pour $q = 1$, Théo écrit $S_n = \frac{1-1^{n+1}}{1-1}$. Explique pourquoi c'est faux, puis donne S_{20} dans ce cas.

(e) Calcule $1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + \cdots + 0{,}9^9$, arrondi au centième.

Ex. 30 ★★★ **Les kilomètres de Mila** — Mila s'entraîne à vélo. La semaine 0, elle parcourt 40 km. Ensuite, sa distance augmente de 10 % chaque semaine. On note u_n la distance (en km) parcourue la semaine n, avec $u_0 = 40$.

(a) Justifie que (u_n) est géométrique. Donne sa raison, puis exprime u_n en fonction de n.

(b) Calcule la distance totale parcourue de la semaine 3 à la semaine 8 incluses. Arrondis au centième.

(c) Nolan calcule ce total avec $40 \times \frac{1-1{,}1^8}{1-1{,}1}$. Repère ses deux erreurs et dis quelle somme il a calculée.

(d) Ben écrit la fonction ci-dessous. Explique ce que contient `S` à la fin de chaque passage dans la boucle, puis ce que renvoie `seuil(A)`.

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 40
    S = 40
    while S < A:
        n = n + 1
        u = 1.1 * u
        S = S + u
    return n
```

(e) Détermine par le calcul la valeur renvoyée par `seuil(1000)` et interprète-la. Cette semaine-là, Mila a-t-elle roulé 1 000 km ? Justifie.

Ex. 31 ★★★ **Le bidon d'Hugo** — Hugo verse 1 L d'eau dans un bidon à la minute 0. Ensuite, à chaque minute, il verse la moitié de ce qu'il a versé la minute précédente. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ le volume (en L) versé de la minute 0 à la minute n.

(a) Combien de termes compte S_n ? Exprime S_n en fonction de n en citant la formule, puis simplifie ton résultat.

(b) Donne la valeur exacte de S_6 sous forme d'une fraction.

(c) Pour tout entier naturel n, calcule $S_{n+1} - S_n$. Déduis-en le sens de variation de la suite (S_n).

(d) Hugo affirme : « En versant assez longtemps, le bidon finira par contenir plus de 2 L. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Détermine par tâtonnement le plus petit entier naturel n tel que $S_n \geqslant 1{,}999$.

Ex. 32 ★★★ **Une somme guidée par une suite auxiliaire** — La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

(a) Démontre que (v_n) est géométrique. Précise sa raison et son premier terme.

(b) Déduis-en v_n, puis u_n, en fonction de n.

(c) Calcule $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

(d) Inès écrit : « $T_n = 5 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$ ». A-t-elle raison ? Justifie à l'aide de T_1.

(e) Déduis-en T_n en fonction de n, puis calcule T_5.

5. *Évolutions à taux constant et intérêts composés*

À retenir : $+t\,\%$: raison $q = 1 + \frac{t}{100}$; $-t\,\%$: $q = 1 - \frac{t}{100}$ ($-4\,\%$: $\times 0{,}96$). Sur n périodes : q^n, ex. $1{,}02^3 \approx 1{,}061$ ($+6{,}1\,\%$, pas $+6\,\%$). Intérêts simples : arithmétique ; intérêts composés : géométrique.

Ex. 33 ★☆☆ **Du pourcentage au coefficient multiplicateur** — Une grandeur évolue d'un pourcentage donné. Réponds à chaque question.

(a) La grandeur augmente de 7 % à chaque période. Donne la raison q de la suite géométrique de ses valeurs.

(b) Tom affirme : « Baisser de 7 %, c'est multiplier par 0,07. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Un article coûte 250 €. Son prix augmente de 0,8 %. Calcule son nouveau prix.

(d) Une grandeur est multipliée par 0,73. Traduis cette évolution en pourcentage.

(e) Une grandeur est multipliée par 1,6. Traduis cette évolution en pourcentage.

(f) Lina affirme qu'un prix peut baisser de 120 %. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 34 ★☆☆ **Vélos en libre-service à Rennes** — À Rennes, 3 200 vélos en libre-service sont proposés en 2026. Ce nombre augmente de 6 % par an. On note v_n le nombre de vélos l'année $2026 + n$.

(a) Donne v_0, puis calcule v_1.

(b) Exprime v_{n+1} en fonction de v_n. Déduis-en la nature de la suite (v_n) et sa raison.

(c) Exprime v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

(d) Malo écrit : « En 2034, il y aura $3\,200 \times 1{,}06^{2034}$ vélos. » Corrige son erreur.

(e) Calcule le nombre de vélos prévu en 2034, arrondi à l'unité.

(f) Calcule le pourcentage de hausse entre 2026 et 2034, arrondi à 0,01 %.

Ex. 35 ★★☆ **Taux successifs : vrai ou faux ?** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul de coefficients multiplicateurs.

(a) « À Lille, un loyer qui augmente de 3 % par an pendant 5 ans augmente de 15 % au total. »

(b) « Deux hausses successives de 10 % équivalent à une hausse de 20 %. »

(c) « Une baisse de 20 % suivie d'une hausse de 20 % ramène au prix de départ. »

(d) « Pour compenser une baisse de 20 %, il faut ensuite une hausse de 25 %. »

Ex. 36 ★★☆ **Intérêts simples ou intérêts composés ?** — Le 1er janvier 2026, Inès place 2 500 €. Offre A : intérêts simples ; chaque année, on ajoute 3,5 % du capital initial. Offre B : intérêts composés à 3,2 % par an. On note a_n et b_n les capitaux (en €) au 1er janvier $2026 + n$.

(a) Démontre que la suite (a_n) est arithmétique. Exprime a_n en fonction de n.

(b) Démontre que la suite (b_n) est géométrique. Exprime b_n en fonction de n.

(c) Calcule a_{10} et b_{10}, au centime près.

(d) Léo arrondit $1{,}032^{10}$ à 1,37 avant de multiplier par 2 500. Quel résultat obtient-il ? Commente.

(e) À l'aide d'un tableau de valeurs, détermine la première année où l'offre B dépasse l'offre A.

Ex. 37 ★★☆ **Quand le capital de Nora aura-t-il doublé ?** — Le 1er janvier 2026, Nora place 1 500 € à intérêts composés, au taux de 2,8 % par an. On note c_n son capital (en €) n années après 2026. Elle veut savoir quand son capital aura doublé.

(a) Exprime c_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

(b) Justifie qu'il existe un rang n à partir duquel $c_n \geqslant 3\,000$.

(c) Voici le programme de Sacha. Repère et corrige ses deux erreurs.

