1re spécialité / Suites arithmétiques et géométriques — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Suites arithmétiques : reconnaître, terme général, variations*

Ex. 1 ★☆☆ **Terme général et termes de rang donné**

(a) $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = -7 + 4n$ pour tout entier naturel n.

(b) La suite commence à u_0, donc le 10e terme est $u_9 = -7 + 4 \times 9 = 29$.

(c) La suite commence au rang 1 : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 + (n-1)r = 12 - 2{,}5(n-1) = 14{,}5 - 2{,}5n$.

(d) $v_{21} = 14{,}5 - 2{,}5 \times 21 = 14{,}5 - 52{,}5 = -38$.

(e) $w_{25} = w_6 + (25-6) \times 3 = 40 + 57 = 97$.

(f) $w_n = w_6 + (n-6)r = 40 + 3(n-6) = 3n + 22$ pour tout entier naturel n.
Donc $w_0 = 22$.

Ex. 2 ★☆☆ **Sens de variation et nuage de points**

(a) $u_n = 5 + (-0{,}8)n$ est de la forme $u_0 + nr$ avec $r = -0{,}8$. Comme $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

(b) (v_n) est arithmétique de raison $0{,}3 > 0$, donc elle est croissante.

(c) Pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n$: la suite est constante, et $t_n = 6$ pour tout n.

(d) $a_0 = -2$ et $a_1 = 0{,}5$, donc $r = a_1 - a_0 = 2{,}5$.

(e) $a_n = -2 + 2{,}5n$: les points sont sur la droite d'équation $y = 2{,}5x - 2$.

(f) Non. La suite n'est définie que pour des entiers n. Il n'y a aucun terme entre deux rangs, donc on ne relie pas les points.

Ex. 3 ★★☆ **Arithmétique ou non ?**

(a) Pour tout entier naturel n, $t_n = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 = 12n + 9$.
Donc $t_{n+1} - t_n = 12(n+1) + 9 - 12n - 9 = 12$, qui ne dépend pas de n. (t_n) est arithmétique de raison 12.

(b) $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 13$. $u_1 - u_0 = 3$ mais $u_2 - u_1 = 9$: la différence n'est pas constante, donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Ex. 3 (suite)

(c) $v_1 = 2 + 0 = 2$, $v_2 = 2 + 1 = 3$ et $v_3 = 3 + 2 = 5$. $v_1 - v_0 = 0$ mais $v_2 - v_1 = 1$: on ajoute n, qui change à chaque rang.
Donc (v_n) n'est pas arithmétique.

(d) Non : trois termes ne prouvent rien. $w_3 = 27 - 27 + 12 + 1 = 13$, donc $w_3 - w_2 = 8$, alors que $w_1 - w_0 = 2$. (w_n) n'est pas arithmétique.

Ex. 4 ★★☆ **Retrouver une suite à partir de deux termes**

(a) $u_{12} = u_5 + (12-5)r$: il faut diviser par l'écart des indices, 7, et non par 12.
Donc $r = \frac{-4-31}{7} = \frac{-35}{7} = -5$.

(b) $u_0 = u_5 - 5r = 31 + 25 = 56$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 56 - 5n$.

(c) La raison $r = -5$ est négative, donc la suite (u_n) est décroissante.

(d) $56 - 5n = -139 \iff 5n = 195 \iff n = 39$, qui est entier : $-139 = u_{39}$. Par contre, $56 - 5n = -150 \iff n = \frac{206}{5}$, qui n'est pas entier : -150 n'est pas un terme de la suite.

Ex. 5 ★★☆ **Les rangs d'une salle de spectacle**

(a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $s_{n+1} = s_n + 3$: (s_n) est arithmétique de raison 3, de premier terme $s_1 = 18$.

(b) La suite commence au rang 1 : de s_1 à s_n, il y a $n - 1$ passages.
Donc $s_n = 18 + 3(n-1) = 15 + 3n$.

(c) $s_{25} = 15 + 3 \times 25 = 90$: le 25e rang compte 90 sièges.

(d) $15 + 3n = 63 \iff 3n = 48 \iff n = 16$: c'est le 16e rang.

(e) $15 + 3n > 100 \iff n > \frac{85}{3} \approx 28{,}3$. On a $s_{28} = 99$ et $s_{29} = 102$: c'est le 29e rang.

Ex. 6 ★★★ **Démontrer le terme général et l'utiliser**

(a) Pour tout entier naturel k, $u_{k+1} - u_k = r$. On écrit cette égalité pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$: $u_1 - u_0 = r$, $u_2 - u_1 = r$, …, $u_n - u_{n-1} = r$. On additionne ces n égalités. À gauche, chaque terme intermédiaire apparaît une fois avec $+$ et une fois avec $-$: il reste $u_n - u_0$. À droite, on obtient nr.
Donc $u_n = u_0 + nr$. L'égalité est aussi vraie pour $n = 0$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) D'après la question précédente, $u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = nr - pr = (n-p)r$. Donc, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

(c) Pour tout entier naturel n, d'après la question précédente : $v_{n+1} - v_n = u_{3n+4} - u_{3n+1} = \big((3n+4) - (3n+1)\big)r = 3r$. Cette différence ne dépend pas de n. Donc (v_n) est arithmétique de raison $3r$, et $v_0 = u_1 = u_0 + r$.

(d) $v_5 = u_{3\times5+1} = u_{16}$. Or $u_{16} = u_2 + (16-2)r$, donc $79 = 9 + 14r$, d'où $14r = 70$ et $r = 5$. Puis $u_0 = u_2 - 2r = 9 - 10 = -1$. On vérifie : $u_{16} = -1 + 16 \times 5 = 79$.

(e) Faux. Le calcul $p_{n+1} - p_n = 2(n+1)^2 - (n+1) - 2n^2 + n = 4n + 1$ est juste. Mais une raison est un nombre constant, et $4n+1$ dépend de n. Contre-exemple : $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 6$, donc $p_1 - p_0 = 1$ et $p_2 - p_1 = 5$. Ces différences ne sont pas égales : (p_n) n'est pas arithmétique.

Ex. 7 ★★★ **La citerne pendant la sécheresse**

(a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_n - 35$: (a_n) est arithmétique de raison $r = -35$ et de premier terme $a_1 = 2\,450$. La suite commence au rang 1, donc $a_n = a_1 + (n-1)r = 2\,450 - 35(n-1) = 2\,485 - 35n$.

(b) $a_{30} = 2\,485 - 35 \times 30 = 2\,485 - 1\,050 = 1\,435$. Le 30e jour, la citerne contient 1 435 L. La raison $r = -35$ est négative, donc (a_n) est strictement décroissante.

(c) $a_{47} = a_{12} + (47-12)r$, donc $a_{47} - a_{12} = 35 \times (-35) = -1\,225$. Entre le matin du 12e jour et celui du 47e jour, la citerne perd 1 225 L.

(d) $2\,485 - 35n < 300 \iff 35n > 2\,185 \iff n > \frac{2\,185}{35} \approx 62{,}43$. On vérifie : $a_{62} = 315$ et $a_{63} = 280$. Le volume passe sous 300 L à partir du 63e jour.

(e) $b_2 = b_1 - 1 = 2\,449$, $b_3 = b_2 - 2 = 2\,447$, $b_4 = b_3 - 3 = 2\,444$. Alors $b_2 - b_1 = -1$ et $b_3 - b_2 = -2$. Ces différences ne sont pas égales, donc (b_n) n'est pas arithmétique. On ajoute $-n$, qui dépend de n : ce n'est pas une raison.

Ex. 8 ★★★ **Tableau, droite et suite à paramètre**

(a) $u_7 = u_3 + (7-3)r$, donc $8 = -4 + 4r$: $r = \frac{8-(-4)}{7-3} = 3$. On divise l'écart des valeurs par l'écart des indices. Puis $u_0 = u_3 - 3r = -4 - 9 = -13$. Enfin $u_{10} = u_7 + 3r = 8 + 9 = 17$.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Non. La suite commence à u_0 : le 1er terme est u_0, donc le 10e terme est u_9, et non u_{10}. Avec $u_n = -13 + 3n$, le 10e terme est $u_9 = -13 + 27 = 14$.

(c) Pour tout entier naturel n, $u_n = -13 + 3n = f(n)$ avec $f(x) = 3x - 13$, qui est affine. Les points $(n\,;u_n)$ sont donc alignés sur la droite d'équation $y = 3x - 13$. On les représente comme des points isolés, sans les relier.

(d) Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = (5-2m)(n+1) + m - (5-2m)n - m = 5 - 2m$. Cette différence ne dépend pas de n : (w_n) est arithmétique de raison $5-2m$. Si $m < \frac{5}{2}$, la raison est positive et (w_n) est croissante. Si $m = \frac{5}{2}$, la raison est nulle et (w_n) est constante, égale à $\frac{5}{2}$. Si $m > \frac{5}{2}$, la raison est négative et (w_n) est décroissante.

(e) $u_4 = -13 + 3 \times 4 = -1$ et $w_4 = 4(5-2m) + m = 20 - 7m$.
Donc $20 - 7m = -1 \iff 7m = 21 \iff m = 3$. Alors la raison vaut $5 - 2 \times 3 = -1 < 0$: (w_n), avec $w_n = 3 - n$, est décroissante.

2. *Somme de termes d'une suite arithmétique*

Ex. 9 ★☆☆ **Sommes d'entiers et de termes consécutifs**

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ avec $n = 60$: $S = \frac{60\times61}{2} = 1\,830$.

(b) Ce sont les nombres $2k$ pour k allant de 1 à 65 : 65 termes. $S = 65 \times \frac{2+130}{2} = 65 \times 66 = 4\,290$.

(c) Ce sont les nombres $2k+1$; $2k+1 = 11 \iff k = 5$ et $2k+1 = 99 \iff k = 49$, donc k va de 5 à 49 : $49 - 5 + 1 = 45$ termes. $S = 45 \times \frac{11+99}{2} = 45 \times 55 = 2\,475$.

(d) De u_0 à u_{24} : $24 - 0 + 1 = 25$ termes (pas 24).

(e) $u_{24} = u_0 + 24r = 5 + 24 \times 3 = 77$. Puis $S = 25 \times \frac{5+77}{2} = 25 \times 41 = 1\,025$. La somme (1 025) n'est pas le dernier terme (77).

(f) $u_{10} = 5 + 10 \times 3 = 35$; de u_{10} à u_{24} : $24 - 10 + 1 = 15$ termes. $S = 15 \times \frac{35+77}{2} = 15 \times 56 = 840$.

Ex. 10 ★☆☆ **Une somme qui devient négative**

(a) $r = 44 - 50 = -6$ (et $38 - 44 = -6$).

(b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 50 - 6n$. $50 - 6k = -58 \iff 6k = 108 \iff k = 18$.

(c) La somme va de u_0 à u_{18} : $18 - 0 + 1 = 19$ termes.

(d) $S = 19 \times \frac{50+(-58)}{2} = 19 \times (-4) = -76$. La somme est négative, bien que le premier terme soit positif.

Ex. 11 ★★☆ **Les multiples de 7 entre 100 et 300**

(a) $7 \times 14 = 98 < 100$ et $7 \times 15 = 105$: le plus petit est $105 = u_{15}$. $7 \times 42 = 294$ et $7 \times 43 = 301 > 300$: le plus grand est $294 = u_{42}$.

(b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 7(n+1) - 7n = 7$: (u_n) est arithmétique de raison 7. De u_{15} à u_{42}, il y a $42 - 15 + 1 = 28$ termes : il y a 28 multiples de 7 entre 100 et 300.

(c) $S = 105 + 112 + \cdots + 287 + 294$ et $S = 294 + 287 + \cdots + 112 + 105$. Quand on avance d'une colonne, le terme du haut augmente de 7 et celui du bas diminue de 7 : chaque colonne vaut $105 + 294 = 399$.

(d) Il y a 28 colonnes valant 399 : $2S = 28 \times 399 = 11\,172$, donc $S = \frac{11\,172}{2} = 5\,586$. La somme des multiples de 7 compris entre 100 et 300 vaut 5 586.

Ex. 12 ★★☆ **Quatre élèves, quatre erreurs**

(a) Le calcul de $u_{20} = 31$ est juste, mais de u_0 à u_{20} il y a $20 - 0 + 1 = 21$ termes, pas 20.

(b) $S = 21 \times \frac{-9+31}{2} = 21 \times 11 = 231$.

(c) Non : $31 = u_0 + 20r$ est le terme u_{20}, c'est-à-dire le dernier terme, pas la somme des 21 termes. La somme vaut 231.

(d) $u_1 = -9 + 2 = -7$. La somme commence à u_1 : de u_1 à u_{20}, il y a $20 - 1 + 1 = 20$ termes. $u_1 + \cdots + u_{20} = 20 \times \frac{-7+31}{2} = 20 \times 12 = 240$.

(e) Non : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, et non $\frac{n(n-1)}{2}$.
Donc $1 + 2 + \cdots + 40 = \frac{40 \times 41}{2} = 820$.

Ex. 13 ★★☆ **Corriger un programme de somme**

(a) $u_0 = 12$, $u_1 = 9$, $u_2 = 6$, donc $u_0 + u_1 + u_2 = 27$.

(b) $k = 0$: `S` vaut 0, `u` vaut 9, `S` vaut 9 ; $k = 1$: `S` vaut 0, `u` vaut 6, `S` vaut 6. `somme(2)` renvoie 6 et non 27 : `S` est remis à 0 à chaque tour, u_0 n'est jamais ajouté et la boucle ne fait que 2 tours au lieu de 3.

Ex. 13 (suite)

(c) `S = 0` se place avant la boucle ; on ajoute `u` à `S` avant de passer au terme suivant ; `range(n + 1)` fait $n + 1$ tours, un par terme de u_0 à u_n :

```
def somme(n):
    S = 0
    u = 12
    for k in range(n + 1):
        S = S + u
        u = u - 3
    return S
```

(d) Pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 3n$, donc $u_{30} = 12 - 90 = -78$. De u_0 à u_{30} : 31 termes. $S = 31 \times \frac{12+(-78)}{2} = 31 \times (-33) = -1\,023$.

Ex. 14 ★★★ **De Gauss aux entiers impairs**

(a) Notons $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$. On écrit aussi $S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$. On additionne terme à terme : chaque colonne $1 + n$, $2 + (n-1)$, …, $n + 1$ vaut $n + 1$, et il y a n colonnes.
Donc $2S = n(n+1)$, d'où $S = \frac{n(n+1)}{2}$ (et pas $\frac{n(n-1)}{2}$).

(b) $P_n = 2 \times 1 + 2 \times 2 + \cdots + 2 \times n = 2(1 + 2 + \cdots + n) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$.
Donc $P_n = n(n+1)$.

(c) Les termes de I_n sont les $v_k = 2k - 1$ pour k allant de 1 à n : (v_k) est arithmétique de raison 2, et de v_1 à v_n il y a $n - 1 + 1 = n$ termes.
Donc $I_n = n \times \frac{1+(2n-1)}{2} = n \times \frac{2n}{2}$, soit $I_n = n^2$.

(d) Je cherche d'abord le rang du dernier terme : $2n - 1 = 151 \iff n = 76$. La somme vaut I_{76} : elle compte 76 termes, et $I_{76} = 76^2 = 5\,776$.

(e) $P_n = n(n+1)$ augmente quand n augmente. On teste : $P_{31} = 31 \times 32 = 992 \leqslant 1\,000$ et $P_{32} = 32 \times 33 = 1\,056 > 1\,000$. Le plus grand entier cherché est donc $n = 31$.

Ex. 15 ★★★ **Les gradins du théâtre de Vaison**

(a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + 3$: (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 24$.
Donc $u_n = u_1 + (n-1)r = 24 + 3(n-1)$, soit $u_n = 3n + 21$.

(b) $u_{15} = 3 \times 15 + 21 = 66$: c'est le nombre de places du 15e rang seulement. De u_1 à u_{15} il y a 15 termes, donc $S_{15} = 15 \times \frac{24+66}{2} = 675$. Ilyès a tort : avec 15 rangs, le théâtre compte 675 places.