```
def doublement():
    n = 0
    c = 1500
    while c > 3000:
        c = c * 0.028
        n = n + 1
    return n
```

(d) Détermine l'entier renvoyé par le programme corrigé, en le justifiant par le calcul de deux termes de la suite.

(e) Avec des intérêts simples au même taux, combien d'années faudrait-il pour doubler le capital ? Compare.

Ex. 38 ★★★ **Taux mensuel ou taux annuel ?** — Le 1er janvier 2026, à Strasbourg, Yanis place 4 000 €. Offre M : intérêts composés de 0,25 % par mois. Offre A : intérêts composés de 3 % par an. On note m_k le capital (en €) avec l'offre M k mois après le 1er janvier 2026, et a_n le capital avec l'offre A n années après.

(a) Justifie que (m_k) est géométrique. Donne sa raison, puis m_k en fonction de k, pour tout entier naturel k.

(b) Calcule m_{12} au centime près. Yanis affirme : « 0,25 % par mois, c'est 3 % par an ». A-t-il raison ? Justifie.

(c) On pose $b_n = m_{12n}$. Démontre que (b_n) est géométrique et donne sa raison arrondie à 10^{-5}. Compare a_{10} et b_{10}.

(d) Écris une fonction Python `seuil()` qui renvoie le plus petit k tel que $m_k \geqslant 5\,000$. Donne ce rang en années et en mois.

Ex. 39 ★★★ **La cote d'une voiture : modèle linéaire ou exponentiel ?** — En 2026, à Nantes, Hugo achète une voiture 24 000 €. Modèle G : elle perd 15 % de sa valeur chaque année. Modèle L : elle perd 2 000 € chaque année. On note g_n et l_n sa valeur (en €) en 2026 + n selon chaque modèle.

(a) Exprime g_n et l_n en fonction de n, pour tout entier naturel n. Précise la nature de chaque suite et sa raison.

(b) Calcule l_{12} et l_{14}. Le modèle L est-il réaliste sur 14 ans ? Justifie. Le modèle G peut-il donner une valeur nulle ?

(c) Complète le tableau (valeurs arrondies à l'euro), puis donne le plus petit entier n tel que $g_n > l_n$ et l'année correspondante.

n	8	9	10
g_n	…	…	…
l_n	…	…	…

(d) Un vendeur affirme : « En 7 ans, avec le modèle G, la voiture perd $15 \times 7 = 105$ % de sa valeur, donc elle ne vaut plus rien. » A-t-il raison ? Justifie et donne la baisse réelle à 0,1 % près.

Ex. 40 ★★★ **Deux contrats de travail pour Chloé** — À Bordeaux, Chloé hésite entre deux contrats. Son salaire annuel en 2026 est de 28 000 € dans les deux cas. Contrat 1 : +2 % par an. Contrat 2 : +600 € par an. On note s_n et t_n son salaire annuel (en €) en 2026 + n avec les contrats 1 et 2.

(a) Exprime s_n et t_n en fonction de n, pour tout entier naturel n, en précisant la nature de chaque suite.

(b) Calcule la hausse du salaire de 2026 à 2027, puis de 2035 à 2036, avec chaque contrat. Que remarques-tu ?

(c) Écris une fonction Python `premier_rang()` qui renvoie le plus petit $n \geqslant 1$ tel que $s_n > t_n$. Donne ce rang et l'année correspondante.

(d) Calcule, au centime près, le total perçu de 2026 à 2035 inclus avec chaque contrat. Précise le nombre de termes.

Ex. 40 (suite)

(e) Reprends la question précédente de 2026 à 2040 inclus. Quel contrat Chloé doit-elle choisir ? Justifie.

6. *Problèmes de modélisation et de seuil*

À retenir : Seuil : résous $u_0 + nr \geqslant S$ et prends l'entier par excès ($n \geqslant 13{,}2$ donne $n = 14$), puis vérifie sur les deux termes voisins. Montant fixe : arithmétique ; pourcentage fixe : géométrique. Boucle while : condition contraire du seuil.

Ex. 41 ★★★ **Seuils par le calcul** — Pour chaque suite arithmétique, détermine le plus petit entier naturel n qui vérifie l'inégalité. Vérifie avec les deux termes qui encadrent le seuil.

(a) $u_n = 150 + 35n$ et $u_n \geqslant 600$.

(b) $v_n = 84 + 6n$ et $v_n > 132$.

(c) $w_n = 2 + 0{,}5n$ et $w_n \geqslant 9$.

(d) $t_n = 900 - 45n$ et $t_n < 300$.

(e) $a_n = 3{,}5 + 0{,}8n$ et $a_n \geqslant 15$.

(f) $b_n = 47 + 12(n-1)$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et $b_n \geqslant 500$.

Ex. 42 ★★★ **Arithmétique ou géométrique ?** — Pour chaque situation, dis si la suite est arithmétique ou géométrique en justifiant. Donne sa raison et son terme général, puis calcule le terme demandé.

(a) Une plante mesure 18 cm au jour 0 et grandit de 1,5 cm par jour. h_n est sa hauteur au jour n. Calcule h_{20}.

(b) Une ville compte 42 000 habitants en 2026, et sa population augmente de 3 % par an. p_n est la population en 2026 + n. Donne la population en 2034, à l'unité.

(c) Un club d'échecs compte 28 membres en janvier et en accueille 5 nouveaux chaque mois. c_1 est le nombre de membres en janvier. Calcule le nombre de membres en décembre.

(d) Un patient reçoit 80 mg d'un médicament, et la quantité dans le sang baisse de 15 % par heure. m_n est la quantité après n heures. Calcule m_6 au centième.

(e) Une voiture achetée 14 000 € perd 1 100 € de valeur chaque année. v_n est sa valeur après n années. Calcule v_7.

Ex. 43 ★★★ **Les gradins d'une salle de concert** — Les gradins d'une salle de concert de Nantes ont 18 rangées. La 1re rangée compte 24 sièges, et chaque rangée en compte 3 de plus que la précédente. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note s_n le nombre de sièges de la rangée n.

(a) Justifie que la suite (s_n) est arithmétique, puis exprime s_n en fonction de n.

(b) Combien de sièges compte la 18e rangée, la dernière ?

Ex. 43 **(suite)**

(c) Calcule le nombre total de sièges de la salle.

(d) On garde le même motif. Calcule le nombre total de sièges avec 21 rangées, puis avec 22 rangées. Déduis-en le nombre minimal de rangées pour avoir au moins 1 200 sièges.

Ex. 44 ★★☆ **La pépinière et la boucle while** — En 2026, Margaux a 1 500 arbustes dans sa pépinière d'Angers. Chaque année, son stock augmente de 6 %. On note a_n le nombre d'arbustes en $2026 + n$. Pour savoir en quelle année le stock dépassera 3 000 arbustes, un élève écrit :