Ex. 15 **(suite)**

(c) De u_1 à u_n il y a n termes : $S_n = n \times \frac{24+3n+21}{2} = \frac{n(3n+45)}{2}$. S_n augmente avec n ; $S_{24} = \frac{24\times117}{2} = 1\,404 < 1\,500$ et $S_{25} = \frac{25\times120}{2} = 1\,500$. Il faut au minimum 25 rangs.

(d) À chaque passage dans la boucle, on passe au rang suivant : `u` contient le nombre de places du rang `n` et `S` le total S_n des places des rangs 1 à `n`. La boucle s'arrête au premier `n` tel que $S_n \geqslant 1\,500$: `rangs(1500)` renvoie 25.

(e) On ajoute alors l'ancienne valeur de `u` : le rang 1 est compté deux fois et le rang `n` pas encore, donc `S` vaut $24 + S_{n-1}$. On a $24 + S_{24} = 1\,428 < 1\,500$ et $24 + S_{25} = 1\,524 \geqslant 1\,500$: la fonction renvoie 26, ce qui est faux. L'ordre des instructions compte.

Ex. 16 ★★★ **Deux start-up qui sortent du rouge**

(a) (u_n) est arithmétique de raison $r = 600$ et de premier terme $u_1 = -4\,800$, donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = -4\,800 + 600(n-1)$. $u_n > 0 \iff 600(n-1) > 4\,800 \iff n > 9$. Comme $u_9 = 0$ et $u_{10} = 600$, le premier mois bénéficiaire est le 10e mois.

(b) $u_{12} = -4\,800 + 600 \times 11 = 1\,800$. De u_1 à u_{12} il y a 12 termes : $S_{12} = 12 \times \frac{-4\,800+1\,800}{2} = -18\,000$. Le cumul est négatif : sur la première année, la start-up a perdu 18 000 €.

(c) De u_1 à u_n il y a n termes et $u_n = 600n - 5\,400$: $S_n = n \times \frac{-4\,800+600n-5\,400}{2} = n \times \frac{600n-10\,200}{2}$, soit $S_n = 300n(n-17)$.

(d) Pour $n \geqslant 1$, $300n > 0$, donc S_n a le signe de $n - 17$: $S_n < 0$ pour $n < 17$, $S_{17} = 0$ et $S_n > 0$ pour $n \geqslant 18$. Le résultat cumulé devient strictement positif à partir du 18e mois ($S_{18} = 5\,400$).

(e) Maëlys : $S_{24} = 300 \times 24 \times 7 = 50\,400$. Autre start-up : $v_n = -3\,000 + 400(n-1)$, $v_{24} = -3\,000 + 400 \times 23 = 6\,200$, et sur 24 termes, $T_{24} = 24 \times \frac{-3\,000+6\,200}{2} = 38\,400$. Sur 24 mois, la start-up de Maëlys a le meilleur cumul.

3. *Suites géométriques : reconnaître, terme général, variations*

Ex. 17 ★☆☆ **Terme général et calcul direct**

(a) Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times 3^n$. Donc $u_5 = 4 \times 3^5 = 4 \times 243 = 972$.

(b) La suite commence à v_1 : $v_6 = v_1 \times q^{6-1} = 3 \times (-2)^5 = 3 \times (-32) = -96$ (parenthèses obligatoires).

Ex. 17 **(suite)**

(c) $w_9 = w_4 \times q^{9-4} = 7 \times 2^5 = 7 \times 32 = 224$: l'écart des indices est 5.

(d) Pour tout $n \geqslant 1$, $t_n = 1{,}1 \times t_{n-1}$: chaque terme est le précédent multiplié par 1,1, donc la raison est 1,1. $t_3 = 50 \times 1{,}1^3 = 50 \times 1{,}331 = 66{,}55$.

(e) $a_3 = a_0 \times q^3 = 2 \times 125 = 250$. Or $(2 \times 5)^3 = 1\,000$ et $2 + 5^3 = 127$: ces deux écritures sont fausses, seul q est élevé à la puissance 3.

Ex. 18 ★★☆ **Retrouver la raison à partir de deux termes**

(a) $u_6 = u_3 \times q^3$, donc $q^3 = \frac{40}{5} = 8$ et $q = 2$. Puis $u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

(b) $u_3 = u_1 \times q^2$, donc $q^2 = \frac{28}{7} = 4$: $q = 2$ ou $q = -2$. Comme $q < 0$, $q = -2$. Puis $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{7}{-2} = -3{,}5$.

(c) $u_2 = u_0 \times q^2$, donc $q^2 = \frac{810}{1\,000} = 0{,}81$: $q = 0{,}9$ ou $q = -0{,}9$. Les termes sont positifs, donc $q = 0{,}9$. $u_5 = 1\,000 \times 0{,}9^5 = 590{,}49$.

(d) $u_8 = u_5 \times q^3$, donc $q^3 = \frac{-6}{48} = -\frac{1}{8}$ et $q = -\frac{1}{2}$. Puis $u_{10} = u_8 \times q^2 = -6 \times \frac{1}{4} = -1{,}5$.

Ex. 19 ★★☆ **Géométrique ou pas ?**

(a) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 5 \times 2^{n+2} = 2 \times (5 \times 2^{n+1}) = 2 \times u_n$.
Donc (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 5 \times 2^1 = 10$ (et non 5).

(b) $v_0 = 2$, $v_1 = 4$, $v_2 = 10$. Or $\frac{v_1}{v_0} = 2$ et $\frac{v_2}{v_1} = 2{,}5$: le quotient n'est pas constant.
Donc (v_n) n'est pas géométrique.

(c) Pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = \frac{7}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \times \frac{7}{4^n} = 0{,}25 \times w_n$.
Donc (w_n) est géométrique de raison 0,25 et de premier terme $w_0 = 7$.

(d) Non : $t_0 = 0$, donc on ne peut pas diviser par t_0. Si (t_n) était géométrique, on aurait $t_1 = q \times t_0 = 0$. Or $t_1 = 3$.
Donc (t_n) n'est pas géométrique.

Ex. 20 ★★☆ **Avec une suite auxiliaire**

(a) $u_1 = 0{,}8 \times 20 + 10 = 26$ et $u_2 = 0{,}8 \times 26 + 10 = 30{,}8$. Or $\frac{u_1}{u_0} = 1{,}3$ et $\frac{u_2}{u_1} \approx 1{,}18$: le quotient n'est pas constant, donc (u_n) n'est pas géométrique.

Ex. 20 **(suite)**

(b) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 0{,}8\,u_n + 10 - 50 = 0{,}8\,u_n - 40 = 0{,}8\,(u_n - 50) = 0{,}8 \times v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison 0,8, et $v_0 = u_0 - 50 = -30$
(pas 20).

(c) Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = -30 \times 0{,}8^n$.
Comme $u_n = v_n + 50$, on obtient $u_n = 50 - 30 \times 0{,}8^n$.

(d) $u_{10} = 50 - 30 \times 0{,}8^{10} \approx 46{,}78$.

Ex. 21 ★★☆ **Sens de variation et comportement de q^n**

(a) Pour tout entier naturel n : $a_{n+1} - a_n = a_n \times (1{,}5 - 1) = -2 \times 1{,}5^n \times 0{,}5 = -1{,}5^n < 0$.
Donc (a_n) est décroissante : $q > 1$ mais $a_0 = -2 < 0$.

(b) Pour tout entier naturel n : $b_{n+1} - b_n = b_n \times (0{,}7 - 1) = -1{,}2 \times 0{,}7^n < 0$.
Donc (b_n) est décroissante
($0 < q < 1$ et $b_0 > 0$).

(c) $c_0 = 5$, $c_1 = -2$, $c_2 = 0{,}8$. On a $c_1 < c_0$ mais $c_2 > c_1$: la suite n'est ni croissante ni décroissante, car $q < 0$ fait alterner le signe des termes.

(d) Non : les valeurs diminuent (0,3487, puis 0,1216, puis 0,0424, puis 0,0018). On conjecture que $0{,}9^n$ devient aussi proche de 0 que l'on veut, et non de 0,9 : chaque multiplication par 0,9 fait diminuer le nombre.

Ex. 22 ★★★ **Suite auxiliaire : de la démonstration à la conjecture**

(a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 0{,}6 \times u_n + 20 - 50 = 0{,}6 \times u_n - 30 = 0{,}6 \times (u_n - 50) = 0{,}6 \times v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 10 - 50 = -40$.

(b) Hugo a oublié le -50 : $v_0 = u_0 - 50 = -40$. Donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -40 \times 0{,}6^n$.
Ensuite, $v_n = u_n - 50$ donne $u_n = v_n + 50$, et non $v_n - 50$. Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = 50 - 40 \times 0{,}6^n$
(vérification : $u_0 = 50 - 40 = 10$).

(c) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -40 \times 0{,}6^{n+1} + 40 \times 0{,}6^n = 40 \times 0{,}6^n \times (1 - 0{,}6) = 16 \times 0{,}6^n > 0$.
Donc (v_n) est croissante : la raison est comprise entre 0 et 1, mais le premier terme est négatif. Comme $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n > 0$, la suite (u_n) est aussi croissante.

Ex. 22 **(suite)**

(d) D'après le tableau, $0{,}6^n$ devient très proche de 0 quand n devient grand. « 0,0000 » n'est qu'un arrondi : on a toujours $0{,}6^n > 0$. On conjecture donc que $40 \times 0{,}6^n$ devient proche de 0 et que u_n devient proche de 50.
Mais pour tout entier naturel n, $40 \times 0{,}6^n > 0$, donc $u_n = 50 - 40 \times 0{,}6^n < 50$: aucun terme ne dépasse 50.

Ex. 23 ★★★ **Deux raisons possibles**

(a) $u_3 = u_1 \times q^{3-1} = u_1 \times q^2$, donc $q^2 = \frac{-54}{-6} = 9$. L'écart des indices est pair : l'équation a deux solutions, $q = 3$ ou $q = -3$.

(b) Si $q = 3$: $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{-6}{3} = -2$, et pour tout entier naturel n, $u_n = -2 \times 3^n$. Si $q = -3$: $u_0 = \frac{-6}{-3} = 2$, et pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times (-3)^n$.

(c) Avec $q = -3$: $u_0 = 2$, $u_1 = -6$ et $u_2 = 18$. La suite diminue puis augmente : elle n'est ni croissante ni décroissante.
Donc $q = 3$ et $u_n = -2 \times 3^n$. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -2 \times 3^n \times (3 - 1) = -4 \times 3^n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante : la raison est supérieure à 1, mais le premier terme est négatif.

(d) Inès : de u_3 à u_6, on multiplie 3 fois par q. L'exposant est l'écart des indices $6 - 3 = 3$, et non 6. Lou : avec $(-6)^n$, on aurait $u_0 = 1$ et $u_3 = (-6)^3 = -216 \neq -54$. Lou a élevé $u_0 \times q$ à la puissance n ; la bonne formule est $u_n = u_0 \times q^n = -2 \times 3^n$. Ainsi $u_6 = u_3 \times 3^3 = -54 \times 27 = -1\,458$.

Ex. 24 ★★★ **Une suite et ses suites associées**

(a) $u_1 = 1{,}2 \times u_0 = -6$ et $u_2 = 1{,}2 \times u_1 = -7{,}2$. La relation est vraie pour tout $n \geqslant 1$. Pour tout entier naturel n, on a $n + 1 \geqslant 1$: en remplaçant n par $n + 1$, on obtient $u_{n+1} = 1{,}2 \times u_n$ pour tout entier naturel n.
Donc (u_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme $u_0 = -5$. Pour tout entier naturel n, $u_n = -5 \times 1{,}2^n$.

(b) Non. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -5 \times 1{,}2^n \times (1{,}2 - 1) = -1{,}2^n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante : la raison est supérieure à 1, mais le premier terme est négatif.

(c) $t_0 = -5 + 5 = 0$ et $t_1 = -6 + 5 = -1$. On ne peut pas calculer $\frac{t_1}{t_0}$, car $t_0 = 0$. Raisonnons autrement : si (t_n) était géométrique de raison q, on aurait $t_1 = q \times t_0 = 0$.
Or $t_1 = -1 \neq 0$.
Donc (t_n) n'est pas géométrique.

Ex. 24 (suite)

(d) Pour tout entier naturel n : $s_{n+1} = (-1)^{n+1} \times u_{n+1} = (-1) \times (-1)^n \times 1{,}2 \times u_n = -1{,}2 \times s_n$.
Donc (s_n) est géométrique de raison $-1{,}2$ et de premier terme $s_0 = u_0 = -5$. On a $s_0 = -5$, $s_1 = 6$ et $s_2 = -7{,}2$:
Donc $s_1 > s_0$ mais $s_2 < s_1$. La raison est négative : (s_n) n'est ni croissante ni décroissante.

4. *Somme $1 + q + \ldots + q^n$ et termes consécutifs*

Ex. 25 ★☆☆ Sommes $1 + q + \ldots + q^n$

(a) Les exposants vont de 0 à 12, donc il y a $12 - 0 + 1 = 13$ termes.

(b) Ici $q = 3 \neq 1$ et il y a 9 termes : $S = \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{3^9-1}{2} = \frac{19\,682}{2} = 9\,841$.

(c) Ici $q = -2 \neq 1$ et il y a 8 termes : $S = \frac{1-(-2)^8}{1-(-2)} = \frac{1-256}{3} = -85$.

(d) Ici $q = \frac{1}{2}$ et il y a 11 termes : $S = \frac{1-(1/2)^{11}}{1-1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2\,048}\right) = 2 - \frac{1}{1\,024} = \frac{2\,047}{1\,024}$.

(e) Il y a 7 termes : $\frac{1-5^7}{1-5} = \frac{5^7-1}{5-1}$ (on multiplie haut et bas par -1), donc $S = \frac{78\,125-1}{4} = 19\,531$.

Ex. 26 ★☆☆ Termes consécutifs d'une suite géométrique

(a) De u_2 à u_9 : $9 - 2 + 1 = 8$ termes.

(b) 7 termes, premier terme $u_0 = 7$: $S = 7 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 7 \times 127 = 889$.

(c) Le premier terme est $u_3 = 7 \times 2^3 = 56$ (et non u_0), et il y a $9 - 3 + 1 = 7$ termes : $S = 56 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 56 \times 127 = 7\,112$.

(d) $u_9 = 7 \times 2^9 = 3\,584$ et $u_0 + \cdots + u_9 = 7 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 7 \times 1\,023 = 7\,161$. Non : la somme n'est pas le dernier terme, elle vaut presque le double de u_9.

(e) $q = 1$: la formule est interdite (division par 0). Tous les termes valent 6 et il y en a 15, donc $S = 15 \times 6 = 90$.

Ex. 27 ★★☆ Une somme donnée par ses termes

(a) Le premier terme est 2. On a $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = 3$: la raison est $q = 3$.

(b) $4\,374 = 2 \times 2\,187 = 2 \times 3^7$. Les termes sont les 2×3^k pour k allant de 0 à 7 : il y a $7 - 0 + 1 = 8$ termes.

(c) $S = 2 \times \frac{1-3^8}{1-3} = 2 \times \frac{-6\,560}{-2} = 6\,560$.
Donc $S = 6\,560$.

Ex. 27 (suite)

(d) Lina a pris pour exposant le dernier exposant 7 au lieu du nombre de termes 8. Elle a calculé $2 + 6 + \cdots + 1\,458$, qui ne compte que 7 termes : il manque le dernier terme. On retrouve bien $2\,186 + 4\,374 = 6\,560$.

Ex. 28 ★★☆ Un programme qui cumule

(a) $k = 0$: $S = 6$, $u = 24$; $k = 1$: $S = 30$, $u = 96$; $k = 2$: $S = 126$, $u = 384$. La fonction renvoie 126.

(b) La boucle ajoute u_0, puis u_1, …, puis u_n : `somme(n)` renvoie $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, qui compte $n + 1$ termes.

(c) $u_0 + \cdots + u_5$ compte 6 termes : $6 \times \frac{1-4^6}{1-4} = 6 \times \frac{4\,095}{3} = 8\,190$.
Donc `somme(5)` renvoie 8 190.

(d) u est multiplié avant d'être ajouté : $S = 24$, puis 120, puis 504. On calcule $u_1 + u_2 + u_3 = 24 \times \frac{1-4^3}{1-4} = 504$: u_0 est oublié et on va un terme trop loin.

Ex. 29 ★★☆ Démontrer la formule de la somme

(a) $qS_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$.