```
def seuil():
    n = 0
    a = 1500
    while a > 3000:
        n = n + 1
        a = a * 1.06
    return n
```

(a) Justifie que la suite (a_n) est géométrique. Donne sa raison et exprime a_n en fonction de n.

(b) Explique pourquoi ce programme renvoie 0, puis corrige la ligne fautive.

(c) Calcule a_{11} et a_{12} à la calculatrice, à l'unité. Déduis-en ce que renvoie le programme corrigé.

(d) En quelle année le stock dépassera-t-il 3 000 arbustes ?

Ex. 45 ★★☆ **Deux contrats pour Chloé** — Chloé est embauchée à Lille en 2026 et hésite entre deux contrats. Contrat A : 2 400 € par mois en 2026, puis une hausse de 50 € par an. Contrat B : 2 350 € par mois en 2026, puis une hausse de 2 % par an. On note a_n et b_n le salaire mensuel en $2026 + n$ avec chaque contrat.

(a) Pour chaque contrat, dis si la suite est arithmétique ou géométrique en justifiant. Exprime a_n et b_n en fonction de n.

(b) Calcule le salaire mensuel avec chaque contrat en 2031, au centime.

(c) Calcule a_n et b_n pour $n = 12$, 13 et 14, au centime près.

(d) Déduis-en l'année à partir de laquelle le salaire mensuel du contrat B dépasse celui du contrat A.

(e) Chloé affirme : « De 2026 à 2040, la somme des b_n dépasse celle des a_n. » Calcule ces deux sommes. A-t-elle raison ?

Ex. 46 ★★★ **Les carpes d'un étang de Sologne** — En 2026, un étang de Sologne compte 8 000 carpes. Chaque année, 20 % des carpes disparaissent, puis l'association de pêche en réintroduit 600. On note p_n le nombre de carpes en $2026 + n$, donc $p_0 = 8\,000$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = p_n - 3\,000$.

(a) Justifie que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}8\,p_n + 600$. Calcule p_1 et p_2, puis déduis-en que (p_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

Ex. 46 **(suite)**

(b) Démontre que (v_n) est géométrique en précisant sa raison et son premier terme, puis exprime p_n en fonction de n.

(c) Pour obtenir le premier rang n tel que $p_n < S$, Yanis écrit le programme ci-dessous. Explique pourquoi `annee(3500)` ne renvoie pas ce rang, puis corrige le programme.