(b) $S_n - qS_n = (1 + q + \cdots + q^n) - (q + \cdots + q^{n+1})$. Les termes de q à q^n apparaissent dans les deux sommes et disparaissent, donc $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$.

(c) $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, on a $1 - q \neq 0$ et on peut diviser : $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. L'hypothèse permet la division.

(d) Le dénominateur $1 - 1$ vaut 0 : on ne peut pas diviser. Si $q = 1$, tous les termes valent 1, donc $S_n = n + 1$ et $S_{20} = 21$.

(e) Ici $q = 0{,}9$ et il y a 10 termes : $S = \frac{1-0{,}9^{10}}{1-0{,}9} = 10\,(1 - 0{,}9^{10}) \approx 6{,}51$.

Ex. 30 ★★★ Les kilomètres de Mila

(a) Augmenter de 10 %, c'est multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$. Pour tout entier naturel n, on a donc $u_{n+1} = 1{,}1 \times u_n$. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}1$ et de premier terme $u_0 = 40$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 40 \times 1{,}1^n$.

(b) On cherche $u_3 + u_4 + \cdots + u_8$. Le premier terme est $u_3 = 40 \times 1{,}1^3 = 53{,}24$. Le nombre de termes vaut $8 - 3 + 1 = 6$.
Donc $S = 53{,}24 \times \frac{1-1{,}1^6}{1-1{,}1} = 53{,}24 \times 7{,}71561 \approx 410{,}78$.
De la semaine 3 à la semaine 8, Mila a parcouru environ 410,78 km.

Ex. 30 **(suite)**

(c) Première erreur : Nolan prend $u_0 = 40$ comme premier terme, alors que la somme commence à $u_3 = 53{,}24$. Seconde erreur : il met l'exposant 8 (le dernier indice) au lieu de 6 (le nombre de termes). Il a calculé $u_0 + u_1 + \cdots + u_7$, qui compte 8 termes : $40 \times \frac{1-1{,}1^8}{1-1{,}1} \approx 457{,}44$ km.

(d) Au départ, `S` contient u_0 et `n` vaut 0. À chaque tour, `n` augmente de 1, `u = 1.1 * u` calcule u_n, puis `S = S + u` ajoute ce terme. À la fin de chaque passage, `S` vaut donc $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. La boucle s'arrête dès que cette somme atteint A : la fonction renvoie le plus petit entier n tel que $u_0 + \cdots + u_n \geqslant A$.

(e) La somme $u_0 + \cdots + u_N$ compte $N + 1$ termes, donc elle vaut $40 \times \frac{1-1{,}1^{N+1}}{1-1{,}1} = 400\,(1{,}1^{N+1} - 1)$. On procède par tâtonnement. Pour $N = 12$: $400\,(1{,}1^{13} - 1) \approx 980{,}91 < 1\,000$. Pour $N = 13$: $400\,(1{,}1^{14} - 1) \approx 1\,119{,}00 \geqslant 1\,000$. La fonction renvoie donc 13 : c'est à la fin de la semaine 13 que le total parcouru dépasse 1 000 km pour la première fois. Non, Mila n'a pas roulé 1 000 km cette semaine-là. Le nombre 1 000 est un total cumulé. La semaine 13, elle a parcouru $u_{13} = 40 \times 1{,}1^{13} \approx 138{,}09$ km.

Ex. 31 ★★★ **Le bidon d'Hugo**

(a) S_n contient les puissances de $\frac{1}{2}$ d'exposant 0 à n. Elle compte donc $n + 1$ termes. Comme $q = \frac{1}{2} \neq 1$, on a $S_n = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. Or $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc, pour tout entier naturel n, $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(b) On remplace n par 6 : $S_6 = 2 - \frac{1}{2^6} = 2 - \frac{1}{64} = \frac{127}{64}$. Cette somme compte 7 termes.

(c) Pour tout entier naturel n, $S_{n+1} - S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(2 - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. C'est le volume versé à la minute $n + 1$. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$, on a $S_{n+1} > S_n$: la suite (S_n) est strictement croissante.

(d) Faux. Pour tout entier naturel n, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, donc $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$. Le bidon contient toujours strictement moins de 2 L. Ce volume se rapproche de 2 L, mais il ne dépasse jamais 2 L.

(e) On a $S_n \geqslant 1{,}999$ si et seulement si $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 0{,}001$, c'est-à-dire $2^n \geqslant 1\,000$. On teste : $2^9 = 512 < 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 \geqslant 1\,000$. Le plus petit entier cherché est donc $n = 10$. On vérifie : $S_{10} = \frac{2\,047}{1\,024} \approx 1{,}99902$.

Ex. 32 ★★★ **Une somme guidée par une suite auxiliaire**

(a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3\,(u_n - 2) = 3v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 3$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$. Comme $u_n = v_n + 2$, on obtient $u_n = 3^{n+1} + 2$.

(c) Cette somme compte $n + 1$ termes, de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $3 \neq 1$.
Donc $v_0 + \cdots + v_n = 3 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3\,(3^{n+1}-1)}{2}$. On a multiplié le numérateur et le dénominateur par -1.

(d) Non, Inès a tort. On a $T_1 = u_0 + u_1 = 5 + 11 = 16$. Sa formule donne $5 \times \frac{1-3^2}{1-3} = 5 \times \frac{-8}{-2} = 20 \neq 16$. Son erreur : (u_n) n'est pas géométrique. Par exemple, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{11}{5}$ alors que $\frac{u_2}{u_1} = \frac{29}{11}$. La formule de la somme géométrique ne s'applique donc pas à (u_n).

(e) Pour tout entier naturel n, $T_n = (v_0 + 2) + \cdots + (v_n + 2) = (v_0 + \cdots + v_n) + (2 + 2 + \cdots + 2)$. La deuxième somme est celle d'une suite constante (raison 1) : la formule est interdite. Elle compte $n + 1$ termes égaux à 2, donc elle vaut $2\,(n + 1)$. Ainsi $T_n = \frac{3\,(3^{n+1}-1)}{2} + 2\,(n + 1)$. Pour $n = 5$: $T_5 = \frac{3 \times 728}{2} + 12 = 1\,092 + 12 = 1\,104$.

5. *Évolutions à taux constant et intérêts composés*

Ex. 33 ★☆☆ **Du pourcentage au coefficient multiplicateur**

(a) $q = 1 + \frac{7}{100} = 1{,}07$.

(b) Non. Une baisse de 7 % revient à multiplier par $1 - \frac{7}{100} = 0{,}93$. Multiplier par 0,07 correspond à une baisse de 93 %.

(c) Le coefficient est $1 + \frac{0{,}8}{100} = 1{,}008$, donc le nouveau prix vaut $250 \times 1{,}008 = 252$ €.

(d) $0{,}73 = 1 - \frac{27}{100}$: c'est une baisse de 27 %.

(e) $1{,}6 = 1 + \frac{60}{100}$: c'est une hausse de 60 %.

(f) Non. Le coefficient vaudrait $1 - \frac{120}{100} = -0{,}2$ et le prix deviendrait négatif, ce qui est impossible. Une baisse de 100 % donne déjà 0 : c'est le maximum possible.

Ex. 34 ★☆☆ Vélos en libre-service à Rennes

(a) $v_0 = 3\,200$ et $v_1 = 3\,200 \times 1{,}06 = 3\,392$.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}06\, v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}06$.

(c) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 3\,200 \times 1{,}06^n$.

(d) L'indice n'est pas l'année : $2034 = 2026 + 8$, donc il faut calculer $v_8 = 3\,200 \times 1{,}06^8$.

(e) $v_8 = 3\,200 \times 1{,}06^8 \approx 5\,100{,}31$: on prévoit environ 5 100 vélos en 2034.

(f) Le coefficient global vaut $1{,}06^8 \approx 1{,}5938$, soit une hausse d'environ 59,38 %
(et non $8 \times 6 = 48$ %).

Ex. 35 ★★☆ Taux successifs : vrai ou faux ?

(a) Faux. Le coefficient global vaut $1{,}03^5 \approx 1{,}1593$: la hausse globale est d'environ 15,93 %. On multiplie les coefficients, on n'additionne pas les taux.

(b) Faux. Le coefficient global vaut $1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$: c'est une hausse de 21 %, et non de 20 %.

(c) Faux. Le coefficient global vaut $0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96$: le prix final est inférieur de 4 % au prix de départ.

(d) Vrai. Après la baisse, le prix est multiplié par 0,8. On cherche un coefficient c tel que $0{,}8 \times c = 1$, soit $c = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$: c'est bien une hausse de 25 %
(et non de 20 %).

Ex. 36 ★★☆ Intérêts simples ou intérêts composés ?

(a) Les intérêts annuels valent $2\,500 \times \frac{3{,}5}{100} = 87{,}5$ €. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + 87{,}5$: (a_n) est arithmétique de raison 87,5, et $a_n = 2\,500 + 87{,}5n$.

(b) Pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \left(1 + \frac{3{,}2}{100}\right) b_n = 1{,}032\, b_n$: (b_n) est géométrique de raison 1,032, et $b_n = 2\,500 \times 1{,}032^n$.

(c) $a_{10} = 2\,500 + 87{,}5 \times 10 = 3\,375$ € et $b_{10} = 2\,500 \times 1{,}032^{10} \approx 3\,425{,}60$ €.

(d) Il obtient $2\,500 \times 1{,}37 = 3\,425$ €, soit 60 centimes d'écart. Il faut garder la valeur exacte de la calculatrice et n'arrondir au centime qu'à la fin.

Ex. 36 (suite)

(e)

n	5	6	7
a_n	2 937,50	3 025	3 112,50
b_n	2 926,43	3 020,08	3 116,72

On a $a_0 = b_0$; à la calculatrice, $b_n < a_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant 6$ (par exemple $b_4 \approx 2\,835{,}69 < a_4 = 2\,850$), mais $b_7 > a_7$. L'offre B dépasse l'offre A pour la première fois au 1er janvier 2033.

Ex. 37 ★★☆ Quand le capital de Nora aura-t-il doublé ?

(a) Chaque année, le capital est multiplié par $1 + \frac{2{,}8}{100} = 1{,}028$.
Donc (c_n) est géométrique de raison 1,028 et, pour tout entier naturel n, $c_n = 1\,500 \times 1{,}028^n$.

(b) $c_n \geqslant 3\,000$ équivaut à $1{,}028^n \geqslant 2$. Comme $1{,}028 > 1$, $1{,}028^n$ devient aussi grand que l'on veut : ce rang existe.

(c) Il faut continuer tant que le capital est inférieur à 3 000, donc `while c < 3000:`. Il faut multiplier par le coefficient 1,028 et non par 0,028, donc `c = c * 1.028`.

```
def doublement():
    n = 0
    c = 1500
    while c < 3000:
        c = c * 1.028
        n = n + 1
    return n
```

(d) Il renvoie 26. En effet, $c_{25} = 1\,500 \times 1{,}028^{25} \approx 2\,992$ € $< 3\,000$ et $c_{26} \approx 3\,075$ € $\geqslant 3\,000$. Le capital a doublé au bout de 26 ans, soit en 2052.

(e) Les intérêts seraient de $1\,500 \times 0{,}028 = 42$ € par an, donc le capital vaudrait $1\,500 + 42n$ (modèle linéaire). $1\,500 + 42n \geqslant 3\,000$ équivaut à $n \geqslant \frac{1\,500}{42} \approx 35{,}7$, donc il faudrait 36 ans. Les intérêts composés font doubler le capital 10 ans plus tôt.

Ex. 38 ★★★ Taux mensuel ou taux annuel ?

(a) Chaque mois, le capital augmente de 0,25 % : il est multiplié par $1 + \frac{0{,}25}{100} = 1{,}0025$ (et pas par 0,0025).
Donc $m_{k+1} = 1{,}0025 \times m_k$ pour tout entier naturel k : (m_k) est géométrique de raison $q = 1{,}0025$ et de premier terme $m_0 = 4\,000$. Ainsi, pour tout entier naturel k, $m_k = 4\,000 \times 1{,}0025^k$.

Ex. 38 **(suite)**

(b) $m_{12} = 4\,000 \times 1{,}0025^{12} \approx 4\,121{,}66$ € (on arrondit seulement à la fin). Avec l'offre A, $a_1 = 4\,000 \times 1{,}03 = 4\,120$ €. Le coefficient sur un an est $1{,}0025^{12} \approx 1{,}03042$, soit une hausse d'environ 3,04 %, et pas $0{,}25 \times 12 = 3$ %. Yanis a donc tort : les taux ne s'additionnent pas, les coefficients se multiplient.

(c) Pour tout entier naturel n, $b_n = 4\,000 \times 1{,}0025^{12n} = 4\,000 \times \left(1{,}0025^{12}\right)^n$, donc $b_{n+1} = 1{,}0025^{12} \times b_n$: (b_n) est géométrique de raison $1{,}0025^{12} \approx 1{,}03042$. On a $a_{10} = 4\,000 \times 1{,}03^{10} \approx 5\,375{,}67$ € et $b_{10} = 4\,000 \times 1{,}0025^{120} \approx 5\,397{,}41$ €. Au bout de 10 ans, l'offre M rapporte environ 21,75 € de plus que l'offre A.

(d) Comme $1{,}0025 > 1$, $1{,}0025^k$ devient aussi grand que l'on veut, donc ce rang existe.

```
def seuil():
    k = 0
    m = 4000
    while m < 5000:
        m = m * 1.0025
        k = k + 1
    return k
```

La fonction renvoie 90. En effet, $m_{89} \approx 4\,995{,}40 < 5\,000$ et $m_{90} \approx 5\,007{,}89 \geqslant 5\,000$. Le capital dépasse 5 000 € au bout de 90 mois, soit 7 ans et 6 mois.

Ex. 39 ★★★ **La cote d'une voiture : modèle linéaire ou exponentiel ?**

(a) Modèle G : une baisse de 15 % revient à multiplier par $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$ (et pas par 0,15).
Donc $g_{n+1} = 0{,}85\, g_n$: (g_n) est géométrique de raison 0,85 et, pour tout entier naturel n, $g_n = 24\,000 \times 0{,}85^n$.
Modèle L : $l_{n+1} = l_n - 2\,000$, donc (l_n) est arithmétique de raison $-2\,000$ et $l_n = 24\,000 - 2\,000n$.

(b) $l_{12} = 24\,000 - 2\,000 \times 12 = 0$ et $l_{14} = 24\,000 - 2\,000 \times 14 = -4\,000$. Une valeur négative n'a pas de sens : le modèle L n'est pas réaliste sur 14 ans. En revanche, $24\,000 > 0$ et $0{,}85^n > 0$, donc $g_n > 0$ pour tout entier naturel n : le modèle G ne donne jamais une valeur nulle.

Ex. 39 **(suite)**

(c)

n	8	9	10
g_n	6 540	5 559	4 725
l_n	8 000	6 000	4 000

On a $g_9 < l_9$ et $g_{10} > l_{10}$; à la calculatrice, on vérifie aussi $g_n \leqslant l_n$ pour $n \leqslant 7$ (par exemple $g_7 \approx 7\,694 < l_7 = 10\,000$). Le plus petit entier cherché est $n = 10$, soit l'année 2036. Ensuite, l'écart se creuse : (g_n) est décroissante, donc pour $n \geqslant 10$, G perd $0{,}15\, g_n \leqslant 0{,}15 \times 4\,725 \approx 709$ € par an, moins que les 2 000 € de L.

(d) Le vendeur a tort : les taux ne s'additionnent pas. Sur 7 ans, le coefficient vaut $0{,}85^7 \approx 0{,}3206$, donc la baisse est $1 - 0{,}85^7 \approx 0{,}679$, soit environ 67,9 %. Une baisse de 100 % ou plus est impossible avec ce modèle, car $0{,}85^7 > 0$.

Ex. 40 ★★★ **Deux contrats de travail pour Chloé**

(a) Contrat 1 : $s_{n+1} = 1{,}02\, s_n$, donc (s_n) est géométrique de raison 1,02 et, pour tout entier naturel n, $s_n = 28\,000 \times 1{,}02^n$. Contrat 2 : $t_{n+1} = t_n + 600$, donc (t_n) est arithmétique de raison 600 et $t_n = 28\,000 + 600n$.