```
def annee(S):
    n = 1
    p = 8000
    while p >= S:
        n = n + 1
        p = 0.8 * p + 600
    return n
```

(d) Déduis-en l'année où l'étang compte pour la première fois moins de 3 500 carpes. Vérifie avec les deux termes qui encadrent le seuil.

(e) Calcule $0{,}8^{30}$ et p_{30} à la calculatrice. Conjecture le comportement de $0{,}8^n$ quand n devient grand, puis le nombre de carpes à long terme.

Ex. 47 ★★★ **La tirelire de Lucas** — À Bordeaux, Lucas commence à épargner en janvier 2027. Ce mois-là, il verse 30 €, puis chaque mois il verse 6 € de plus que le mois précédent. On note v_n le versement du n-ième mois, donc $v_1 = 30$ (janvier 2027), et T_n le total versé à la fin du n-ième mois.

(a) Noa écrit : « (v_n) est arithmétique de raison 6, donc $v_n = 30 + 6n$ ». Cette affirmation est-elle correcte ? Justifie, puis donne l'expression correcte de v_n.

(b) Détermine par le calcul le premier mois (mois et année) où le versement de Lucas atteint ou dépasse 100 €.

(c) Calcule le total versé à la fin de décembre 2027. Explique pourquoi ce total n'est pas égal à v_{12}.

(d) Exprime T_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(e) Lucas vise 2 000 €. À l'aide d'un tableau de valeurs de T_n, détermine le mois et l'année où son total atteint ce montant pour la première fois.

Ex. 48 ★★★ **Deux plans pour une usine de Dunkerque** — En 2026, une usine de Dunkerque émet 50 000 tonnes de CO_2. Avec le plan A, ses émissions baissent de 4 % par an. On note e_n les émissions (en tonnes) de l'année $2026 + n$ avec le plan A.

(a) Justifie que (e_n) est géométrique. Exprime e_n en fonction de n, puis donne le sens de variation de (e_n).

(b) Soit q un réel différent de 1. Démontre que pour tout entier naturel n, $1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

(c) Déduis-en le total émis de 2026 à 2035 inclus avec le plan A, arrondi à la tonne.

(d) À l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice, détermine la première année où les émissions du plan A passent sous 30 000 t. Vérifie avec deux termes.

Ex. 48 **(suite)**

(e) Avec le plan B, les émissions valent aussi 50 000 t en 2026, puis baissent de 2 000 t par an. Quel plan émet le moins au total de 2026 à 2035 ? Justifie.