(b) Contrat 2 : la hausse vaut toujours 600 €. Contrat 1 : $s_1 - s_0 = 28\,000 \times 0{,}02 = 560$ € et $s_{10} - s_9 = 0{,}02 \times s_9 = 0{,}02 \times 28\,000 \times 1{,}02^9 \approx 669{,}25$ €. La hausse du contrat 1 n'est pas constante : elle vaut 2 % d'un salaire qui augmente, donc elle augmente chaque année. D'abord inférieure à 600 €, elle finit par la dépasser.

(c)

```
def premier_rang():
    n = 0
    s = 28000
    t = 28000
    while s <= t:
        n = n + 1
        s = s * 1.02
        t = t + 600
    return n
```

La fonction renvoie 8 : $s_7 \approx 32\,163{,}20 < t_7 = 32\,200$ et $s_8 \approx 32\,806{,}46 > t_8 = 32\,800$. Le salaire du contrat 1 dépasse celui du contrat 2 à partir de 2034.

(d) De 2026 à 2035, n va de 0 à 9 : il y a 10 termes. Contrat 1 : $s_0 + \cdots + s_9 = 28\,000 \times \frac{1-1{,}02^{10}}{1-1{,}02} \approx 306\,592{,}19$ €. Contrat 2 : $t_9 = 28\,000 + 9 \times 600 = 33\,400$, donc $t_0 + \cdots + t_9 = 10 \times \frac{28\,000+33\,400}{2} = 307\,000$ €. Sur cette période, le contrat 2 rapporte davantage.

Ex. 40 (suite)

(e) De 2026 à 2040, il y a 15 termes. Contrat 1 : $28\,000 \times \frac{1-1{,}02^{15}}{1-1{,}02} \approx 484\,215{,}67$ €. Contrat 2 : $t_{14} = 36\,400$, donc $15 \times \frac{28\,000+36\,400}{2} = 483\,000$ €. Le contrat 1 rapporte davantage sur 15 ans. Conclusion : sur 10 ans, le contrat 2 est plus avantageux ; si Chloé reste au moins 15 ans, elle doit choisir le contrat 1. En effet, à partir de 2034, $s_n > t_n$ chaque année et l'écart grandit, car la hausse annuelle $0{,}02\,s_n \geqslant 0{,}02 \times 32\,806{,}46 \approx 656$ € dépasse 600 €.

6. *Problèmes de modélisation et de seuil*

Ex. 41 ★☆☆ Seuils par le calcul

(a) $150 + 35n \geqslant 600 \iff 35n \geqslant 450 \iff n \geqslant \frac{450}{35} \approx 12{,}86$. On arrondit par excès : $n = 13$. Vérification : $u_{12} = 570 < 600$ et $u_{13} = 605 \geqslant 600$.

(b) $84 + 6n > 132 \iff 6n > 48 \iff n > 8$. L'inégalité est stricte, donc $n = 8$ ne convient pas : $n = 9$.
Vérification : $v_8 = 132$, qui n'est pas > 132, et $v_9 = 138 > 132$.

(c) $2 + 0{,}5n \geqslant 9 \iff 0{,}5n \geqslant 7 \iff n \geqslant 14$. L'inégalité est large, donc $n = 14$ convient. Vérification : $w_{13} = 8{,}5 < 9$ et $w_{14} = 9 \geqslant 9$.

(d) $900 - 45n < 300 \iff -45n < -600 \iff n > \frac{600}{45} \approx 13{,}33$ (on change le sens en divisant par -45).
Donc $n = 14$. Vérification : $t_{13} = 315 \geqslant 300$ et $t_{14} = 270 < 300$.

(e) $3{,}5 + 0{,}8n \geqslant 15 \iff 0{,}8n \geqslant 11{,}5 \iff n \geqslant 14{,}375$. On arrondit par excès, pas au plus proche : $n = 15$.
Vérification : $a_{14} = 14{,}7 < 15$ et $a_{15} = 15{,}5 \geqslant 15$.

(f) $47 + 12(n-1) \geqslant 500 \iff 12(n-1) \geqslant 453 \iff n - 1 \geqslant 37{,}75 \iff n \geqslant 38{,}75$.
Donc $n = 39$. Vérification : $b_{38} = 491 < 500$ et $b_{39} = 503 \geqslant 500$.

Ex. 42 ★☆☆ Arithmétique ou géométrique ?

(a) On ajoute la même quantité, 1,5 cm, chaque jour : (h_n) est arithmétique de raison $r = 1{,}5$ et $h_n = 18 + 1{,}5n$. Donc $h_{20} = 18 + 1{,}5 \times 20 = 48$ cm.

(b) Augmenter de 3 % revient à multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$: la quantité ajoutée change chaque année. (p_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et $p_n = 42\,000 \times 1{,}03^n$. Comme $2034 = 2026 + 8$: $p_8 = 42\,000 \times 1{,}03^8 \approx 53\,204$ habitants.

Ex. 42 (suite)

(c) On ajoute 5 membres chaque mois : la suite est arithmétique de raison 5 et de premier terme $c_1 = 28$. Donc $c_n = c_1 + (n-1) \times 5 = 28 + 5(n-1)$. Décembre est le 12e mois : $c_{12} = 28 + 5 \times 11 = 83$ membres.

(d) Baisser de 15 % revient à multiplier par $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$ (et non par 0,15) : (m_n) est géométrique de raison 0,85 et $m_n = 80 \times 0{,}85^n$.
Donc $m_6 = 80 \times 0{,}85^6 \approx 30{,}17$ mg.

(e) On retire le même montant chaque année : (v_n) est arithmétique de raison $-1\,100$ et $v_n = 14\,000 - 1\,100n$. Donc $v_7 = 14\,000 - 7\,700 = 6\,300$ €.

Ex. 43 ★★☆ Les gradins d'une salle de concert

(a) Chaque rangée compte 3 sièges de plus que la précédente : pour tout entier $n \geqslant 1$, $s_{n+1} - s_n = 3$. La suite (s_n) est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $s_1 = 24$. D'où $s_n = s_1 + (n-1) \times 3 = 24 + 3(n-1) = 21 + 3n$.

(b) $s_{18} = 21 + 3 \times 18 = 75$. La dernière rangée compte 75 sièges.

(c) Le total est la somme de 18 termes consécutifs : $S = 18 \times \frac{s_1+s_{18}}{2} = 18 \times \frac{24+75}{2} = 891$. La salle compte 891 sièges. Il ne faut pas confondre ce total avec 75, qui est le nombre de sièges de la dernière rangée seulement.

(d) Avec 21 rangées : $s_{21} = 84$, et le total vaut $21 \times \frac{24+84}{2} = 1\,134 < 1\,200$. Avec 22 rangées : $s_{22} = 87$, et le total vaut $22 \times \frac{24+87}{2} = 1\,221 \geqslant 1\,200$. Le total augmente avec le nombre de rangées : il faut au minimum 22 rangées.

Ex. 44 ★★☆ La pépinière et la boucle while

(a) Augmenter de 6 % revient à multiplier par $1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$: pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1{,}06 \times a_n$. La suite (a_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}06$ et de premier terme $a_0 = 1\,500$. D'où $a_n = 1\,500 \times 1{,}06^n$.

(b) Au départ, $a = 1\,500$: la condition `a > 3000` est fausse. La boucle ne s'exécute donc jamais, et la fonction renvoie 0. La boucle doit tourner tant que le seuil n'est pas dépassé. On écrit donc la négation de $a > 3\,000$: `while a <= 3000:`.

(c) $a_{11} = 1\,500 \times 1{,}06^{11} \approx 2\,847 \leqslant 3\,000$ et $a_{12} = 1\,500 \times 1{,}06^{12} \approx 3\,018 > 3\,000$. La boucle s'arrête au premier terme strictement supérieur à 3 000 : le programme corrigé renvoie 12.

Ex. 44 **(suite)**

(d) $2026 + 12 = 2038$: le stock de la pépinière dépassera 3 000 arbustes en 2038.

Ex. 45 ★★☆ **Deux contrats pour Chloé**

(a) Contrat A : on ajoute un montant fixe de 50 € par an, donc (a_n) est arithmétique de raison 50 et $a_n = 2\,400 + 50n$. Contrat B : on applique un pourcentage fixe, ce qui revient à multiplier par 1,02 chaque année.
Donc (b_n) est géométrique de raison 1,02 et $b_n = 2\,350 \times 1{,}02^n$.

(b) $2031 = 2026 + 5$, donc $n = 5$. $a_5 = 2\,400 + 50 \times 5 = 2\,650$ € et $b_5 = 2\,350 \times 1{,}02^5 \approx 2\,594{,}59$ €. En 2031, le contrat A paie davantage.

(c) $a_{12} = 3\,000$ et $b_{12} \approx 2\,980{,}37$; $a_{13} = 3\,050$ et $b_{13} \approx 3\,039{,}98$; $a_{14} = 3\,100$ et $b_{14} \approx 3\,100{,}78$.

(d) Pour $n = 13$, on a $b_{13} < a_{13}$, et pour $n = 14$, on a $b_{14} > a_{14}$. Comme $2026 + 14 = 2040$, le salaire mensuel du contrat B dépasse celui du contrat A à partir de 2040.

(e) Il y a 15 termes, de $n = 0$ à $n = 14$. Pour A : $a_0 + \cdots + a_{14} = 15 \times \frac{2\,400 + 3\,100}{2} = 41\,250$ €. Pour B : $b_0 + \cdots + b_{14} = 2\,350 \times \frac{1 - 1{,}02^{15}}{1 - 1{,}02} \approx 40\,639{,}53$ €. Comme $40\,639{,}53 < 41\,250$, Chloé a tort. En 2040, B dépasse A pour le salaire de l'année, mais pas pour le total cumulé.

Ex. 46 ★★★ **Les carpes d'un étang de Sologne**

(a) Perdre 20 % revient à multiplier par $1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$, puis on ajoute 600.
Donc pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}8\,p_n + 600$.
$p_1 = 0{,}8 \times 8\,000 + 600 = 7\,000$ et $p_2 = 0{,}8 \times 7\,000 + 600 = 6\,200$. $p_1 - p_0 = -1\,000$ mais $p_2 - p_1 = -800$: les différences ne sont pas égales, donc (p_n) n'est pas arithmétique. $\frac{p_1}{p_0} = \frac{7}{8} = 0{,}875$ mais $\frac{p_2}{p_1} = \frac{31}{35} \approx 0{,}886$: les quotients ne sont pas égaux, donc (p_n) n'est pas géométrique.

(b) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = p_{n+1} - 3\,000 = 0{,}8\,p_n + 600 - 3\,000 = 0{,}8\,p_n - 2\,400 = 0{,}8\,(p_n - 3\,000) = 0{,}8\,v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 8\,000 - 3\,000 = 5\,000$. Ainsi $v_n = 5\,000 \times 0{,}8^n$, et comme $p_n = v_n + 3\,000$, on obtient pour tout entier naturel n : $p_n = 3\,000 + 5\,000 \times 0{,}8^n$.

Ex. 46 **(suite)**

(c) La condition `p >= S` est bien la négation de $p_n < S$. Mais au départ, `p` vaut $p_0 = 8\,000$ alors que `n` vaut 1 : à tout moment, `p` contient p_{n-1} et non p_n. Le programme renvoie donc le rang cherché augmenté de 1 (ici 12). On initialise le compteur à 0 :

```
def annee(S):
    n = 0
    p = 8000
    while p >= S:
        n = n + 1
        p = 0.8 * p + 600
    return n
```

Cette fois, `annee(3500)` renvoie 11.

(d) $p_{10} = 3\,000 + 5\,000 \times 0{,}8^{10} \approx 3\,536{,}87 \geqslant 3\,500$ et $p_{11} = 3\,000 + 5\,000 \times 0{,}8^{11} \approx 3\,429{,}50 < 3\,500$. Le premier rang est donc $n = 11$, et $2026 + 11 = 2037$. C'est en 2037 que l'étang compte pour la première fois moins de 3 500 carpes.

(e) $0{,}8^{30} \approx 0{,}0012$ et $p_{30} \approx 3\,006{,}19$. On conjecture que $0{,}8^n$ devient aussi proche de 0 que l'on veut quand n devient grand (car $0 < 0{,}8 < 1$). Alors $5\,000 \times 0{,}8^n$ se rapproche de 0, et le nombre de carpes semble se stabiliser autour de 3 000.

Ex. 47 ★★★ **La tirelire de Lucas**

(a) Pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - v_n = 6$: la suite est bien arithmétique de raison 6. Mais la formule est fausse, car le premier terme est v_1 et non v_0 : avec la formule de Noa, $v_1 = 30 + 6 = 36 \neq 30$. On utilise $v_n = v_p + (n - p)r$ avec $p = 1$: $v_n = 30 + (n - 1) \times 6$, soit $v_n = 24 + 6n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) $24 + 6n \geqslant 100 \iff 6n \geqslant 76 \iff n \geqslant \frac{38}{3} \approx 12{,}67$. Le plus petit entier qui convient est $n = 13$ (arrondi par excès). Vérification : $v_{12} = 96 < 100$ et $v_{13} = 102 \geqslant 100$. Le 13e mois est janvier 2028 : c'est le premier mois où le versement atteint 100 €.

(c) Décembre 2027 est le 12e mois et $v_{12} = 24 + 6 \times 12 = 96$. On additionne 12 termes consécutifs d'une suite arithmétique : $T_{12} = 12 \times \frac{30 + 96}{2} = 756$. À la fin de décembre 2027, Lucas a versé 756 € au total. $v_{12} = 96$ € est seulement le versement de décembre, et non la somme des 12 versements.

(d) $T_n = v_1 + \cdots + v_n$ compte n termes, de premier terme 30 et de dernier terme $24 + 6n$.
Donc $T_n = n \times \frac{30 + 24 + 6n}{2} = n \times \frac{54 + 6n}{2}$, soit $T_n = 3n^2 + 27n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Ex. 47 **(suite)**

(e) Le tableau de valeurs donne $T_{21} = 3 \times 21^2 + 27 \times 21 = 1\,890 < 2\,000$ et $T_{22} = 3 \times 22^2 + 27 \times 22 = 2\,046 \geqslant 2\,000$. Le premier rang est $n = 22$. Les mois 13 à 24 sont ceux de 2028, donc le 22e mois est octobre 2028. Le total de Lucas atteint 2 000 € pour la première fois fin octobre 2028.

Ex. 48 ★★★ **Deux plans pour une usine de Dunkerque**

(a) Baisser de 4 % revient à multiplier par $1 - \frac{4}{100} = 0{,}96$. Donc pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0{,}96\, e_n$: (e_n) est géométrique de raison 0,96 et de premier terme $e_0 = 50\,000$. Ainsi $e_n = 50\,000 \times 0{,}96^n$. Comme $0 < 0{,}96 < 1$ et $e_0 > 0$, la suite (e_n) est strictement décroissante.

(b) On pose $S = 1 + q + \cdots + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$. En soustrayant, tous les termes s'éliminent sauf deux : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, $1 - q \neq 0$, et on peut diviser : $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

(c) De 2026 à 2035, n va de 0 à 9 : cela fait 10 termes. Total $= 50\,000 \times (1 + 0{,}96 + \cdots + 0{,}96^9) = 50\,000 \times \frac{1 - 0{,}96^{10}}{1 - 0{,}96} = 1\,250\,000 \times (1 - 0{,}96^{10}) \approx 418\,959$. Avec le plan A, l'usine émet environ 418 959 t de 2026 à 2035.

(d) On cherche le plus petit n tel que $50\,000 \times 0{,}96^n < 30\,000$. La calculatrice donne $e_{12} \approx 30\,635{,}49 \geqslant 30\,000$ et $e_{13} \approx 29\,410{,}07 < 30\,000$. Le premier rang est $n = 13$, et $2026 + 13 = 2039$. C'est en 2039 que les émissions passent pour la première fois sous 30 000 t.

(e) Le plan B retire une quantité fixe chaque année : on a une suite arithmétique de raison $-2\,000$, $f_n = 50\,000 - 2\,000n$. $f_9 = 50\,000 - 18\,000 = 32\,000$. Sur 10 termes : total $= 10 \times \frac{50\,000 + 32\,000}{2} = 410\,000$ t. Comme $410\,000 < 418\,959$, c'est le plan B qui émet le moins au total de 2026 à 2035.